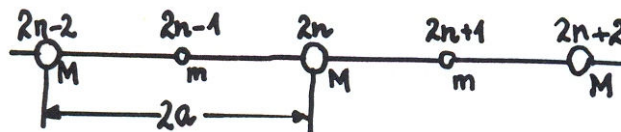


25 ВЪЛНИ И ТРЕПТЕНИЯ В ЕДНОМЕРНА КРИСТАЛНА РЕШЕТКА, СЪСТАВЕНА ОТ ДВА ВИДА ЧАСТИЦИ, СПОРЕД ТЕОРИЯТА НА БОРН И КАРМАН

1. Вълни по безкрайна едномерна кристална решетка (КР), съставена от два вида частици.

Разглеждаме теорията на Борн и Карман за едномерна кристална решетка, съставена от два вида частици, редуващи се на равни разстояния – a . Големината на основния вектор на такава КР е $2a$. Единият вид частици с маса m номерираме с нечетни номера $(2n-1), (2n+1)\dots$, а другия вид с маса M номерираме с четни номера $(2n-2), 2n, (2n+2)\dots$. Двата вида частици могат да притежават различни заряди (йонни кристали).



Правят се следните предположения:

- ✚ Действат само квазиеластични сили между най-близко разположените съседни частици.
- ✚ $\beta > 0$ е коефициент на квазиеластична сила.
- ✚ С u_{2n} се означава отклонението на $2n$ -та частица от равновесното и положение.
- ✚ С u_{2n+1} се означава отклонението на $(2n+1)$ -та частица от равновесното и положение.

Уравнението на движение на $2n$ -тата частица е:

$$(1) \quad M \frac{d^2 u_{2n}}{dt^2} = \beta(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n})$$

Уравнението на движение на $(2n+1)$ -вата частица е:

$$(2) \quad m \frac{d^2 u_{2n+1}}{dt^2} = \beta(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1})$$

За уравнения (1) търсим решение от вида:

$$(3) \quad \begin{aligned} u_{2n} &= A.e^{i(\omega.t+k2n.a)} \\ u_{2n+2} &= A.e^{i[\omega.t+k(2n+2).a]} \end{aligned}$$

За уравнения (2) търсим решение от вида:

$$(4) \quad \begin{aligned} u_{2n-1} &= B.e^{i[\omega.t+k(2n-1).a]} \\ u_{2n+1} &= B.e^{i[\omega.t+k(2n+1).a]} \end{aligned}$$

Заместваме (3) и (4) в (1) и (2) и получаваме хомогенна система уравнения:

$$(5) \quad \begin{aligned} -M\omega^2.A &= \beta.(Be^{ika} + Be^{-ika} - 2A) \\ -m\omega^2.B &= \beta.(Ae^{ika} + Ae^{-ika} - 2B) \end{aligned}$$

Или

$$(6) \quad \begin{aligned} [2\beta - \omega^2 M].A - [2\beta.\cos(ka)].B &= 0 \\ [2\beta.\cos(ka)].A - [2\beta - \omega^2 m].B &= 0 \end{aligned}$$

Системата има нетривиално решение, ако $|D| = 0$:

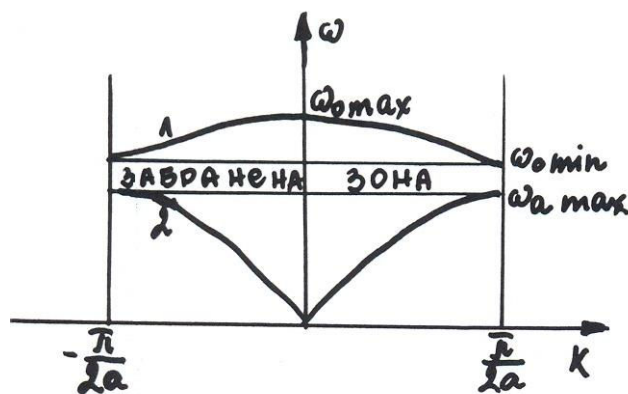
$$(7) \quad \begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 M & -2\beta.\cos(ka) \\ 2\beta.\cos(ka) & -(2\beta - \omega^2 m) \end{vmatrix} = 0$$

$$(8) \quad Mm\omega^4 - 2\beta.(m+M).\omega^2 + 4\beta^2.\sin^2(ka) = 0$$

Решението на ур. (8) е:

$$(9) \quad \omega^2 = \beta.\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm \beta.\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\sin^2(ka)}{M.m}}$$

Дисперсионните зависимости за ω - ур. (9), които удовлетворяват тези вълни, графически се представят така:



Уравнение (9) показва, че на всяко k (или λ) съответстват две трептения на КР с различни честоти. Затова дисперсионната крива, която представя зависимостта $\omega = f(k)$ се състои от два клона:

- ✚ Оптична вълна – знак (+) от ур.(9)
- ✚ Акустична вълна – знак (-) от ур. (9)

2. Акустични и оптични вълни

а) Акустични вълни

- при $k = 0$, честотата е минимална:

$$\omega = 0$$

- при $k_{\max} = \frac{\pi}{2a}$, честотата е максимална:

$$(10) \quad \omega_{a,\max}^2 = \frac{2\beta}{M}$$

б) Оптични вълни

- при $k = 0$, честотата е максимална:

$$(11) \quad \omega_{0,\max}^2 = 2\beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

- при $k_{\max} = \frac{\pi}{2a}$, честотата е минимална:

$$(12) \quad \omega_{0,\min}^2 = \frac{2\beta}{m}$$

Колкото по-голяма е разликата в масите на частиците, толкова по-близки ще са честотите от оптичния клон.

$$\text{Ако: } M \gg m: \quad \omega_{0,\max}^2 = 2\beta\left(\frac{M+m}{mM}\right) \approx 2\beta/m = \omega_{0,\min}^2$$

$$\text{Ако: } \frac{M}{m} \rightarrow \infty:$$

- Оптичният клон се изобразява с права.
- Ширината на забранената зона става по-голяма.

3. Акустични и оптични трептения

а) Акустични трептения

Ако в ур. (6) заместим: $k = 0$, $\omega = 0 \Rightarrow A = B$.

Следователно, съседните частици трептят с еднаква фаза, т.е. амплитудите на трептене на съседните частици са равни. Поради това, ако частиците са противоположно заредени ($M: +q; m: -q$), диполният електричен момент на акустичните трептения няма да се изменя:

$$\vec{p} = \frac{q}{2} \vec{a} = \text{const}$$

б) Оптични трептения

$$\text{Ако в ур. (6) заместим: } k = 0, \quad \omega^2 = \omega_{0,\max}^2 = 2\beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{m}{M}$$

Следователно, съседните частици трептят в противоположни фази – различни знаци на амплитудите. Поради това, ако частиците са противоположно заредени ($M : +q; m : -q$), диполният електричен момент на оптичните трептения ще се изменя със същата честота:

$$\bar{p} = \frac{q}{2} \bar{a}(\omega) \neq \text{const}$$

Следователно, такива трептения в КР могат да се възбудят и от ЕМВ със същата честота. Отгук произтича и названието - оптични вълни и трептения.

4. Надлъжни и напречни акустични и оптични вълни

Аналогично може да се реши задачата за напречни вълни и трептения в едномерна КР, съставена от един или два вида частици. Различен ще е коефициентът на квазиеластична сила: $\beta^* \neq \beta$.

В едномерна КР, съставена от два вида частици - m и M - има четири вида вълни и трептения с различни закони на дисперсия (различни клонове на дисперсионната крива):

- ТА – напречни акустични
- ТО – напречни оптични
- LA – надлъжни акустични
- LO – надлъжни оптични

Разположението на частиците при напречните акустични и оптични вълни в даден момент е представено на фигурата:

