## 5. ТОЧКОВИ ГРУПИ НА СИМЕТРИЯ (КЛАСОВЕ НА СИМЕТРИЯ) ПРИ КРИСТАЛИТЕ: СЪЧЕТАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА СИМЕТРИЯ ПРИ КРИСТАЛИТЕ. ТОЧКОВИ ГРУПИ НА СИМЕТРИЯ: $C_n$, $S_{2n}$, $C_{nh}$, $C_{nv}$, $D_n$, $D_{nh}$, $D_{nd}$, $O_h$, O, T, $T_d$, $T_h$. КРИСТАЛОГРАФСКИ СИСТЕМИ ИЛИ СИНГОНИИ. ХОЛОЕДРИЧЕН КЛАС НА СИНГОНИЯТА.

### 1. Въведение

Всяко правилно геометрично тяло или кристал се характеризира с определен брой **симетрични операции.** Те образуват точкова група, т.к. притежават свойствата на една абстрактна математическа група и същевременно при прилагането им поне една точка от тялото остава неизменна.

Съвкупността от всички елементи на симетрия (**операции на симетрия**), които характеризират даден кристал образуват неговата **точкова група** или **клас на симетрия.**

### 2. Съчетаване на елементите на симетрия при кристалите

| | ***Международни означения*** | ***Шенфлис*** |
|---|---|---|
| Ос на симетрия (въртене) | $n$ | $Cn$ |
| Равнина на симетрия (отражение) | $m$ | $Cs$ |
| Център на симетрия (инверсия) | $\bar{1}$ | $Ci$ |
| Инверсна ос (инверсно въртене) ≡ огледална ос | $\bar{n}$ | $Cni$ |

Съчетаването на краен брой елементи на симетрия в кристалите не може да става произволно, а се подчинява на определени правила. Тези правила следват от теорията на групите, която се разглежда от съвременната висша алгебра. В сила са следните теореми:

**2.1.** Ако един кристал притежава едновременно равнина и център на симетрия, центърът на симетрия трябва да лежи в равнината на симетрия.

$$\boxed{\exists m, \bar{1} \Rightarrow \bar{1}\ \mathrm{z}\ m}$$

В противен случай, инверсията на точките от равнината на симетрия в центъра на симетрия ще доведе до възникване на нова равнина на симетрия, а отражението в нея на центъра на симетрия – до възникването на нов център на симетрия. Тези операции можем да извършим неограничен брой пъти, откъдето следва, че броят на елементите на симетрия в такова тяло или кристал, също не може да бъде ограничен.

**Следствие:** Ако в кристал съществува един център на симетрия $\bar{1}$ и няколко равнината на симетрия $m$, то равнините трябва да се пресичат по прави, които минават през $\bar{1}$.

**2.2.** Равнина на симетрия не може да се съчетае с ос на симетрия, сключваща произволен ъгъл с нея. Възможни съчетания са:

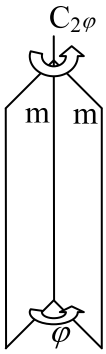
| | | ***Международни означения*** | ***Шенфлис*** |
|---|---|---|---|
| • оста лежи в равнината на симетрия : | $n\ \mathrm{z}\ m$ | $nm$ | $Cnv$ |
| • оста е перпендикулярна на равнината: (биполярна ос) | $n \perp m$ | $n/m$ | $Cnh$ |

Равнината разделя на половина ъглите между равновесните оси.

**2.3.** Произведението от две отражения в две пресичащи се под $\angle\varphi$ равнини е еквивалентно на завъртане на ъгъл $2\varphi$ около ос, съвпадаща с пресечната права на двете равнини.

$$\boxed{\hat{\sigma}_V . \vec{\sigma}_{V'} = \hat{C}(2\varphi)} \qquad \text{или} \qquad \vec{\sigma}_{v'} = \hat{\sigma}_v . \hat{C}(2\varphi)$$

**Следствие:** Ако към ос от $n^{\text{ти}}$ порядък присъединим равнина на симетрия, минаваща през оста, то това води до възникване на нови (n–1) на брой равнини на симетрия, минаващи през същата ос и сключващи помежду си равни ъгли $\pi / n$ .




$$\boxed{\exists\ n, m;\ n\ \mathrm{z}\ m \Rightarrow \exists\ n \text{ броя } m \text{ под } \angle(\pi / n)}$$

**2.4.** Равностойните оси на симетрия (от един и същ порядък) могат да сключват помежду си само определени ъгли, така че при взаимните завъртания осите да се припокриват. Така съществува ограничен брой равностойни оси.

**Таблица 1**

| ***Оси*** | ***Ъгли*** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_2$ | 0° | 60° | | 90° | | 120° | 180° |
| $C_3$ | 0° | | 70°31'44" | | 109°28'16" | | 180° |
| $C_4$ | 0° | | | 90° | | | 180° |
| $C_6$ | 0° | | | | | | 180° |

**2.5.** Възможни са само определени съчетания на осите на симетрия.

$C_2 \rightarrow C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6$

$C_3 \rightarrow C_2,\ C_3,\ C_4$

$C_4 \rightarrow C_2,\ C_3,\ C_4$

$C_6 \rightarrow C_2$

Към съществуващите оси могат да се добавят нови оси на симетрия само така, че това да не води до възникване на нови оси на симетрия или ако се образуват равностойни оси, ъглите между тях да имат стойности от Таблица 1.

**2.6.** Ако към ос от $n^{\text{ти}}$ порядък се присъедини перпендикулярна на нея ос от втори порядък, това води до поява на още (n–1) на брой такива оси, пресичащи се под $\angle\varphi = \pi / n$ .

$$\boxed{\exists\ n,\ 2 \perp n \Rightarrow (n \text{ на брой})\ 2 \perp n;\ \angle(2,2) = \pi / n}$$

Това следва от свойствата на $C_2$ и $\angle(C_2, C_2)$, възможни според Таблица 1.

**2.7.** Ос от $n^{\text{ти}}$ порядък, $n$ двойни оси на симетрия, перпендикулярни на нея и $n$ равнини на симетрия, които разполовяват ъглите между тях са еквивалентни на една огледална ос на симетрия от $2n^{\text{ти}}$ порядък.

| C$n$, $n$ на брой $C_2 \perp$ C$n$, $n$ на брой $m$ под $\angle \pi / n$, C$n$ z $m$, $m$ разполовява $\angle(C_2, C_2) \Rightarrow S_{2n}$ |
|---|

**3. Точкови групи на симетрия (или класове)**

При кристалите съществуват **32 класа на симетрия**. Доказателство за това дават, независимо един от друг, немският кристалограф Хесел (през 1830г.) и руският кристалограф и химик Аксел Гадолин (40 години по-късно).

**27 класа** са **едноосни** (моногирни), а **5 класа** са **многоосни** (полигирни).

Първите 27 класа се групират в 7 сборни групи, с означения по международната система и на Шенфлис: *C* – означава цикличен; *S* – означава огледален; *D* – означава диедричен; *T* – означава тетраедричен; *O* – означава октаедричен.

---

32 класа на симетрия

Едноосни (моногирни)

$C_n$(5) $1 \equiv C_1$ $2 \equiv C_2$ $3 \equiv C_3$ $4 \equiv C_4$ $6 \equiv C_6$

$S_{2n}$(3) $S_2 \equiv C_i \equiv \bar{1}$ $S_4 \equiv \bar{4}$ $S_6 \equiv C_{3i} \equiv \bar{3}$

$C_{nh}$(5) $C_{1h} \equiv C_s \equiv m$ $C_{2h} \equiv 2/m$ $C_{3h} \equiv 3/m \equiv \bar{6}$

$C_{4h} \equiv 4/m$ $C_{6h} \equiv 6/m$

$C_{nv}$(4) $C_{2v} \equiv mm2$ $C_{3v} \equiv 3m$ $C_{4v} \equiv 4mm$ $C_{6v} \equiv 6mm$

$D_n$(4) $D_2 \equiv V \equiv 222$ $D_3 \equiv 32$ $D_4 \equiv 422$ $D_6 \equiv 622$

$D_{nh}$(4) $D_{2h} \equiv mmm$ $D_{3h} \equiv \bar{6}m2$ $D_{4h} \equiv 4/mmm$

$D_{6h} \equiv 6/mmm$

$D_{nd}$(2) $D_{3d} \equiv \bar{3}m$ $D_{2d} \equiv V_d \equiv \bar{4}2m$

Многоосни (полигирни)

$O_h \equiv m3m$ $O \equiv 432$

$T \equiv 23$ $T_d \equiv \bar{4}3m$ $T_h \equiv m3$

---

**3.1.Едноосни класове на симетрия:**

**3.1.1. C*n*** (5): $1 \equiv C_1$; $2 \equiv C_2$; $3 \equiv C_3$; $4 \equiv C_4$; $6 \equiv C_6$

Една полярна ос от $n^{\text{ти}}$ порядък.

**3.1.2. *S₂n*** (3): $S_2 \equiv C_i \equiv \bar{1}$; $S_4 \equiv \bar{4}$; $S_6 \equiv C_{3i} \equiv \bar{3}$

Една инверсна ос (или огледално въртене) от четен порядък.

**3.1.3. *Cnh*** (5): $C_{1h} \equiv C_s \equiv m$; $C_{2h} \equiv \frac{2}{m}$; $C_{3h} \equiv \frac{3}{m} \equiv \bar{6}$; $C_{4h} \equiv \frac{4}{m}$; $C_{6h} \equiv \frac{6}{m}$

(C$n$ + $m \perp n$). Една ос на симетрия C$n$ и $\perp$ на нея равнина на симетрия.

**3.1.4. *Cnv*** (4): $C_{2v} \equiv mm2; C_{3v} \equiv 3m; C_{4v} \equiv 4m;\ C_{6v} \equiv 6mm$

(С$n$ + $m$ ($n$ броя) || $n$). Една ос на симметрия С$n$ и $n$ на брой равнини, минаващи през оста $n$. Втората буква $m$ означава наличие на втора равнина или съвкупност от равнини, нееквивалентни на първата.

**3.1.5. *Dn*** (4): $D_2 \equiv V \equiv 222; D_3 \equiv 32; D_4 \equiv 422;\ D_6 \equiv 622$

(С$n$ + 2 ($n$ броя) $\perp$ $n$). Една ос Cn и $\perp$ ($n$ на брой) двойни оси.
Оста $n$ става биполярна.

**3.1.6. *Dnh*** (4): $D_{2h} \equiv mmm; D_{3h} \equiv 6m2; D_{4h} \equiv \dfrac{4}{mmm};\ D_{6h} \equiv \dfrac{6}{mmm}$

($Dn$ + $m$ $\perp$ $n$ $\Rightarrow$ $m$ ($n$ броя) z ($n$, 2)). Към $Dn$ се прибавя равнина, минаваща през двойните оси и $\perp$ на главната ос. Това води до възникване на $n$ нови равнини, минаващи през главната ос и съответната двойна ос.
Класовете с четно $n$ съдържат и център на инверсия.

**3.1.7. *Dnd*** (2): $D_{3d} \equiv 3m; D_{2d} \equiv V_d \equiv \bar{4}2m$

Към $Dn$ се прибавят $n$ равнини, минаващи през главната ос и разполовяващи ъгъла между двойните оси.

**3.2.Многоосни класове на симетрия**

**3.2.1. *Oh*** или $m3m$

Всички елементи на симетрия на куба. Има 48 симетрични операции – най-голям брой от всички групи. Четири биполярни тройни оси, 3 биполярни четворни оси, 6 биполярни двойни оси, център на симетрия, 9 равнини на симетрия.

Холоедрична форма (най-общата правилна форма) на този клас е хексаоктоедърът (48-стен с триъгълни стени), следователно всяка стена на куба се фасетира с осмостенни пирамиди.

**3.2.2. *O*** или 432

Всички оси на симетрия на куба.

Най-общата правилна форма е пентагонтриоктаедър (24-стен, стените на който са петоъгълници).

**3.2.3. *T*** или 23

Всички оси на тетраедъра: към $D_2 \equiv 222$ се прибавят четирите тройни оси на тетраедъра. $D_2 + 4C_3$

Най-обща форма – пентагонтритетраедър.

**3.2.4. *Td*** или $\bar{4}3m$

Всички симетрични преобразувания на тетраедъра – към осите на $T$ се добавят равнини на симетрия, всяка от които минава през една ос 2 и две оси 3.

Най-обща форма – хексатетраедър (24 стени с триъгълна форма).

**3.2.5. *Th*** или $m3$

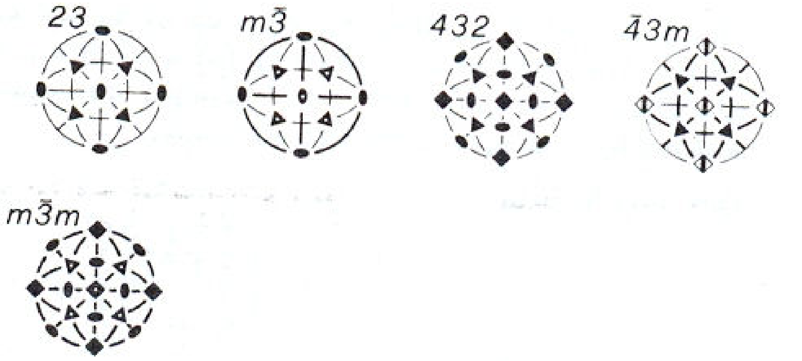
Към $T$ се добавя център на симетрия. В резултат, на което се добавят три взаимно перпендикулярни равнини на симетрия.

Най-общата форма – диодекаедри.

### 4. Кристалографски системи или сингонии

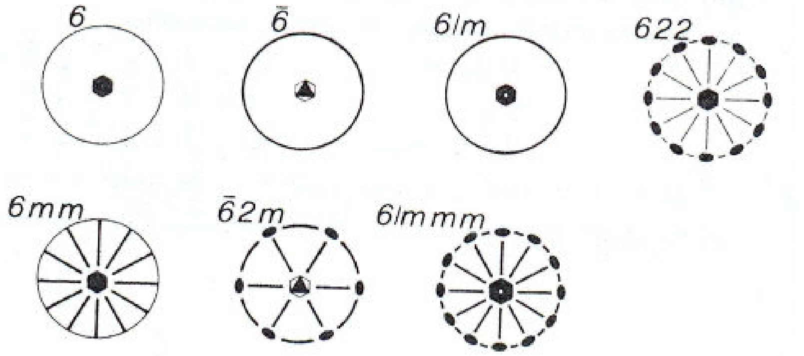
Както показа французинът Ш. Соре (1893г.) 32^та^ класа на симетрия при кристалите могат да се групират в 7 кристалографски системи или сингонии, в съответствие със седемте различни типа елементарни клетки.

#### 4.1. Кубична сингония




Към нея принадлежат 5 класа на симетрия: *Oh*, *O*, *Th*, *Td* и *T*. От тях най-голям брой елементи на симетрия има клас Oh, който се нарича **холоедричен клас на симетрия.** От неговата правилна форма – хексаоктаедъра (48-стен с триъгълни стени), могат да се получат правилните форми на останалите класове на симетрия на тази кристалографска сингония.

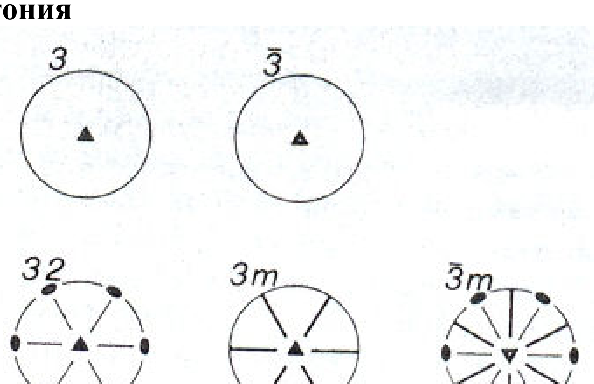
#### 4.2. Хексагонална сингония




7 класа на симетрия: $D_{6h}$, $D_{3h}$, $D_6$, $C_{6v}$, $C_{6h}$, $C_6$, $C_{3h}$. Характеризира се с една обикновена или инверсна шесторна ос – 6 или $\overline{6}$.

Холоедричен клас на сингонията $D_{6h}$ или $\frac{6}{mmm}$ с проста форма – дихексагонална бипирамида.

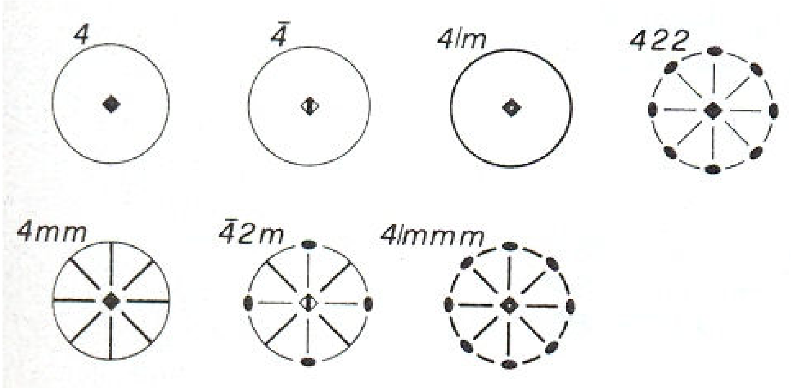
#### 4.3. Тригонална сингония




5 класа: $D_{3d}$, $D_3$, $C_{3v}$, $C_{3i} \equiv C_6$, $C_3$. Една обикновена или инверсна тройна ос 3 или $\overline{3}$.

Холоедричен клас на сингонията $C_{3v} \equiv 3m$.

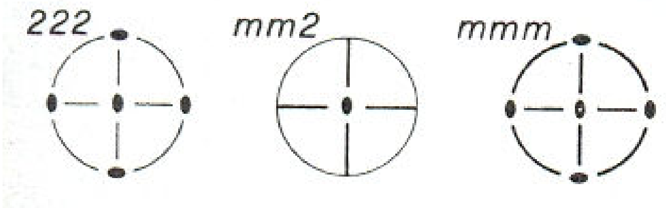
**4.4. Тетрагонална сингония**




7 класа на симетрия: $D_{4h}$, $D_{2h}$, $D_4$, $S_4$, $C_{4v}$, $C_{4h}$, $C_4$. Една обикновена или инверсна четворна ос 4 или $\bar{4}$.

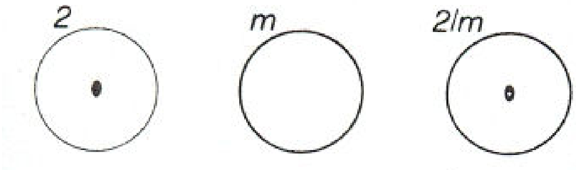
Холоедричен клас $D_{4h}$ с правилна форма – дитетрагонална бипирамида.

**4.5. Ромбична сингония**



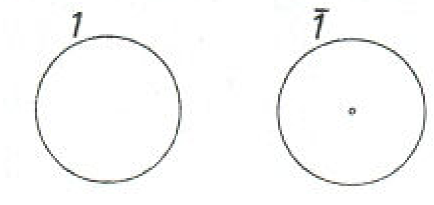

3 класа на симетрия: $D_{2h}$, $D_2$, $C_{2v}$. Три двойни оси или една двойна ос и две равнини на симетрия, минаващи през нея.

**4.6. Моноклинна сингония**




3 класа на симетрия: $C_2$, $C_{2h}$, $C_{1h}$. Една обикновена или огледална двойна ос или с една равнина на симетрия.

**4.7. Триклинна сингония**




2 класа на симетрия: $S_2 \equiv C_i$, $C_1$. Нямат оси на симетрия.

**Класовете на симетрия са с:**

- **Висша симетрия** – класовете от кубичната сингония
- **Средна симетрия** – класовете от хексагонакната, тригоналната и тетрагоналната сингония
- **Нисша симетрия** – класовете от ромбичната, моноклинната и триклинната сингония.