15. РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА АКУСТИЧНИ ВЪЛНИ И ЕЛЕКТРОМАГНИТНИ ВЪЛНИ В КРИСТАЛИ

1. Разпространение на електромагнитни вълни (ЕМВ) в неограничени диелектрици

Разглеждаме уравненията на Максуел за непроводяща среда: $j = 0$, $\rho = 0$ - (идеален диелектрик), прозрачен кристал:

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \qquad div\vec{D} = \rho = 0$$
$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad div\vec{B} = 0 \tag{1}$$

1.1. **Изотропна среда**

$$\vec{D} = \varepsilon_0.\varepsilon.\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0.\mu.\vec{H} \tag{2}$$

$\vec{E}, \vec{H}$ – интензитет на електричното поле и магнитното поле,
$\vec{D}, \vec{B}$ – електрична и магнитна индукция,
ε_0, μ_0 – диелектрична и магнитна проницаемост на вакуум,
ε, μ – относителна диелектрична и магнитна проницаемост.

От (1) и (2) получаваме:

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon_0.\varepsilon.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad div\vec{D} = 0$$
$$rot\,\vec{E} = -\mu_0.\mu.\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{H} = \varepsilon_0.\varepsilon.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ rot\,rot\,\vec{E} = -\mu_0.\mu.rot\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$grad\,div\vec{E} - \nabla^2 E = -\mu_0.\mu.\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 E = -\mu_0.\mu.\varepsilon_0.\varepsilon.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 E - \mu_0.\mu.\varepsilon_0.\varepsilon.\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Така получаваме вълновите уравнения за $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\left\| \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0.\mu_0.\varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_0.\mu_0.\varepsilon.\mu.\dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Решението е плоска ЕМ вълна: описва трептене на вектори $\vec{E}$ и $\vec{H}$, което се разпространява в средата, под формата на ЕМ вълна:

$$\left\| \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega.t - \vec{k}.\vec{r})} \\ \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{-i(\omega.t - \vec{k}.\vec{r})} \end{array} \right.$$

ω – кръгова честота;
$\vec{k}$ – вълнов вектор, перпендикулярен към равнината на вълновия фронт, по посока на разпространение на вълната $\vec{n}$.

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{\vartheta_\phi}\vec{n} = \frac{\omega}{c}n\vec{n}$$

ϑ_ϕ – фазова скорост; λ – дължина на вълната; $n = \dfrac{c}{\vartheta_\phi}$ – показател на пречупване.

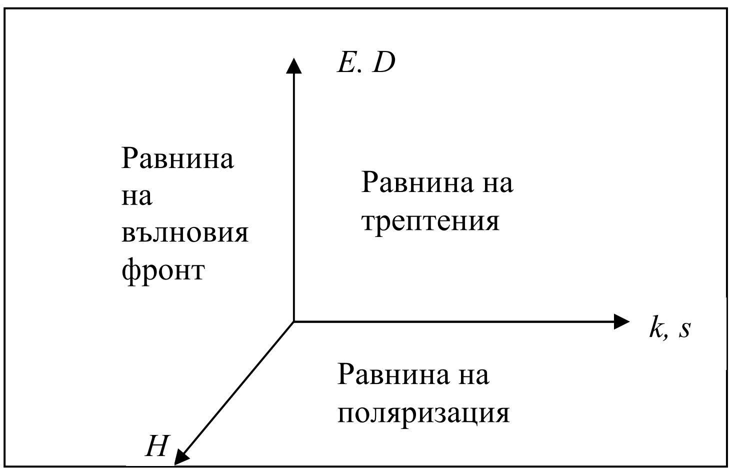
ϑ_ϕ – фазова скорост – скоростта на разпространение на трептенията в пространството,

$\vartheta_{гр}$ – групова скорост – скоростта на разпространение на енергията в средата.

$\vartheta_\phi \equiv \vartheta_{гр}$ - за монохроматична светлинна вълна (т.е. когато дисперсията на светлината в средата е малка).

В хомогенен диелектрик се разпространява една плоска ЕМВ. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ трептят перпендикулярно на $\vec{k}$, липсва надлъжна компонента – ТЕМ вълни.

$$\vec{E} \parallel \vec{D}, \vec{E} \perp \vec{k}, \vec{D} \perp \vec{k}, \vec{H} \perp \vec{k}$$

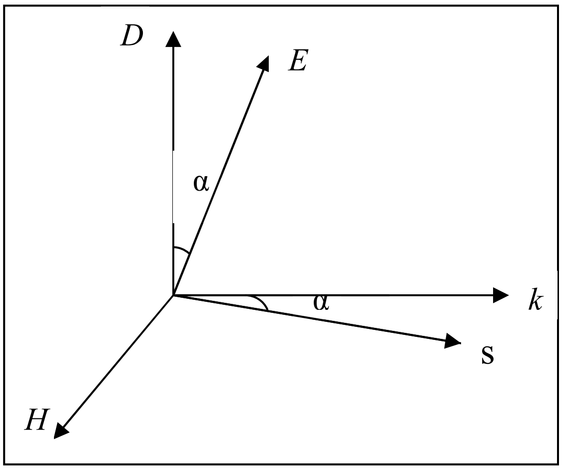


1.2. **Анизотропна среда**

В анизотропен (нехомогенен) диелектрик – кристали, се разпространяват 2 линейно поляризирани ЕМВ във взаимноперпендикулярни направления - обикновена и необикновена. ЕМВ са напречни. Липсва надлъжна компонента - ТЕМ вълни.

$$D_i = \varepsilon_0 . \varepsilon_{ij} . E_j$$

$$\angle(\vec{E}, \vec{D}) = \alpha,\ \vec{D} \perp \vec{k}, \vec{H} \perp \vec{k}, \vec{H} \perp \vec{D},\ \vec{H} \perp \vec{E}, \vec{E} \perp \vec{s}$$



Решението на вълновите уравнения (3) води до намиране на оптическата индикатриса. Решението има 2 корена, отговарящи на 2 скорости $\vartheta_ф$ на вълната в кристала или на 2 вълни, поляризирани в 2 взаимно перпендикулярни посоки – наблюдава се така нареченото двойно лъчепречупване. От времето на Хюйгенс ("Трактат за светлината", 1690г.) двете вълни се наричат обикновена и необикновена вълна.

$\vec{B} \parallel \vec{H}$	кристалите не са магнитни (магнитно изотропни)	
$\vec{E} \parallel \vec{D}$	изотропни	оптично, което се определя единствено от диелектричната проницаемост ε_{ij}
$\vec{E}$ *не* $\parallel \vec{D}$	анизотропни	

2. **Еластични (акустични) вълни (звукови или ултразвукови) в неограничена среда**

Ако се деформира краен обем от безкрайна еластична среда, то деформацията се разпространява в средата под формата на плоска еластична вълна.

В непрекъсната среда е възможно разпространението на еластична вълна с произволно висока чесота. Поради прекъснатия строеж на кристала, съществува минимална дължина $\lambda_{\min}$ и съответно $v_{\max}$ (Дебаева честота).

За реална еластична вълна с $\lambda \approx \lambda_{\min} = 2a$ - прекъснатият строеж играе съществена роля. За дължини $\lambda >> \lambda_{\min}$ може да се пренебрегне прекъснатият строеж и кристалът се разглежда като непрекъсната анизотропна еластична среда.

Уравнението на движението се намира от уравнението на Нютон:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i$$ – най-общи вид за единичен елементарен обем

f_i – плътност на силата, действаща на единичен обем; ρ - плътност на средата (= масата на единичен обем);
u_i – отместването от равновесното положение; T_{ik} – механично напрежение.

Разглеждаме безкрайно малък, елементарен обем dv с повърхност dS от кристала, върху който действа сила:

$$dF_i = T_{ik}.dS_k$$

Търсим решение от вида:

$u_i = \hat{u}_i.e^{-i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}$– плоска монохроматична вълна.

Заместваме в уравнението на движението на елементарен обем и получаваме уравненията на Кристофел:

$$\left(\Lambda_{im} - \vartheta^2 \delta_{ik}\right).\hat{u}_m = 0, \qquad (4)$$

където $\Lambda_{im} = \dfrac{c_{iklm}}{\rho} n_k n_l$ – тензор на Кристофел, симетричен тензор от II ранг,
$\hat{u}_m$– амплитуда на вълната на преместване; c_{iklm}– адиабатни еластични константи на кристала; ρ – плътност на средата, $\vartheta = \dfrac{\omega}{k} = \nu.\lambda$ - скорост на вълната.

Системата уравнения (4) е основна в теорията на еластичните вълни в кристали и има решения за $\hat{u}_m$ различни от нула само за детерминанти пред $\hat{u}_m$ равни на нула :

$$\left|\left(\Lambda_{im} - \vartheta^2 \delta_{ik}\right)\right| = 0 \qquad (5)$$

За всяко направление в кристала $\vec{n}_k$, уравнението (5) има 3 положителни корена за скоростта ϑ, т.е. решенията съответстват на 3 взаимно перпендикулярно поляризирани еластични вълни, разпространяващи се в направление $\vec{n}\left(\vec{k}\right)$:

1 квазинадлъжна - ∠(вектор на поляризация, $\vec{k}$) е най-малък,
2 квазинапречни вълни.

Ако $\vec{E} \parallel \vec{k}$ – 1 надлъжна и 2 напречни вълни.
В случай $\vec{k}$ || ос на симетрия (C_n) – чисти модове.

Ако C_n = 4, 6 двете напречни вълни се разпространяват с приблизително еднакви скорости. Такава ос се нарича **акустична ос**.

$$\vartheta_l, \vartheta_{t_1} = \vartheta_{t_2}$$

Фактът, че в кристала се разпространяват само поляризирани механични (акустични) вълни, сближава кристалоакустиката и кристалооптиката. В дадено направление обаче се разпространяват 3 поляризирани еластични вълни, а не 2, както при ЕМВ.

В кристали без център на симетрия, равнината на поляризация се върти също като при електромагнитните вълни. Това свойство на кристалите се нарича акустична активност.

3. Нормални вълни

Нов вид вълни, които се получават при разпространение в среда с крайни размери.

Към уравненията на Максуел и Кристофел се прилагат гранични условия и се описват:

3.1. ЕМВ

Свръхвисокочестотни вълни (СВЧ) в безкрайно дълъг вълновод (кух).

Според вида на напречното сечение биват:

- **Магнитна вълна – ТЕ** – правоъгълно сечение с подходящи размери

    t: ЕП има напречна компонента

    l: МП има надлъжна компонента

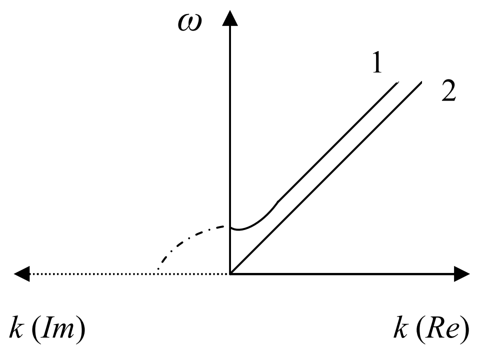
- **Електрична вълна – ТН**

    l: ЕП има надлъжна компонента

    t: МП има напречна компонента

Съществува дисперсия: $\vartheta = f(\omega, \lambda)$, $\vartheta = \omega / k$ фазовата скорост зависи от честотата.

1 – дисперсионни вълни $\vartheta_{\phi} = f(\omega)$; 2 – $\vartheta = \dfrac{\omega}{k} = const$



3.2. Акустични вълни

а) Изотропна среда

- ***Лембови вълни*** – $u(u_1, u_2)$ – движение на частиците в равнината X_1X_2.

- ***SH вълни*** – чисто напречни $u(u_3)$, $\vec{k}(k_1)$ векторът на преместване трепти само в направление X_3.

б) Анизотропна среда

- ***Повърхнинни вълни***: $\vec{k}$ || граничната повърхност (X_1 X_2); $u_i \to 0$, когато $X_3 \to -\infty$ (анизотропната среда е безкрайна)

(X_1 X_2) равнина отделяща анизотропната среда от околния вакуум $X_3 \perp (X_1 X_2)$

Най-простият вид са обобщени вълни на Рейли, които се разпространяват по свободната повърхност на една анизотропна среда. Различни от нула са две компоненти на собствения вектор на преместването: по посока на разпространението и по посока перпендикулярна на свободната повърхност.

- *Собствени трептения на крайни кристали*