23. ЕЛАСТИЧНИ ВЪЛНИ И ТРЕПТЕНИЯ В НЕПРЕКЪСНАТИ АНИЗОТРОПНИ ТЕЛА

1. Еластични вълни в кристалите

В безкрайна анизотропна среда се разпространява еластична вълна, като уравнението на движение на произволно малък обем V, с маса M се дава чрез уравнението на Кристофел:

$$\rho \ddot{u}_i = c_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l}$$

u_i - компоненти на вектора на преместване на безкрайно малък обем V.

Решението на уравнението е плоска монохроматична вълна:

$$u_i = \alpha_i e^{i(k_m x_m - \omega t)} = \alpha_i e^{ik(l_m x_m - vt)}$$

α_i – компоненти на вектора на амплитудата на вълната на преместване (собствен вектор),

l_m - компоненти на единичния вектор на посоката на вълновия вектор $\vec{k}_m$,

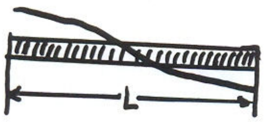
$v = \omega / k$ - скорост на вълната.

Във всяко направление l_m в кристала има три положителни корена за $v \Rightarrow$ разпространяват се три вълни с различни скорости (1 квазинадлъжна и 2 квазинапречни вълни), като собствените им вектори са взаимно перпендикулярни (α_i определя посоката на поляризация).

В крайна анизотропна среда свойствата на вълната се определят и от граничните условия на повърхнината на тялото. Тези вълни се наричат нормални вълни. Такива са собствените трептения на крайни кристали.

2. Собствени трептения на крайни изотропни тела (непрекъсната среда)

За опростяване ще разглеждаме собствените надлъжни трептения на кварц във формата на хомогенна пръчка с дължина L. Това са трептения на разтягане и свиване на пръчката по дължина.



Ако разглеждаме пръчката като непрекъсната среда в нея са възможни трептения с дължини на вълната λ, за което:

(1) $$L = n\frac{\lambda}{2} \text{ или } \lambda = \frac{1}{n}2L,\ n = 1, 2, 3...\infty \text{ (непрекъсната среда)}$$

(2) $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n\frac{\pi}{L} \text{ - вълнов вектор на вълната}$$

(3) $$\upsilon = \nu . \lambda \text{ - скорост на разпространение на вълната}$$

(4) $$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = n\frac{\upsilon}{2L} \text{ - честота на вълната}$$

Нека размерите на кварцовата пръчка са съответно: a, b и L, като $a << L$ и $b << L$. Граничните условия за крайщата на пръчката по направление на L, когато тя е свободна (отсъства механично напрежение) са:

$$T_{22} = 0 \text{ при } x_2 = 0 \text{ и } x_2 = L$$

Собствените трептения на кристала са нормални вълни и от уравнението на Кристофел могат да се получат възможните стойности за честотата ν - ур. (4).

Броят на собствените трептения с честоти от 0 до ν ще бъде $z = n$ и от (4) се получава:

$$z = n = \frac{2L}{\upsilon}.\nu \tag{5}$$

Ур.(5) изразява ***интегралния спектър на трептенията*** на пластинката за дадена честота - ν.

След диференциране се получава:

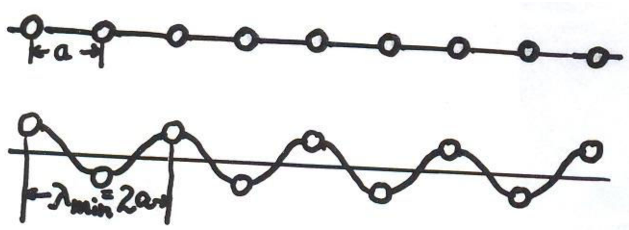
$$dz = \frac{2L}{\upsilon}.d\nu$$

Функцията на разпределение на трептенията по честота $q(\nu) = \dfrac{dz}{d\nu}$ се нарича ***диференциален спектър на трептенията***. В разглеждания случай разпределението на трептенията по честота е равномерно, т.е. диференциалният им спектър се изразява с константа:

$$q(\nu) = \frac{2L}{\upsilon} \tag{6}$$

3. Максимална честота на вълните в едномерна кристална решетка

За илюстрация на максималната честота $\nu_{\max}$ на еластични вълни в едномерна кристална решетка разглеждаме напречна еластична вълна в едномерен кристал:



a – основен вектор на кристалната решетка,
$L = Na$ – дължина на кристала,
N – брой ЕК в кристала.

От (2) за вълновото число получаваме:

(7)
$$k = \frac{n}{N}\frac{\pi}{a}$$

От (4) за честотата на трептенията получаваме:

(8)
$$\nu = \frac{n}{N}\frac{1}{2a}.\upsilon$$

В този случай между всеки две частици, трептящи с еднаква фаза, ще се намири една частица от КР, трептяща с противоположна фаза. Следователно, няма смисъл условието: $\lambda < 2a$.

(9)
$$L = n\frac{\lambda}{2} = Na$$

За $\lambda_{\min} = 2a$ от (9) $\Rightarrow$ $n = N$, т.е. броят на собствените трептения с честоти от 0 до $\nu_{\max}$ съвпада с броя на елементарните клетки на кристала. Тогава от (7) се получава максималната стойност на вълновото число:

(10)
$$k_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \frac{\pi}{a}$$

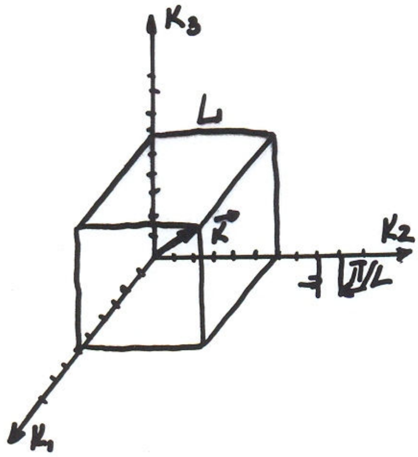
От (8), при $\lambda_{\min} = 2a$, за максималната честота на вълната се получава:

(11)
$$\nu_{\max} = \frac{\upsilon}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{2a}.\upsilon$$

Тази максимална честота се нарича Дебаева честота. Поради прекъснатия строеж на кристалите, разпространението на еластични вълни с честоти $\nu > \nu_{\max}$ е невъзможно. Докато в непрекъсната среда е възможно разпространение на еластични вълни с произволно висока честота.

4. Модел на Дебай за спектъра на трептенията на тримерен кристал

Дебай обобщава резултатите за спектъра на собствените трептения в едномерния случай на кристална пръчка, за тримерния случай.
Съгласно моделът на Дебай, КР се разглежда като еднородна еластична среда, в която честотата на трептенията не надвишава $\nu_{\max}(k_{\max})$, избрана така, че броят на независимите трептения 3sN, да е равен на броя на степените на свобода (3sN – брой степрени на свобода, sN – брой атоми в кристала).



За целта в k – пространството разглеждаме кристал с формата на куб с дължина на страната L. Нека в него се разпространява векторна еластична вълна $\vec{k}$, която се разглежда като сума от 3 скаларни вълни k_i.

(12) $$k_1 = k\beta_1 = n_1 \frac{\pi}{L}; \quad k_2 = k\beta_2 = n_2 \frac{\pi}{L}; \quad k_3 = k\beta_3 = n_3 \frac{\pi}{L}$$

β_1, β_2, β_3 – косинус директории спрямо правоъгълна КС, съвпадаща с ръбовете на куба, n_1, n_2, n_3 - три положителни цели числа.

Ур. (12) в k – пространството описва проста кубична решетка с обем на ЕК: $\Omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$.

Броят на собствените трептения с вълнови вектори с големини от 0 до k може да се намери като 1/8 от обема на сфера с център $k = 0$ и радиус $\vec{k}$ (само 1/8 от сферата изпълнява усл. $n \geq 0$) се раздели на обема на ЕК - Ω_0 (всяка ЕК има само 1 собствено трептене):

(13) $$z = \frac{(1/8).\frac{4}{3}\pi.k^3}{\Omega_0} = \frac{1}{6}.\frac{L^3}{\pi^2}.k^3$$

(14) $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon}.\nu$$

(15) $$z = \frac{4}{3}\pi L^3 \frac{\nu^3}{\upsilon^3}$$, υ - средна скорост на акустичните вълни.

(16) $$q(\nu) = \frac{dz}{d\nu} = \frac{4\pi L^3}{\upsilon^3}\nu^2$$ - диференциален спектър на трептене на кристала.

Във всяко направление на кристала се разпространява една квазинадлъжна и две квазинапречни вълни, т.е три мода с три различни скорости. Общият брой собствени трептения на кристала (за трите вълни) от всички модове е:

(17) $$z = \frac{4}{3}\pi L^3 \nu^3 \left(\frac{1}{\upsilon_e^3} + \frac{1}{\upsilon_{t1}^3} + \frac{1}{\upsilon_{t2}^3}\right)$$

където $\upsilon_e, \upsilon_{t1}, \upsilon_{t2}$ са съответно средните скорости на квазинадлъжната и двете квазинапречни вълни.Въвеждаме нова средна скорост на акустичните вълни в кристала:

(18) $$\frac{3}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_e^3} + \frac{1}{\upsilon_{t1}^3} + \frac{1}{\upsilon_{t2}^3}$$

Тогава от (17) получаваме:

(19) $$z = \frac{4\pi L^3 \nu^3}{\upsilon^3}$$

Диференциален спектър на собствените трептения:

(20) $$q(\nu) = \frac{dz}{d\nu} = \frac{12\pi L^3}{\upsilon^3}\nu^2$$

Заместваме $\nu = \frac{k}{2\pi}.\upsilon$ в (19) и диференцираме по *k*:

(21) $$q(k) = \frac{dz}{dk} = \frac{L^3}{2\pi^2}k^3$$

Съгласно модела на Дебай – КР се разглежда като еднородна еластична среда, в която честотата на трептенията, респективно техния вълнов вектор, не надминават определена максимална стойност, избрана така, че броят на независимите трептения *z* да е равен на общия брой степени на свобода 3*sN*.

За $k = k_{\max}$ и $\nu = \nu_{\max}$, $z_{\max} = 3sN$ - максимален брой трептения

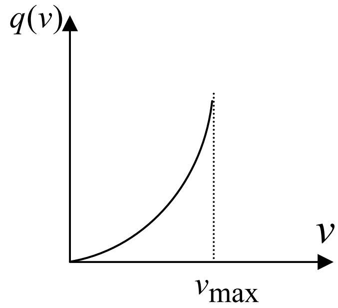
(22) $$z_{\max} = \frac{4\pi L^3 \nu_{\max}^3}{\upsilon^3} \overset{\nu/\upsilon = k/2\pi}{=} \frac{L^3}{2\pi^2}k_{\max}^3 = 3sN$$

(23) $$\frac{L^3}{\upsilon^3} = \frac{3sN}{4\pi\nu_{\max}^3}$$

Заместваме в (20):

(24) $$q(\nu) = 12\pi\frac{3sN}{4\pi\nu_{\max}^3}\nu^2 = \frac{9sN\nu^2}{\nu_{\max}^3}$$

Дебаевският диференциален спектър на собствените трептения на кристалната решетка графически е показан на фиг.:



Дебаевският диференциален спектър е диференциален фононен спектър:

$$dn = \bar{n} q(\omega) d\omega$$

dn - брой фонони с честоти между $\omega \div \omega + d\omega$,
$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kt - 1}}$ - среден брой фонони с енергия $\hbar\omega$,
$q(\omega)$ - диференциален спектър на собствените трептения.

В някой случаи спектърът на собствените трептения на кристала може да се пренебрегне и да се смята, че всички трептения имат една и съща честота – модел на Айнщайн: Кристалът се разглежда като $3sN$ независими осцилатора, трептящи с една честота. Това е най-прост модел на кристалните трептения – напр. в теорията на оптичните трептения на КР.