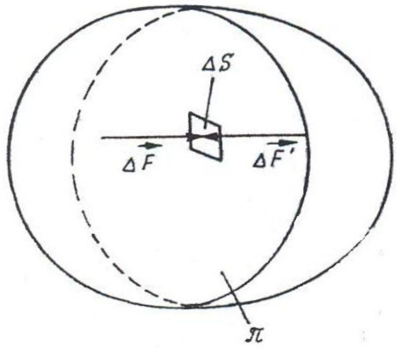
10. ТЕНЗОРИ НА МЕХАНИЧНОТО НАПРЕЖЕНИЕ И МЕХАНИЧНИТЕ ДЕФОРМАЦИИ.

1. Сили, действащи в деформирано тяло

Деформацията в тялото се създава от външните повърхнинни сили на натиск.

Пренебрегваме обемните сили, действащи на тялото – напр. силата на тежестта. Тогава остава да действа само повърхнинна сила на натиск, която действа върху всеки елемент от околната повърхност на тялото. Тя има произволна посока, но може да се разложи на сила на нормален натиск и сила на тангенциален натиск.

Еластичната деформация на тялото се създава от външната повърхнинна сила на натиск, която се уравновесява от силата на механично напрежение, което възниква в него.



Фиг. 1.

Ако разделим едно деформирано тяло на две части, за да запазим деформацията, на всеки елемент от разделящата го повърхност трябва да действат две равни и противоположно насочени сили $\Delta\vec{F}$ и $\Delta\vec{F}'$ – това са силите на натиск. $\vec{F}$ са различни за различни точки от повърхността ($\vec{n}$).

Отнесени към единица площ, те характеризират механичното напрежение в деформираното тяло.

Защо за получаване на деформация са необходими значителни сили и защо в деформираните тела възниква механично напрежение? Без въздействието на външни сили кристалът е в равновесие: атомите са на такива разстояния, че силата на привличане се уравновесява със силата на натиск. Под действие на външни сили – силата на натиск – равновесието се нарушава (тялото се деформира). В деформираното еластично тяло възниква сила на механично напрежение, която уравновесява действието на външната сила на натиск.

2. Тензори на механично напрежение

Силите на външен натиск $\Delta\vec{F}_l$ ще зависят от компонентите на нормалата $\vec{n}_m$ към площта ΔS. Отнесени към големината на площта на елемента ΔS_m, дават тензора на механично напрежение.

$$T_{lm} = \frac{\Delta F_l}{|\Delta S_m|}, \quad l, m = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Ако представим повърхнинния елемент чрез вектор $\Delta\vec{S}_m = \Delta S \, . \, \vec{n}_m$, то за трите компоненти на силата на външен натиск получаваме:

$$\Delta\vec{F}_l = T_{lm} \, . \, \Delta\vec{S}_m \, ; \qquad l,\ m = 1,\ 2,\ 3 \tag{2}$$

или

$$\Delta\vec{F}_l = T_{lm} \, . \vec{n}_m \, . \, \Delta S \tag{3}$$

или
$$\frac{\Delta\vec{F}_l}{\Delta S} = T_{lm}\,.\vec{n}_m \tag{4}$$

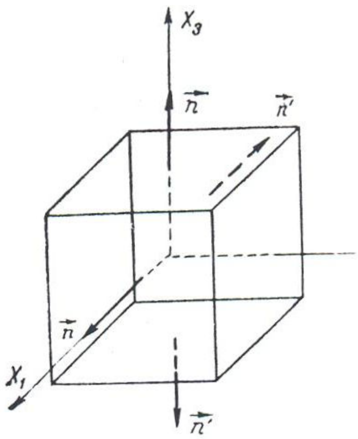
T_{lm} - тензор на механично напрежение от втори ранг.

2.1. Еднородна деформация: T_{lm} има еднакви стойности за всяка точка на деформираното тяло.

2.2. Нееднородна деформация: T_{lm} се изменя по определен начин от точка в точка, като образува вътре в деформираното тяло тензорно поле.

3. Симетричност на тензора на механично напрежение

Следва от условието, че резултантният момент на силите, действащи върху всеки мислено отделен обем от деформираното тяло трябва да е нула.



Фиг. 2. Единични вектори на нормалите към стените на единичен куб.

Сили, действащи върху стените успоредни на оста $X_2 \parallel \vec{n}_2$.

За стени перпендикулярни на X_3: $n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1$

От (2) следва, че за

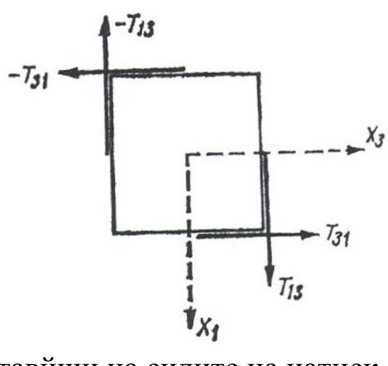
горна стена $\Delta F_1 = T_{13} \qquad \Delta F_2 = T_{23} \qquad \Delta F_3 = T_{33}$

долна стена $\Delta F_1 = -T_{13} \qquad \Delta F_2 = -T_{23} \qquad \Delta F_3 = -T_{33}$

За стени перпендикулярни на X_1: $n_1 = \pm 1, \quad n_2 = n_3 = 0$

за предна стена: $\Delta F_1 = T_{11} \qquad \Delta F_2 = T_{21} \qquad \Delta F_3 = T_{31}$

за задна стена: $\Delta F_1 = -T_{11} \qquad \Delta F_2 = -T_{21} \qquad \Delta F_3 = -T_{31}$



Фиг. 3. Тангенциалните съставящи на силите на натиск, действащи върху стените на единичен куб, успоредени на оста X_2.

Изразени са само тангенциалните сили на натиск. За да бъде кубът в равновесие, пълният момент на силите, които създават въртене около коя да е негова ос трябва да е нула.

За въртене около ос X_2, това условие дава:

$$T_{13} - T_{31} = 0$$

или

$$T_{13} = T_{31}$$

Аналогично се показва, че:

$$T_{lm} = T_{ml} \quad (5)$$

Тензорът на напрежение е симетричен и броят на компонентите му намалява от 9 на 6.

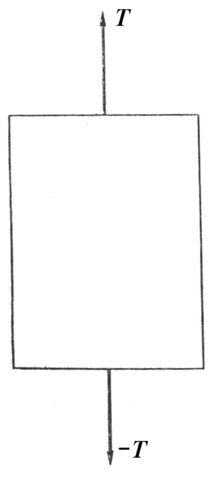
4. Частни случаи на тензор на напрежение

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}$$

Тензорът е приведен към главните си оси и само диагоналните компоненти са различни от нула.

Когато единичните вектори $\vec{e}_i$ на трите координатни оси имат посоката на главните оси (направленията, по които T_{ij} има екстремални стойности) на тензора на механично напрежение, той добива диагонален вид. т.е. в такава координатна система (КС) в матрицата T_{ij} остават различни от нула само диагоналните елементи.

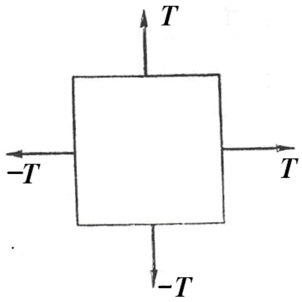
а) Линейно механичното напрежение: $\begin{pmatrix} \pm T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Фиг.4. Напрежение на едноосно разтягане.

Механичното напрежение е линейно или едноосно. Създава се под действието на едноосно разтягане (знак +) или едноосно свиване (знак -) по направление на тази ос (X_1).

б) Плоско механичното напрежение: $\begin{pmatrix} \pm T & 0 & 0 \\ 0 & \pm T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Фиг. 5. Напрежение на двуосно разтягане.

Механичното напрежение се нарича плоско или двуосно. Получава се от двуосно разтягане (знак +) или свиване (знак -) на тялото.

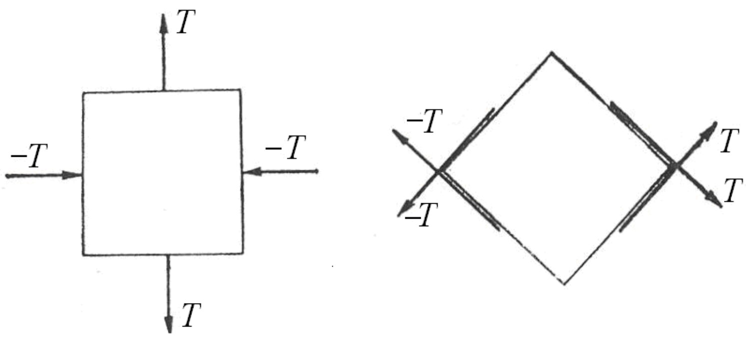
в) Обемно механичното напрежение: $\begin{pmatrix} \pm T & 0 & 0 \\ 0 & \pm T & 0 \\ 0 & 0 & \pm T \end{pmatrix}$

Механичното напрежение се нарича обемно. Всестранно разтягане (знак +) или свиване (знак -). Например тяло поставено в течност, в която е създадено налягане – за всестранно свиване.

г) Напрежение на двойно хлъзгане: $\begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Преобразуваме тензора спрямо оси X_1' и X_2', завъртени спрямо главните оси на ъгъл 45º.

$$\begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

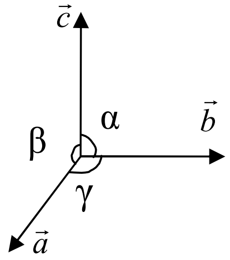


Фиг. 6. Напрежение на двойно хлъзгане.

Всички по-сложни случаи на механично напрежение могат да се представят като различни комбинации от тези прости случаи.

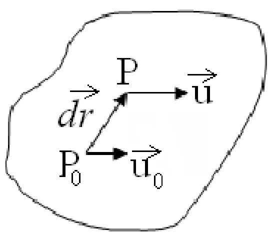
Симетрията на тензора на механично напрежение не се определя от свойствата на средата (кристала), а от външното въздействие върху нея. Такива тензори се наричат полеви.

5. Тензор на дисторзия



Локалната еластична деформация в кристала може да се характеризира с 6 числа Δa, Δb, Δc, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, т.е. с изменението на тези величини, в следствие на деформацията.

Този начин е физически нагледен, но за неортогонална КС, математически сложен. Затова се използва друг начин.



Нека P_0 е точка от деформираното тяло. Разглеждаме малък обем V около P_0, такъв че за всяка т.P от обема да се пренебрегва $(\Delta r)^2$. При произволно преместване на точките от обема V, се използва преместване до всички точки с компоненти върху оси от правоъгълна КС:

- на т.P_0 до т.P_0' - $\vec{u}_0(u_{01}, u_{02}, u_{03})$ или $\vec{u}_{0i}$

- на т.P до т.P' - $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ или $\vec{u}_i$

Ако преместванията на различните точки в V се различават достатъчно малко помежду си, векторът $\vec{u}$ може да се представи чрез Тейлъров ред, ограничавайки се само с първите частни производни $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_{01} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3 \\
u_2 &= u_{02} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3 \\
u_3 &= u_{03} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}dx_3
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Във векторен вид:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + d\vec{u} = \vec{u}_0 + d\vec{r}.Grad\,\vec{u} \qquad (7)$$

$$\vec{u} - \vec{u}_0 = Grad\,\vec{u}\,.d\vec{r}\,, \quad \vec{r}(x_1, x_2, x_3) \equiv \vec{x}_{ij} \qquad (8)$$

$$\vec{u}_i - \vec{u}_{0i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\vec{x}_j\,, \quad i, j = 1,2,3$$

$\boxed{D_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ - тензор на преместването на точките на един елементарен обем или тензор на дисторзия, от II ранг.

D_{ij} свързва два вектора $(\vec{u} - \vec{u}_0)$ (разлика в преместванията на две точки P и P_0) и $d\vec{r}$ (разстоянието между т.P и т. P_0).

6. Тензор на въртене и деформация

Преместванията на точките от един елементарен обем (елемент) от тялото се дължи на:

a) постъпателно преместване на елемента, като цяло,
b) въртене на елемента, като цяло (R_{ij}),
c) деформация на елемента, при което се изменя формата и размерите му (S_{ij}).

В уравнение (8) фигурира разлика в преместванията $(u - u_0) \Rightarrow (a)$ се елиминира. Като всеки тензор от II ранг D_{ij} се представя, като сума от един антисиметричен (R_{ij}) и един симетричен (S_{ij}) тензори.

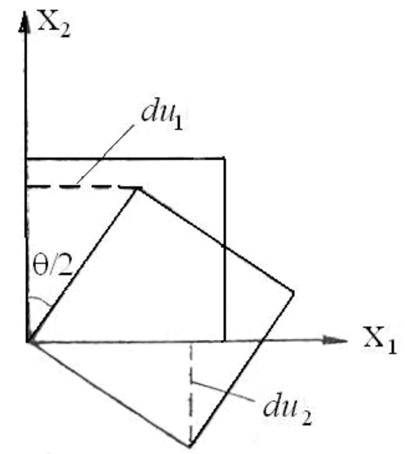
$$\left| \begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2}\left(D_{ij} - D_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(D_{ij} + D_{ji}\right) \\ D_{ij} &= R_{ij} + S_{ij} \end{aligned} \right., \qquad (9)$$

където

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\left(D_{ij} - D_{ji}\right) \quad \text{- антисиметричен тензор} \qquad (10)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(D_{ij} + D_{ji}\right) \quad \text{- симетричен тензор} \qquad (11)$$

- R_{ij} отговаря на въртене на елемента на тялото като цяло, т.е.: $du_1 = -du_2$.



Фиг. 7. Завъртане около оста X_3.

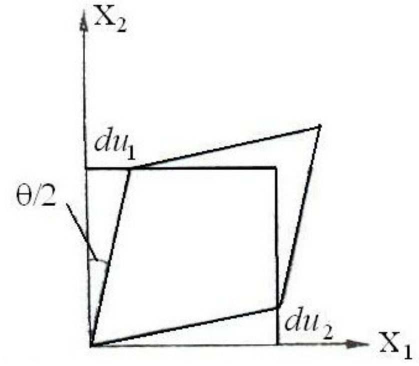
- S_{ij} описва механичната деформация на елемента от тялото.
  - **Еднородна деформация**
    S_{ij} са едни и същи за всички елементи (точки) от тялото
  - **Нееднородна деформация**
    S_{ij} са различни за различни точки. Трябва да се познава зависимостта на S_{ij} от координатите, т.е. полето на тензора S_{ij}.

7. Физически смисъл на компонентите на тензора на механична деформация

Компонентите S_{ij} на тензора на механична деформация при $i \neq j$, съответстват на двойно хлъзгане (по 2 координатни оси) – Фиг.8.

Например S_{12} - двойно хлъзгане по осите X_1 и X_2. В този случай:

$$du_1 = du_2, \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = S_{12} = S_{21}$$



Фиг. 8. Двойно хлъзгане в равнина X_1X_2.

Аналогично се показва, че диагоналните компоненти на S_{ij} отговарят на едноосно свиване или разтягане по една от трите координатни оси.

Всяка механичне деформация на едно еластично тяло може да се представи като 3 едноосни разтягания или свивания по 3 взаимно перпендикулярни оси и 3 двойни хлъзгания по същите оси.

Представяме тензора S_{ij}, приведен към главните си оси:

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}$$

Всяка механичне деформация може да се разглежда като 3 едноосни разтягания или свивания спрямо главните оси на тензора на деформация.

При тензора на механична деформация са възможни същите частни случая, както и при тензора на механично напрежение.