

ПОЛЯРИЗАЦИЯ НА ДИЕЛЕКТРИЦИ БЕЗ ПРОВОДИМОСТ В ПОСТОЯННО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ

1. Поляризация на диелектрика

Според зонната теория, която разгледахме диелектриците са материали, в които ширината на забранената зона е по-голяма от 3 eV, а валентната зона е изцяло запълнена.

Диелектриците се делят на три вида:

- **Неполярни диелектрици** – изградени са от молекули, които не притежават диполен момент, т.е. центровете на положителните и отрицателните заряди съвпадат. Следователно, при отсъствие на външно електрично поле резултантният диполен момент на неполярния диелектрик е нула.

Пример: Молекулите на водорода (H₂), азота (N₂), кислорода (O₂), тетрахлорметана (CCl₄), въглеродния диоксид (CO₂), метана (CH₄) и др.

- **Полярни диелектрици** – молекулите им имат постоянен диполен момент, т.е. центровете на положителните и отрицателните заряди са отместени на постоянно разстояние. При отсъствие на външно електрично поле тези диполи са хаотично разположени, вследствие на взаимодействието между тях и топлинното им движение. Без външно електрично поле полярните диелектрици не притежават собствен диполен момент.

Пример: Молекулите на водата (H₂O), метиловия алкохол (CH₃OH), етиловия алкохол (C₂H₅OH) и др.

- **Йонни кристали** – това са кристални структури, изградени от положителни и отрицателни йони, които образуват две подрешетки. Без външно електрично поле йонните кристали не притежават собствен диполен момент.

Пример: Кристалите на натриевия хлорид (NaCl), калиевия хлорид (KCl), калциевия дихлорид (CaCl₂) и др.

При внасяне на диелектрик във външно електрично поле, той се поляризира, т.е. придобива диполен момент. Количествена характеристика е векторната величина **поляризация** – диполният момент на единица обем:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i. \quad (1)$$

Сумирането се извършва за всички диполи в обема ΔV . \vec{P} е векторът на поляризацията, а \vec{p}_i е диполният момент на i -тата молекула от обема ΔV . Уравнението може да се запише и така:

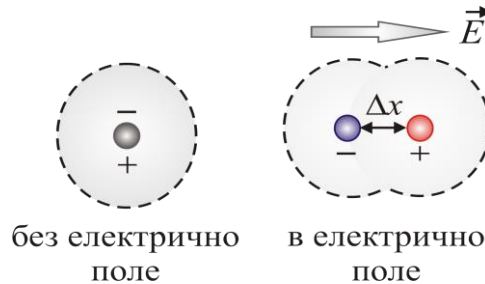
$$\vec{P} = n_0 \vec{p},$$

където n_0 е концентрацията на молекулите (брой молекули в единица обем), а \vec{p} е диполният момент на една молекула, който е еднакъв за всички молекули в единица обем.

Съществуват няколко основни вида поляризация.

а) индуцирана поляризация

Тази поляризация се нарича още електронна и е показана на фиг.1.



Фигура 1. Електронна поляризация.

Ако се постави неполярна молекула (атом) във външно електрично поле \vec{E} , нейният положителен ($+q$) и отрицателен ($-q$) заряд се отместват на разстояние Δx и се индуцира диполен момент $\vec{p} = q\Delta\vec{x}$. Зарядите $+q$ и $-q$ ще спрат движението си (при отместване Δx), когато електричната сила $\vec{F} = q\vec{E}$ се уравни от пораждащата се сила на еластична деформация $\vec{F}' = k\Delta\vec{x}$, при което ще се индуцира диполен момент. Математически това се записва по следния начин:

$$\vec{F} = \vec{F}' \Rightarrow q\vec{E} = k\Delta\vec{x} \rightarrow \Delta\vec{x} = \frac{q\vec{E}}{k}$$

$$\vec{p} = q\Delta\vec{x} \Rightarrow \vec{p} = \frac{q^2}{k}\vec{E}.$$

Индуцираният диполен момент може да се запише и така:

$$\vec{p} = \epsilon_0\alpha\vec{E},$$

където α е поляризуемост на молекулата (атома).

Електричното поле има двойна роля – отмества центровете на положителните и отрицателните заряди в атома или молекулата и ориентира създадения дипол.

Ако n_0 е броят на молекулите в единица обем, т.е. концентрацията на молекулите, то поляризацията на неполярния диелектрик е:

$$\vec{P} = n_0\vec{p} = n_0\epsilon_0\alpha\vec{E}.$$

Като се въведе безразмерна величина диелектрична възприемчивост - ϵ , която характеризира диелектрика и не зависи от интензитета на електричното поле \vec{E} , чрез равенството:

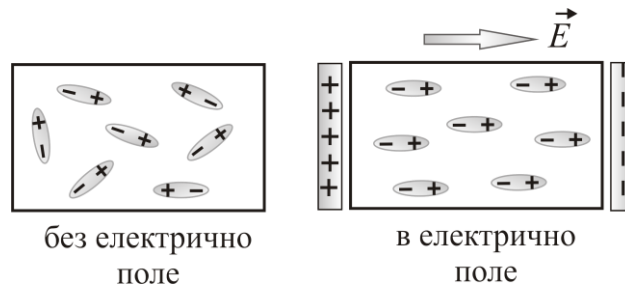
$$\epsilon = n_0\alpha,$$

за поляризацията на неполярния диелектрик може да се запише:

$$\vec{P} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}.$$

б) ориентационна поляризация

Тази поляризация се нарича още диполна и е показана на фиг.2.



Фигура 2. Диполна поляризация.

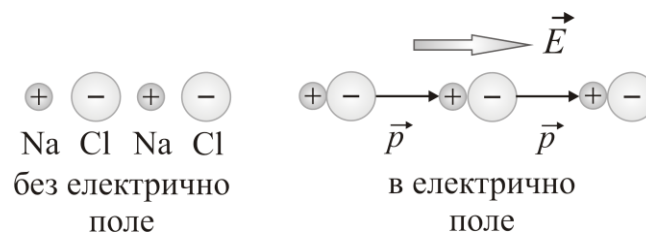
Ако полярен диелектрик се постави във външно електрично поле \vec{E} , диполните моменти на молекулите ще се ориентират по посока на интензитета \vec{E} , а топлинното им взаимодействие ще има дезориентиращ ефект. В резултат на това ще се получи една частична ориентация на диполите и поляризацията на полярния диелектрик ще се запише така:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}.$$

Диелектричната възприемчивост при ориентационната поляризация зависи обратно пропорционално от температурата и ϵ :

$$\alpha = \frac{n_0 P^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

в) йонна поляризация



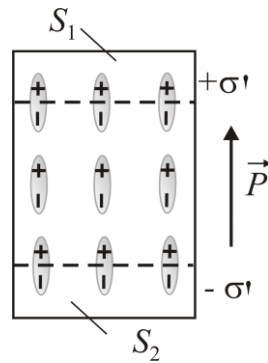
Фигура 3. Йонна поляризация.

Наблюдава се в диелектрици с кристална структура (напр. NaCl), изградени от две подрешетки на положителните и отрицателните йони, които във външно електрично поле \vec{E} се отместват една спрямо друга. Тогава всяка молекула на кристала получава диполен момент \vec{p} , а векторът на поляризация е:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}.$$

Повърхностните и обемните електрични заряди, които се появяват при поляризацията на диелектриците се наричат свързани заряди. Ще бъдат разглеждани електростатичните промени при поляризацията на диелектрик.

На фиг. 4 е показан поляризиран диелектрик. Вследствие на поляризацията \vec{P} върху повърхностите S_1 и S_2 на двете срещуположни страни на диелектрика се натрупват електрични заряди $-q'$ и $+q'$ с повърхностна плътност на заряда съответно $-\sigma'$ и $+\sigma'$. Тези заряди са свързани с молекулите, на които принадлежат и са разпределени по повърхностите S_1 и S_2 , без да могат да променят положението си по S_1 и S_2 . Затова зарядът q' се нарича **свързан заряд**.



Фигура 4. Свързани заряди.

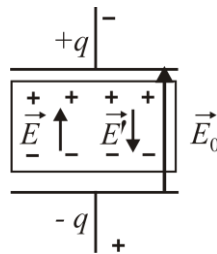
Повърхностните и обемните електрични заряди, които се появяват при поляризацията на диелектриците се наричат *свързани заряди*. Вътре в обема на диелектрика положителните и отрицателните свързани заряди взаимно се компенсират и затова обемната плътност на заряда е равна на нула. Поляризацията на диелектрика води до появяването на свързан повърхностен заряд, който създава собствено електрично поле E' , такова каквото създават и свободните електрични заряди.

2. Средно и локално електрично поле в диелектрици без проводимост

➤ Средно електрично поле

При описването на поляризацията на диелектрици без проводимост се използва обикновено интензитетът на електрично поле, описващ средно макроскопично поле.

Да разгледаме полетата в диелектрик, поставен между плочите на кондензатор, представено на фиг. 5.



Фигура 5. Диелектрик между плочите на кондензатор.

Външното електрично поле \vec{E}_0 , което създава поляризацията \vec{P} на диелектрика е поляризиращо поле.

Собственото електрично поле E' , създадено от свързаните заряди на поляризирания диелектрик е деполаризиращо поле, тъй като е обратно насочено на външното поле \vec{E}_0 .

Интензитетът на пълното електрично поле в диелектрика е векторна сума от интензитетите на двете полета:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' .$$

Големината на интензитета на пълното електрично поле е:

$$E = E_0 - E' \tag{2}$$

При непрекъснато разпределение на заряда q' по повърхността на диелектрика с повърхностна плътност σ' , интензитетът на собственото поле е: $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. Замества се в уравнение (2) и за интензитета на пълното електрично поле в диелектрика се получава:

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Поляризацията на диелектрика може да се измери с повърхностната плътност на свързаните заряди. Повърхностната плътност на заряда на диелектрика е равна на нормалната съставляваща на вектора на поляризация, като за плоско паралелен кондензатор $\sigma' = P_n \equiv P = \epsilon_0 \kappa E$. Чрез заместване в ур. (3) се получава:

$$E = E_0 - \kappa E$$

или

$$\epsilon E = E_0,$$

където с ϵ е означена относителната диелектрична проницаемост и $1 + \kappa = \epsilon$.

Следователно, интензитетът на полето в диелектрика намалява ϵ пъти спрямо това във вакуум: $E = \frac{E_0}{\epsilon}$.

Векторът на електричната индукция D може да се запише така

$$D = \epsilon_0 \cdot E + P$$

За изотропни диелектрици векторите на електрична индукция и на интензитета на електричното поле са насочени в едно направление $\vec{D} \parallel \vec{E}$ и може да се запише:

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot E,$$

или

$$D = \epsilon_0 \cdot (1 + \kappa) \cdot E.$$

От последните две уравнения следва, че:

$$P = \epsilon_0 \cdot (\epsilon - 1) \cdot E, \quad (4)$$

Следователно векторът на поляризация е свързан линейно с интензитета на средното електрично поле.

➤ Локално електрично поле

Полето, действащо на отделната молекула, може съществено да се различава от средното макроскопично поле E . Точното пресмятане на взаимодействието на даден дипол с всички останали диполи е много сложна задача. За опростяване на пресмятанята Лоренц е предложил разглеждането на диелектрика около даден дипол като непрекъсната среда от определено разстояние нататък, а дискретната му структура да се отчита само за най-близко разположените диполи. Тогава интензитетът на локалното поле може да се представи като геометрична сума:

$$E_n = E + E_1 + E_2. \quad (5)$$

Физическият смисъл на E_1 и E_2 ще изясним, като разгледаме мислена сфера, около молекулата с радиус, значително по-голям от този на молекулата. Извън сферата диелектриктът се разглежда като еднороден.

Полето E_1 е сумарното поле, създадено в мястото на молекулата от индуцираните от диелектрика заряди върху сферата с радиус R . Това поле се изчислява, като се използва теоремата на Остроградски - Гаус:

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \oint_{S'} \frac{\sigma' dS'}{\epsilon_0}.$$

Сферичната повърхност с радиус R , имаща индуциран свързан заряд с повърхностна плътност σ' , се изразява в сферични координати:

$$dS' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

От интегрирането по S се получава $E_1 4\pi R^2$.

Интегрирането по S' се заменя с интегриране по ъгъл φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π .

Приравняват се двата интеграла и се получава:

$$E_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}.$$

Полето E_2 е сумарното поле, създадено в мястото на молекулата от другите молекули, разположени в разглежданата сфера. Може да се покаже, че в много случаи поради сферичната симетрия напрежението E_2 е нула. Това се отнася за неполярните диелектрици в газообразно и течно състояние и кристалите с кубична симетрия.

Заместват се полетата в E_1 и E_2 в ур. 5 и се получава така нареченото уравнение на Лоренц:

$$E_n = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (6)$$

От него следва, че локалното поле, което действа върху даден атом или молекула на диелектричен кристал, е сума от приложеното макроскопично поле и полето, което се дължи на поляризацията на останалите атоми на диелектрика.

В уравнение 6 се замества поляризацията от израз 4 и се получава друг израз на уравнението за локалното поле:

$$E_n = \frac{\epsilon + 2}{3} E. \quad (7)$$

От ур. 7 следва, че при $\epsilon \geq 1$ може да се приеме, че $E_n \approx E$, а при $\epsilon \gg 1$ може да се приеме, че $E_n > E$.

3. Уравнение на Клаузиус-Мосоти

Уравнението на Клаузиус-Мосоти изразява връзката между диелектричната проницаемост на диелектрика ϵ и поляризуемостта на неговите молекули α . В началото на темата разгледахме три основни вида поляризация. В общия случай поляризуемостта може да се запише като сума от електронната - α_e , диполната - α_d , йонната α_i и други поляризуемости:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_d + \alpha_i + \dots$$

- За неполярни диелектрици без проводимост може да се приеме, че $\alpha = \alpha_e$.
- За полярни диелектрици без проводимост може да се приеме, че $\alpha = \alpha_e + \alpha_d$.

Ако n е концентрацията на молекулите, участващи в поляризацията на диелектрика, α е поляризуемостта на молекулата, еднаква за всички, то поляризацията на диелектрика в локалното поле E_L е:

$$P = n\varepsilon_0\alpha E_L. \quad (8)$$

Заместваем в ур. 8 с израза 7 и получаваме:

$$P = n\varepsilon_0\alpha \frac{\varepsilon+2}{3} E. \quad (9)$$

Приравняваме ур. 4 и ур. 9 и получаваме уравнението на Клаузиус-Мосоти:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{n\alpha}{3}. \quad (10)$$

За смеси и композитни материали, съдържащи различни молекули с концентрация n_i и поляризуемост α_i съответно, ур. 10 се записва така:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \sum_i \frac{n_i\alpha_i}{3}. \quad (11)$$

Уравнението на Клаузиус-Мосоти свързва общата поляризуемост на молекулите α , която представлява една микроскопична величина с относителната диелектрична проницаемост на диелектрика, която е една лесно измерима макроскопична ε величина. Уравнението на Клаузиус-Мосоти е в добро съгласие с експерименталните резултати за неполярните диелектрици в газообразно и течно състояние и кристалите с кубична симетрия. То обаче е приблизително уравнение, защото предположението, че влиянието на близките молекули се уравновесява и полето E_2 е нула не винаги е в сила.

Друг вид на уравнението можем да получим, като умножим двете страни на ур. 10 с моларната маса на диелектрика M и разделим на обемната плътност на диелектрика ρ .

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \frac{M}{\rho} = \frac{n\alpha}{3} \frac{M}{\rho}. \quad (12)$$

От дясната страна на ур. 12 се получава израз, който дава числото на Авогадро или броя на молекулите в 1 mol вещество – $N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$:

$$\frac{nM}{\rho} = N. \quad (13)$$

Заместваем ур. 13 в ур. 12 и получаваме:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \frac{M}{\rho} = \frac{N\alpha}{3}.$$

Величината:

$$P_\mu = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} \frac{M}{\rho} = \frac{N\alpha}{3} \quad (14)$$

се нарича моларна поляризуемост и има смисъл на поляризуемост на един мол от веществото. От последното уравнение, което също се нарича уравнение на Клаузиус-Мосоти може да се пресметни лесно атомната или молекулната поляризуемост α .

Ако разглеждаме оптичния диапазон на електромагнитните вълни съгласно уравненията на Максвел можем да запишем връзката между диелектричната проницаемост ε и показателя на пречупване n :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

За повечето диелектрици относителната магнитна проницаемост μ е единица и:

$$n^2 = \varepsilon.$$

Заместваме последното равенство в ур. 14 и получаваме за оптичния диапазон от спектъра:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3M} \alpha \rho,$$

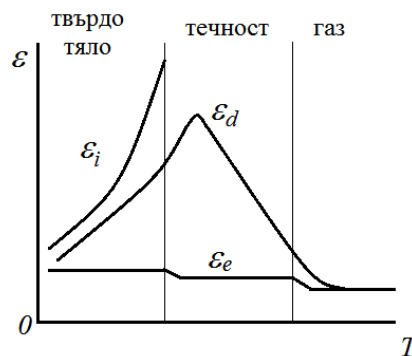
което се нарича уравнение на Лоренц-Лоренц.

От уравнението на Клаузиус-Мосоти може да се определи температурният коефициент на диелектричната проницаемост:

$$TK\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dT}.$$

За газове (азот, кислород и др.) е от порядъка на 10^{-6} deg^{-1} , за течности и твърди диелектрици (бензол, бензин, полиетелен, тефлон и др.) е от порядъка на 10^{-3} deg^{-1} .

На фиг. 6 е представена качествена графика на зависимостта $\varepsilon = f(T)$ за различни видове поляризации.



Фигура 6. Качествени зависимости $\varepsilon = f(T)$.

При йонната поляризация големината на диелектричната проницаемост ε_i нараства с увеличаване на температурата.

При диполната поляризация обикновено се наблюдава максимум на диелектричната проницаемост ε_d .

При електронната поляризация се наблюдава монотонно намаляване на диелектричната проникваемост ε_e с температурата.

4. Диполна поляризуемост

Диполна поляризация се наблюдава при полярните диелектрици, чиито молекули са диполи и се характеризират с диполен момент $p = ql$. Диполната поляризуемост α_d на диполните молекули в газа се определя от средния диполен момент на молекулите в направление на полето E , който се създава вследствие на ориентиращото действие на полето и дезориентиращото действие на топлинното движение:

$$\bar{p} = \frac{p^2 E}{3kT}.$$

Диполната поляризуемост на полярния газ е пропорционална на квадрата на диполния момент на молекулата p и обратно пропорционална на абсолютната температура T :

$$\alpha_d = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}.$$

Уравнението на Клаузиус-Мосоти за полярен газ се записва така:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha_e + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} \right).$$

Диполната поляризуемост на полярните течности се различава от тази на полярните газове поради наличие на „вътрешно триене“ при ориентацията на диполите в течностите. Редукционният фактор R , отразяващ това различие, се изразява чрез Ланжвенова функция на p , E и T и за водата $R = 0,2$.

Уравнението на Клаузиус-Мосоти за полярни течности се записва така:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha_e + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} R \right). \quad (14)$$

За определяне на големината на диполния момент p понякога се използват слаби разтвори на полярни диелектрици в неполярни разтворители. В силно разреждени разтвори при малка концентрация на полярния диелектрик в неполярния разтворител, молекулите на диелектрика се намират на големи разстояния една от друга и взаимодействието им е слабо. Затова може да се използва уравнението на Клаузиус-Мосоти за полярен газ. При това разтворителят има само електронна поляризуемост $\alpha_1 = \alpha_{e1}$, а полярният диелектрик има електронна и диполна поляризуемост $\alpha_2 = \alpha_{e2} + \alpha_{d2}$. Тогава уравнението на Клаузиус-Мосоти за слабия разтвор е:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n_1 \alpha_{e1}}{3} + \frac{n_2 \alpha_{e2}}{3} + \frac{n_2 p^2}{9\varepsilon_0 kT}.$$

Ако експериментално се определи ε и се знаят останалите величини, от последното уравнение може да се намери диполният момент p . От ур. 14 може да се определи редукционният фактор R , ако се знаят ε и n .

5. Поляризация на твърди йонни диелектрици

В повечето случаи твърдите неорганични диелектрици са с йонни връзки. В йонните диелектрици в електрично поле се наблюдава отместване на йони по направление на полето или в обратно направление, при което възниква йонна поляризация. В бинарните кристали има и положителни и отрицателни йони, които се отместват едновременно и създават диполи. Ако масата на положителните йони е M_1 , а на отрицателните – M_2 , то приведената маса M е:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}, \quad M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Собствената честота на трептене на диполите зависи от M :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}},$$

където k е коефициентът на еластичност:

$$k = \omega^2 M = \omega^2 \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \quad (15)$$

Диполният момент при отместване на йоните на разстояние Δx е:

$$p = q\Delta x = \frac{q^2 E}{k}. \quad (16)$$

Диполният момент на двойка електроние:

$$p = \varepsilon_0 \alpha_i E.$$

От тук:

$$\alpha_i = \frac{p}{\varepsilon_0 E}.$$

Заместваем p от ур. 16 и получаваме:

$$\alpha_i = \frac{q^2}{\varepsilon_0 k}.$$

Заместваем k от ур. 15 и получаваме:

$$\alpha_i = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}. \quad (16)$$

Умножаваме числителя и знаменателя на ур. 16 с квадрата на числото на Авогадро и заменяме $M_1 N = A_1$ и $M_2 N = A_2$, където A_1 и A_2 са атомните тегла на двата йона съответно:

$$\alpha_i = \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}.$$

Ако броят на двойката йони в единица обем на диелектрика означим с n , то съответният вектор на поляризация ще е:

$$P_i = n \varepsilon_0 \alpha_i E = n \varepsilon_0 \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} E.$$

Ако отчетем и електронната поляризация, която се наблюдава във всички диелектрици, вследствие на деформирането на електронните облаци на атомите при прилагане на външно поляризиращо поле E , при което неутралният атом се превръща в дипол, то за вектора на поляризация се получава:

$$P = n\varepsilon_0(\alpha_e + \alpha_i)E = n\varepsilon_0\left(\alpha_e + \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}\right)E.$$

Сравняваме последното уравнение с ур. 4: $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$ и получаваме:

$$n\alpha_e + n \frac{q^2 N}{\varepsilon_0 \omega^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} = \varepsilon - 1. \quad (17)$$

Ур. 17 се нарича формула на Борн, където диелектричeskата проницаемост ε отразява както електронната, така и йонната съставляваща на поляризацията.

Много твърди диелектрици представляват смес от две или повече компоненти. При двуфазни смеси за пресмятането на диелектричeskата проницаемост се използва формулата на Лихтенекер:

$$\varepsilon^m = x_1 \varepsilon_1^m + (1 - x_1) \varepsilon_2^m, \quad (18)$$

където x_1 е обемната концентрация на единия компонент, $(1 - x_1)$ - на другият, ε_1 и ε_2 са диелектричeskите проницаемости на двете компоненти, m е степенен показател, зависещ от взаимното разположение на компонентите.

Уравнение 18 може да се използва за пресмятане на диелектричeskата проницаемост на слоисти диелектрици.

Ако електричното поле е насочено перпендикулярно на слоевете, то $m = -1$ и уравнение 18 приема вида:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{x_1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - x_1}{\varepsilon_2}.$$

Ако електричното поле е насочено успоредно на слоевете, то $m = 1$ и уравнение 18 приема вида:

$$\varepsilon = x_1 \varepsilon_1 + (1 - x_1) \varepsilon_2.$$

За случая на дребнодисперсни добре смесени фази $m \rightarrow 0$ и уравнение 18 се преобразува чрез диференциране:

$$\varepsilon^{m-1} d\varepsilon = x_1 \varepsilon_1^{m-1} d\varepsilon_1 + (1 - x_1) \varepsilon_2^{m-1} d\varepsilon_2.$$

При $m = 0$ се получава:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = x_1 \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + (1 - x_1) \frac{d\varepsilon_2}{\varepsilon_2}.$$

Интегрираме и получаваме:

$$\ln \varepsilon = x_1 \ln \varepsilon_1 + (1 - x_1) \ln \varepsilon_2 + C.$$

При $x_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и за константата се получава $C = 0$.

Тогава за малкодисперсни системи уравнение 18 приема вида:

$$\ln \varepsilon = x_1 \ln \varepsilon_1 + (1 - x_1) \ln \varepsilon_2.$$