# ФРАУНХОФЕРОВА ДИФРАКЦИЯ ОТ БЕЗКРАЙНО ДЪЛЪГ ПРОЦЕП

Лектор: проф. д-р Т. Йовчева

## 1. Фраунхоферова дифракция от безкрайно дълъг процеп

Между 2 лещи е разположен екран с (различни) препятствия $E_1$. Във фокусите им са поставени съответно източник на светлина $S$ и екран за наблюдение на дифракционната картина $E_2$.

$$S \rightarrow L_1 \rightarrow E_1 \rightarrow L_1 \rightarrow E_2$$

Отворите имат различна форма и размери.

Светлината минава по различни пътища и дава различни осветени точки на $E_2$, които са образи на източника $S$.

# 1. Фраунхоферова дифракция от безкрайно дълъг процеп

## Решение на задачата за дифракция:

Да се намери разпределението на осветеността на екрана $E_2$, в зависимост от размера и формата на препятствието, предизвикващо дифракция.

$$S \to L_1 \to E_1 \to L_1 \to E_2$$

Препятствията са:

- безкрайно дълъг процеп
- правоъгълен отвор
- кръгъл отвор

Разглеждаме безкраен процеп с:

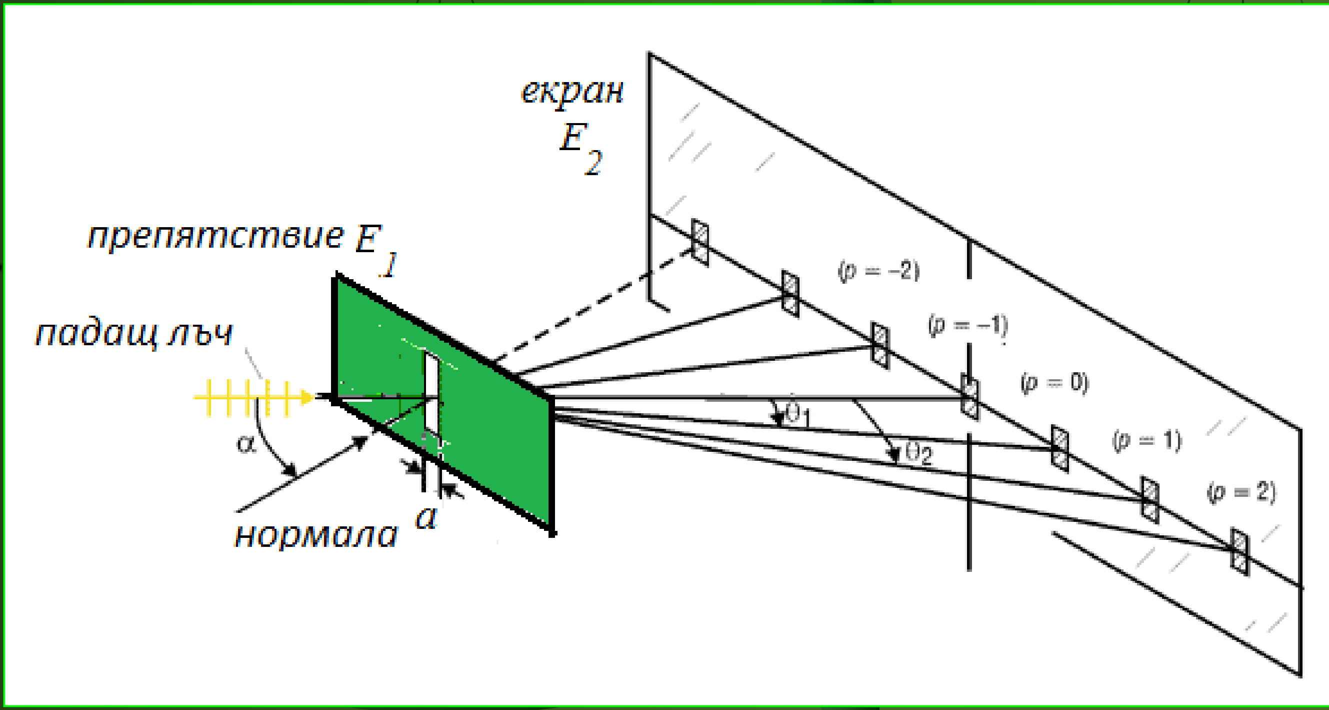
ширина $a$ (пр. $a \approx 0.01 \div 0.02\text{nm}$),

дължина $l \to \infty \, (l \cong 10\text{mm})$ .

Дифракционната картина е тъмни и светли ивици (минимуми и максимуми), редуващи се в наравление перпендикулярно на процепа, т.к. светлината дифрактира наляво и надясно от процепа.

Ще изследваме

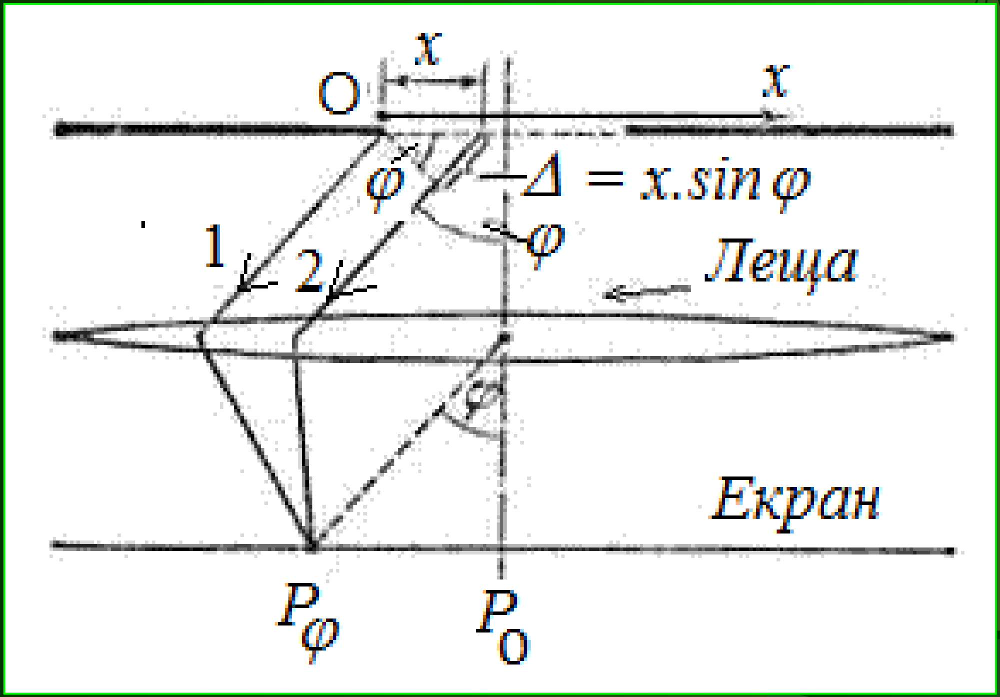
ДК в една равнина.



## Нормално пада плоска монохроматична вълна

Равнината на процепа е вълнова повърхност за падащата вълна, т.е. с еднакви фази за всяка точка.

Разделяме откритата част на тази вълнова повърхност на елементарни зони, успоредни на краищата на процепа с ширина dx.




Площите на тези зони са равни, следователно амплитудите им са равни.

Вторичните вълни, разпространяващи се от зоните в направление определено от ъгъл φ, ще се съберат от лещата в т. $P_\varphi$ от екрана.

(1) $$I = c.A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi\right)^2}$$

Означаваме:

$I_0 = c.A^2$ - интензитетът в средата на дифракционната картина

$\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = u = \frac{\delta_a}{2}, \delta_a = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_{0,a}$ - фазовата разлика между лъчите 1 и 3, от краищата на процепа *a*.

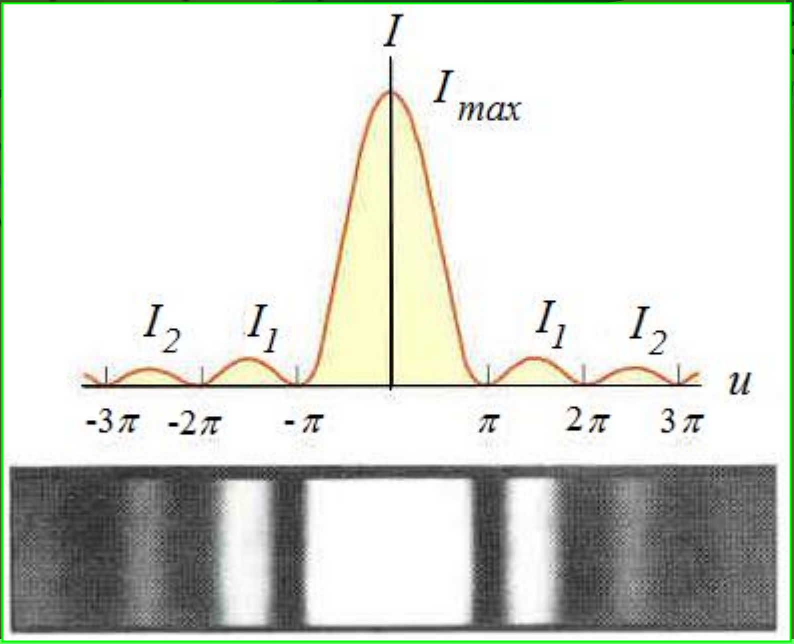
$$I = I_0 . \frac{\sin^2 u}{u^2} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

(2) $$\boxed{I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2}$$ - за произволна т. P

$$I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

## 2. Изследване на дифракционната картина

Ако местим т. Р по екрана ще намерим разпределението на $I$. Анализираме (1) или (2).




### а) Минимуми

$I = I_{\min} = 0$ ; ако

$\sin u = 0$ или $u = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$u = \dfrac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = m\pi$ ; $\sin\varphi = \dfrac{m\lambda}{a}$ условие за минимум.

Условието определя направлението към точки от екрана, в които интензитетът е минимален (амплитудата на трептенията е 0).

$$I = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

**б) Максимуми:** При определени промеждутъчни стойности на $\varphi$, интензитетът има максимуми с различна големина.

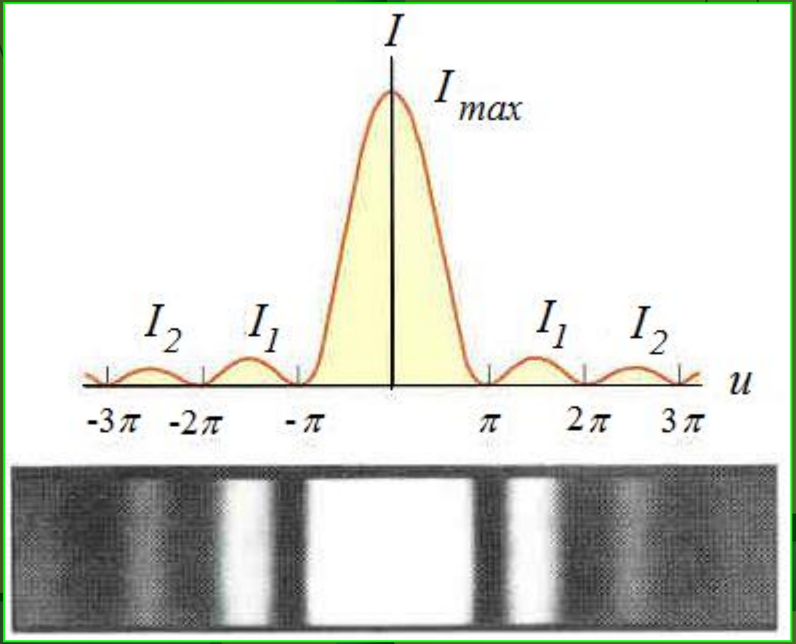
- Централен максимум (в центъра на екрана) - $I_{max}$

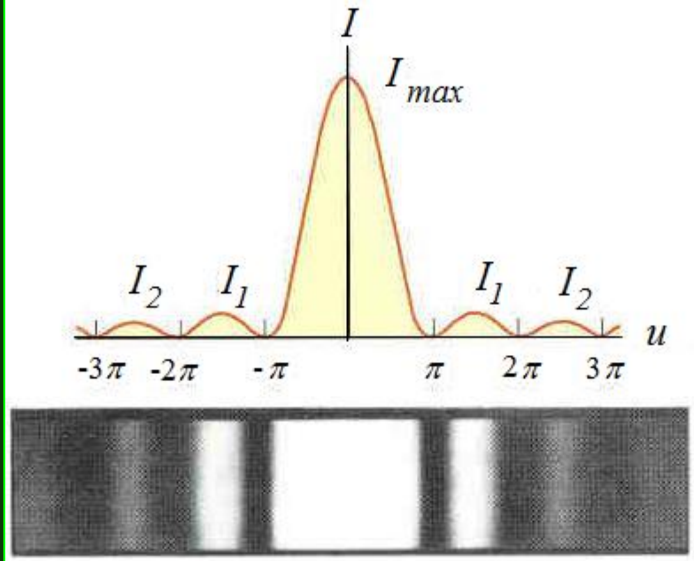
$I = I_0$ за $\varphi = 0$ в т.О

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = u$$

За т. О, $\varphi = 0 \Rightarrow$ $u = 0 \Rightarrow \sin u = 0$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} \Rightarrow \frac{0}{0} = 1$$






$$I = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \qquad (2)$$

- Следващи максимуми (за $\varphi \neq 0$ ) – $I_1, I_2$ ...

Първата производна на (2) се приравняват на 0, за да се намерят тези екстремуми.

Получава се трансцидентно уравнение:

$$\operatorname{tg} u = u$$

Не съвсем точно, но качествено решение за максимума се получава от условието: $\sin^2 u = 1$, т.е $u = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

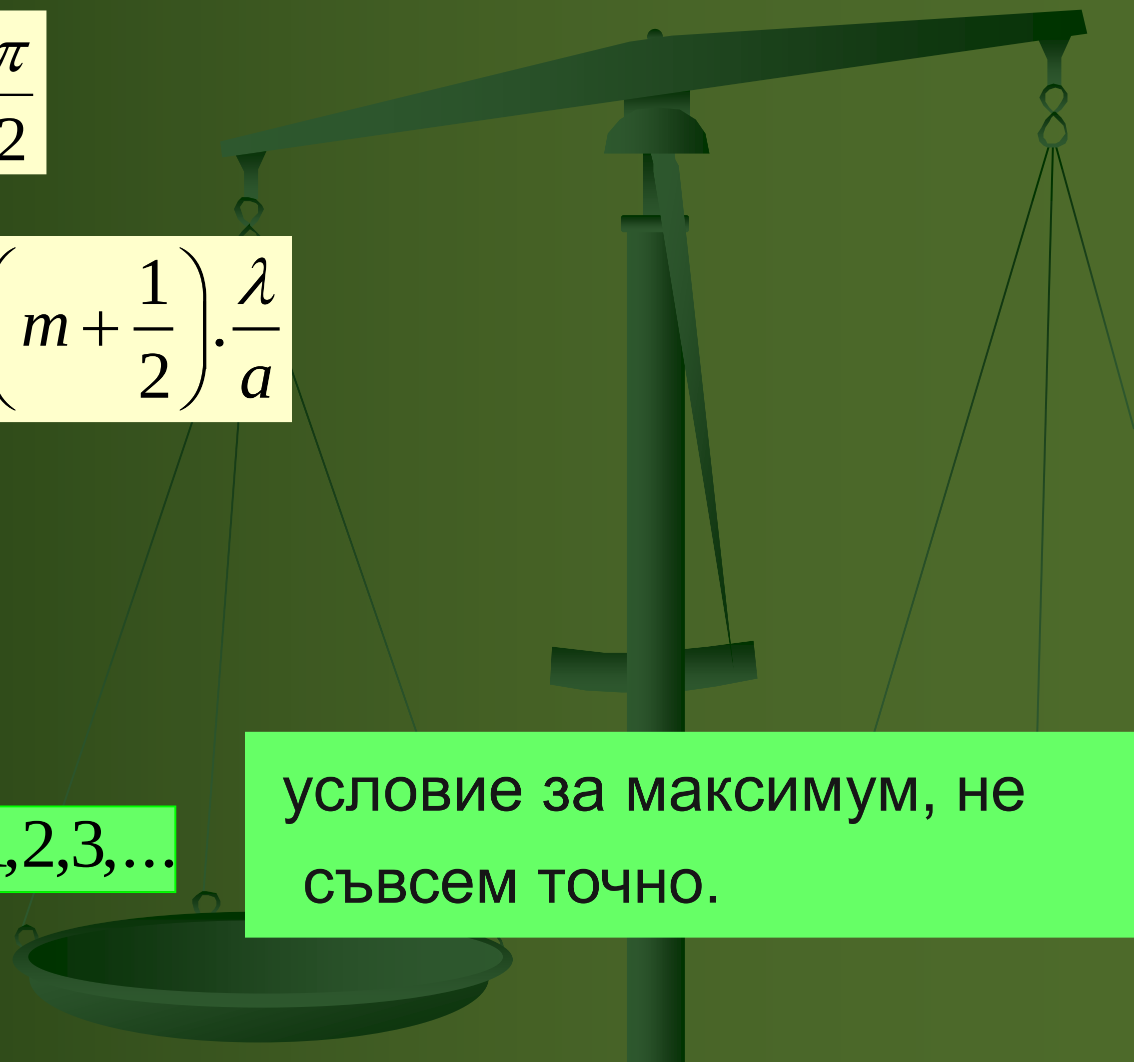
$$\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2a} = \left(m + \frac{1}{2}\right).\frac{\lambda}{a}$$

$$u = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}$$

$m = 1,2,3,\ldots$

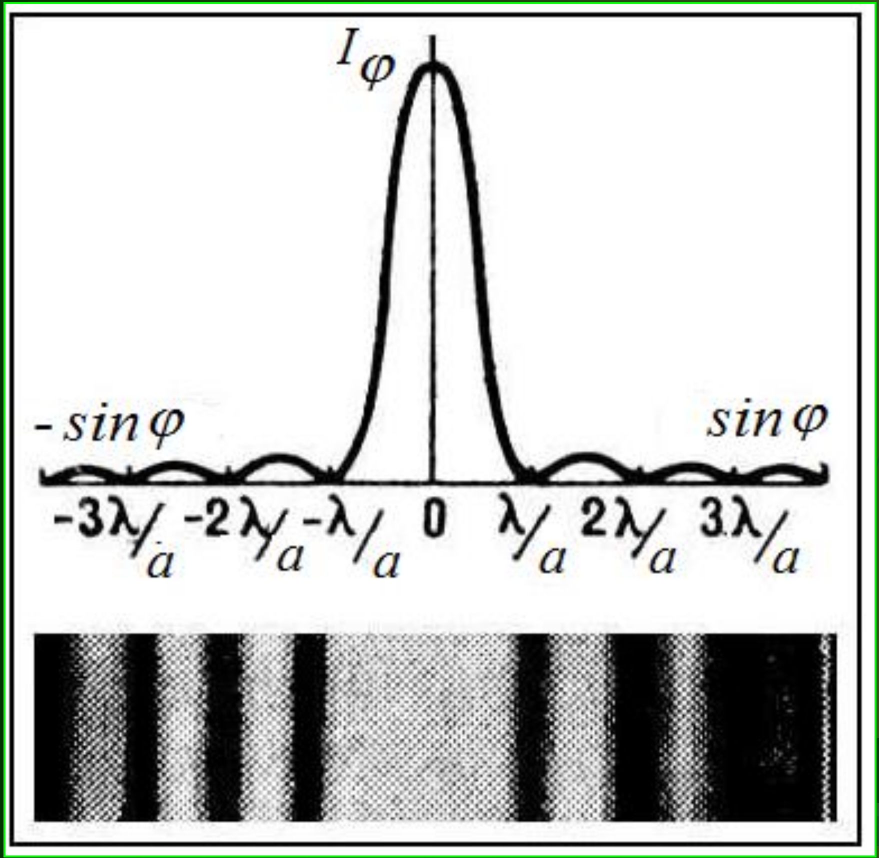
условие за максимум, не съвсем точно.

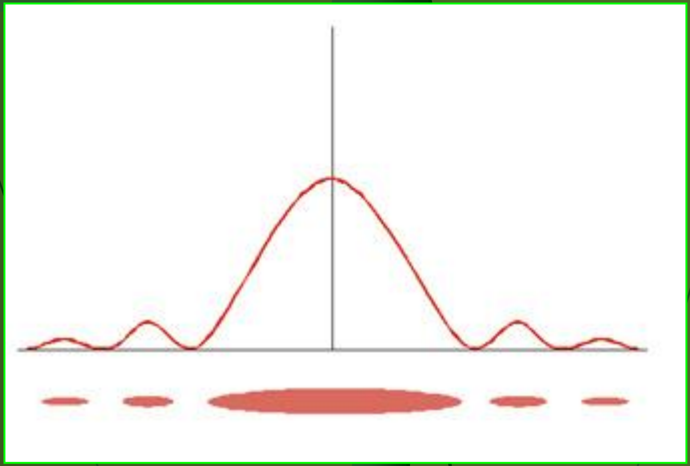


Стойността на нецентралните максимуми бързо намалява.

Отношенията на интензитетите на централния и следващите максимуми е както: $1:\dfrac{4}{9\pi^2}:\dfrac{4}{25\pi^2}:\dfrac{4}{49\pi^2}:\dfrac{4}{81\pi^2}....$ или

$1:0{,}045:0{,}016:0{,}008:0{,}005....$



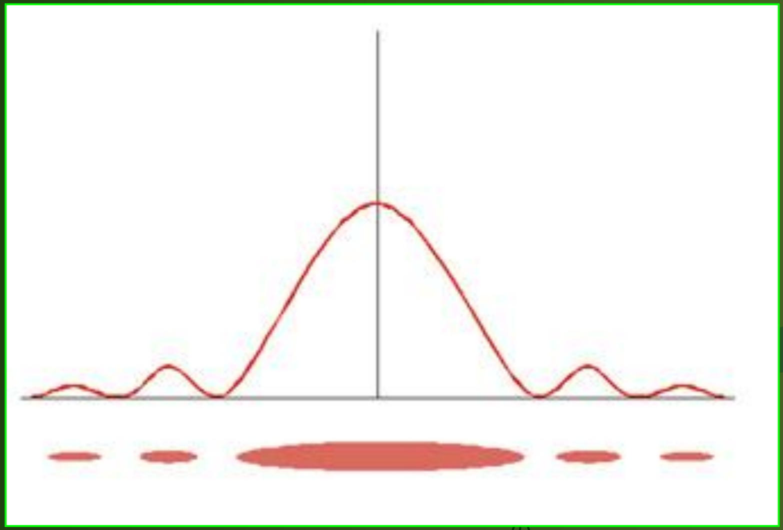
От ф-ла (1) и (2) $\Rightarrow$, че $I_\varphi = I_{-\varphi}$

$\Rightarrow$ Дифракционната картина е симетрична относно центъра на лещата.

в) Броят минимуми на интензитета се определя от отношението на ширината на процепа $a$ към дължината на вълната $\lambda$: $m \le \dfrac{a}{\lambda}$

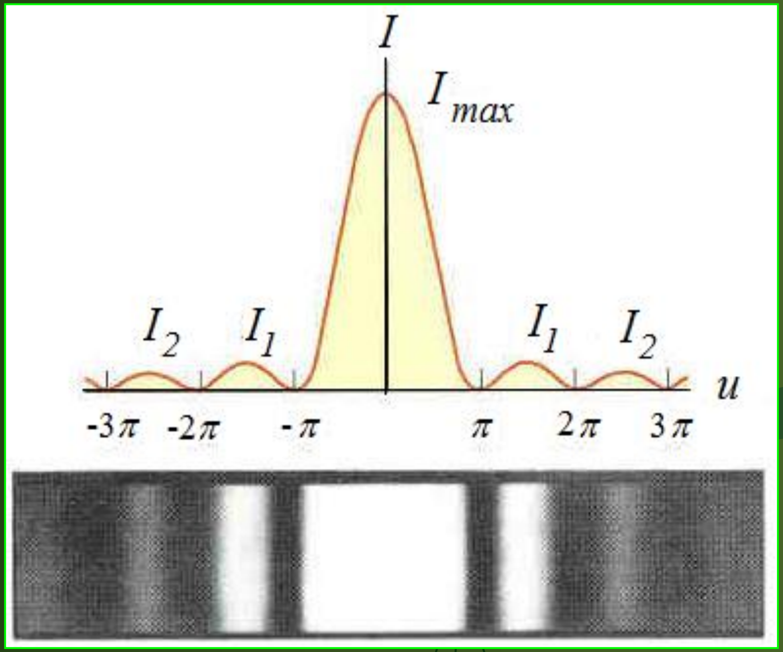
Усл. min: $\sin\varphi = m\dfrac{\lambda}{a}$ ; $\sin\varphi \le 1 \Rightarrow m\dfrac{\lambda}{a} \le 1$ или $m \le \dfrac{a}{\lambda}, a \ge \lambda$

За $a < \lambda$ - минимум не се наблюдава.



От условието за минимум: $\sin\varphi = m\dfrac{\lambda}{a} \Rightarrow$

Разстоянието на минимумите от центъра на дифракционната картина нараства с намаляване на $a$ $\Rightarrow$ с намаляване на $a$, централният максимум се разширява и захваща все по-голяма област от екрана.




г) Краищата на централния максимум се определят от

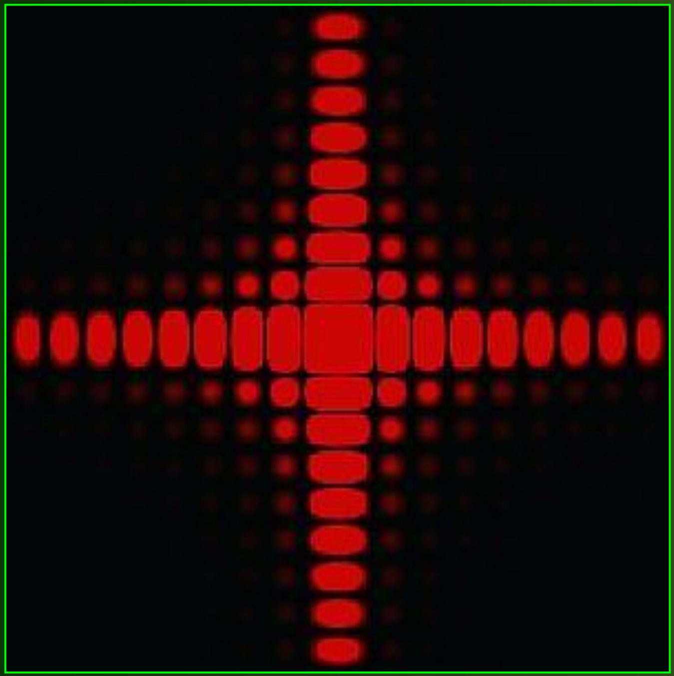
условието за минимум: $$\sin\varphi = \pm\frac{\lambda}{a}$$

За $$a >> \lambda,\ \sin\varphi \approx \varphi,\ \varphi = \frac{\lambda}{a}$$

Тогава ъгловата ширина на централния максимум е:

$$\delta\varphi = 2\varphi = 2\frac{\lambda}{a}$$

## 3. Фраунхоферова дифракция от правоъгълен отвор



Ако процепът има ограничена дължина, т.е $l$ не клони към безкрайност и представлява правоъгълник със страни $a$ и $l$, то очевидно и по посока на дължината на процепа ще се наблюдава ДК.

ДК ще е по-широка в това направление, което съответсва на по-късата страна на отвора. В случай на квадрат – симетрична ДК.

При решаване на задачата за ДК, вълновият фронт се разделя на малки правоъгълни елементи, като се прекарват две фамилии линии, успоредни на $l$ и успоредни на $a$.

Дифракцията се характеризира с два ъгъла $\psi$ и $\varphi$: отклонение от направления, определени от две равнини успоредни на $a$ и $l$.

Условие за минимум е:

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{a}$$

$$\sin\psi = n\frac{\lambda}{l}$$

$$m, n = 1, 2, 3\ldots$$

$$I_{\varphi,\psi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} . \frac{\sin^2 v}{v^2}, \quad v = \frac{\pi}{\lambda} l \sin\psi$$

# 4. Фраунхоферова дифракция от кръгъл отвор

По-трудно се правят разчети. Вълновият фронт се разделя чрез вектори с различна дължина. Стига се до беселови функции. Дифракционната картина е концентрични кръгове за максимуми и минимуми, с ъглов радиус на тъмните кръгове:

$$\sin\varphi_m = \frac{0.61+(m+1)/2}{R}.\lambda,\ m=1,2,3\ldots$$ , *R* – радиус на отвора

.

Колкото по-голям е радиусът, толкова по-малка ще е ДК.