24. ВЪЛНИ И ТРЕПТЕНИЯ В ЕДНОМЕРНА КРИСТАЛНА РЕШЕТКА, СЪСТАВЕНА ОТ ЕДНАКВИ ЧАСТИЦИ, СПОРЕД ТЕОРИЯТА НА БОРН И КАРМАН

1. Вълни по безкрайна едномерна кристална решетка (КР), съставена от еднакви частици.

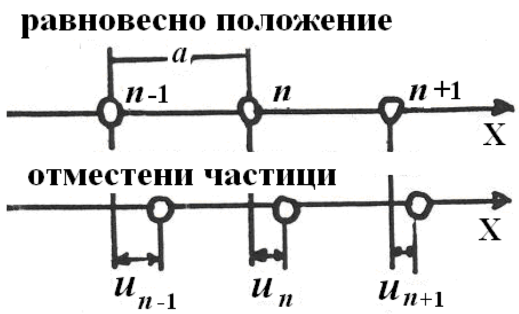
Разглеждаме теорията на Борн и Карман за най-простия случай – едномерна кристална решетка, съставена от еднакви частици, разположени на равни разстояния – големината на основния вектор a. Разглеждаме надлъжните трептения на тази КР по направление на ос X, съвпадаща с правата, върху която са разположени частиците. Тази теория предполага, че действат само квазиеластични сили между най-близко разположените съседни частици.

Ако с u_n се означи отклонението на n$^{\text{-та}}$ частица от равновесното и положение, то за квазиеластичните сили, с които (n-1) - та и (n+1) - та частици действат на n-тата частица можем да запишем:

(1) $$F_{n,n-1} = -\beta(u_n - u_{n-1})$$

(2) $$F_{n,n+1} = -\beta(u_n - u_{n+1})$$

$\beta > 0$ - коефициент на квазиеластична сила.



Резултатната квазиеластична сили, която действа на n-тата частица е:

(3) $$F_n = F_{n,n-1} + F_{n,n+1} = -\beta(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

Уравнението на движение на n-тата частица е:

(4) $$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \beta(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n)$$

m - масата на n - тата частица.

Когато едномерната кристална решетка е безкрайна, то индексът n може да заема произволни цели стойности, а движението на частиците ще се описва с безброй много диференциални уравнения от вида (4). Ако $a \to 0$, едномерната КР може да се разглежда като непрекъсната пръчка, по която се разпространяват едномерни вълни:

$$u = Ae^{i(\omega.t+k.x)}$$

Ще заместим стойностите на x с числа, кратни на a:

$$x_n = n.a, \quad x_{n-1} = (n-1).a, \quad x_{n+1} = (n+1).a$$

Ще търсим решения на системата (4) (за n -произволни цели стойностите от безкраен брой уравнения) от вида:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} u_{n-1} &= Ae^{i[\omega.t+k(n-1).a]} \\ u_n &= Ae^{i(\omega.t+kn.a)} \\ u_{n+1} &= Ae^{i[\omega.t+k(n+1).a]} \end{aligned}$$

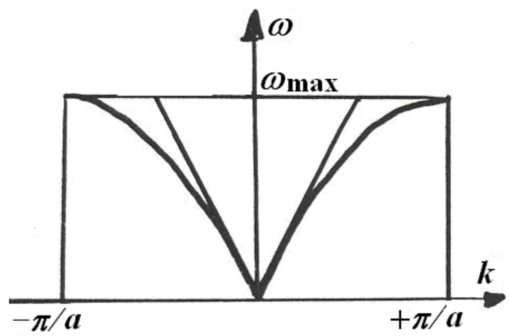
Заместваме (5) в (4) и получаваме:

$$\text{(6)} \qquad -\omega^2 m = \beta(e^{ika} + e^{-ika} - 2) = -2\beta(-\cos ka + 1) = -2\beta.2\sin^2\frac{ka}{2}$$

След елементарни преобразования получаваме дисперсионните зависимости за $\omega > 0$, които удовлетворяват тези вълни:

$$\text{(7)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}\sin\frac{ka}{2}$$

Графически дисперсионната зависимост (7) се представя така:



Максималната честота на вълните, разпространяващи се в КР е $\omega_{\max}$ и тя съответства на максимална стойност на вълновото число $k_{\max}$:

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} &\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}, \quad \frac{ka}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_{\max} = \pm\frac{\pi}{a} \\ &k_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda_{\min} = 2a \end{aligned}$$

Първа или приведена зона на Брилуен се нарича област със стойности на k, ограничени в интервала $(-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a})$

а) При ниски честоти - звукови, ултразвукови вълни (< 10^8 Hz):

$$\sin\frac{ka}{2} \to \frac{ka}{2}, \quad \omega, k - \textit{малки}, \lambda - \textit{големи}$$

(9) $$\omega = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}.\frac{ka}{2}, \quad \omega << \omega_{\max}$$

Получава се линейна зависимост $\omega = f(k)$, т.е. дисперсията изчезва, както и при непрекъсната пръчка. При обикновените звукови и ултразвукови вълни (<10^8 Hz), с честоти, сравнително ниски спрямо Дебаевата честота, дисперсията е незначителна.

Скоростта на вълните не зависи от ω или k :

(10) $$\upsilon = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{\beta}{m}} = \upsilon_0$$

б) При високи честоти (над 10^8 Hz) - акустични вълни от хиперзвуковия диапазон

(11) $$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}\frac{\sin\frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}.\frac{a}{2} = \upsilon_0.\frac{\sin\frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}$$

Фазовата скорост на вълните не е постоянна, а зависи от ω или k - (11).

2. Трептения на крайна едномерна КР, съставена от един вид частици

Нека крайната едномерна КР е съставена от G на брой елементарни клетки (ЕК), тогава дължината на КР ще е: $L = Ga$. Ако крайните частици на тази КР са неподвижни, то собствените и трептения ще се описват със стояща вълна:

(12) $$L = Ga = n\frac{\lambda}{2}$$

(13) $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n\frac{\pi}{L} = \frac{n}{G}.\frac{\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, ...G$$

(14) $$\omega \overset{(7,8)}{=} \omega_{\max}.\sin\frac{n\pi}{2G}$$

или $$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \; \nu = \nu_{\max}.\sin\frac{n\pi}{2G}$$

Интегрален спектър на трептене (брой трептения с честоти от 0 до ν):

(15) $$z = n = \frac{2G}{\pi}\arcsin\frac{\nu}{\nu_{\max}}$$

Диференциален спектър на трептене:

(16) $$q(\nu) = \frac{dz}{d\nu} = \frac{2L}{\pi a \nu_{\max}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_{\max}}\right)^2}}$$

При ниски честоти $\omega << \omega_{\max}$: $\left(\frac{\nu}{\nu_{\max}}\right)^2 << 1 \Rightarrow$

$$q(\nu) \approx \frac{2L}{\pi a \omega_{\max}} .2\pi = \frac{2L}{\pi a . \sqrt{\frac{4\beta}{m}}} .2\pi$$

(17) $$q(\nu) \approx \frac{2L}{a\sqrt{\beta / m}} \overset{(11)}{=} \frac{2L}{\upsilon_0}$$

При ниски честоти диференциалният спектър на трептене преминава във формулата от модела на Дебай – ур.(17).