

ПОЛЯРИЗАЦИЯ НА ДИЕЛЕКТРИЦИ И ПОЛУПРОВОДНИЦИ В ПРОМЕНЛИВО ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ. ДИЕЛЕКТРИЧНИ ЗАГУБИ.

1. Поляризация на еднородни диелектрици при изменение на електричното поле.

Ще разгледаме преходните процеси при включване и изключване на електричното поле, както и изменението на поляризацията при изменящо се поле.

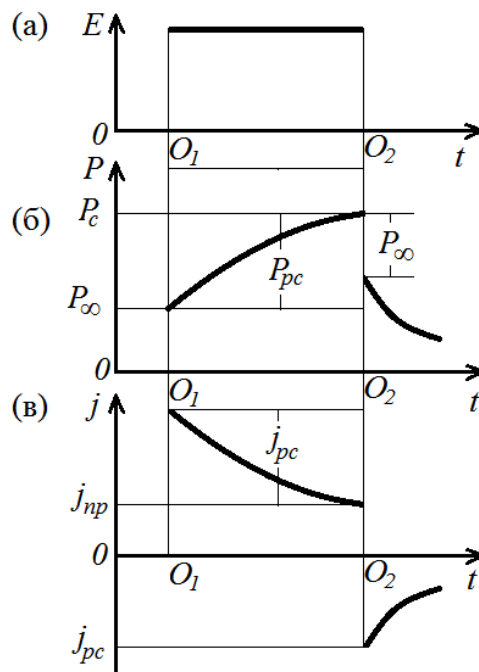
➤ Преходни процеси при включване и изключване на постоянно електрично поле.

Еднородно външно електрично поле се включва към кондензатор с диелектрик, така че интензитетът E се изменя от 0 до установената стойност E мигновено – фиг. 1 (а).

Поляризацията обаче се изменя от 0 до установената си стойност със закъснение във времето. Установената стойност остава постоянна – constant, и я означаваме с P_c . Тука могат да се отделят два етапа – фиг. 1 (б):

1 етап – Безинерционна поляризация, която се осъществява практически мигновено, за време от порядъка на 10^{-13} - 10^{-14} s. Тук се установяват безинерционните или еластичните видове поляризация, каквито са електронната и йонната. Безинерционната поляризация се установява за безкрайно малко време и затова я означаваме с P_∞ .

2 етап – Релаксационна поляризация, която се осъществява за определен период от време. Такава е инерционната част на електронната поляризация, която се определя от големината на локалното електрично поле, изменящо се в резултат на релаксационната поляризация. Такава е и диполно-релаксационната поляризация, която определя темпа на този етап.



Фигура 1. Времеви зависимости на:

- (а) - електричното поле,
- (б) – поляризацията,
- (в) – плътността на тока.

Съгласно уравнение 4 от Тема 9 - $P = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot E$:

- на **безинерционната поляризация** P_∞ съответства оптичната диелектрична проницаемост ε_∞ (диелектрична проницаемост при оптични честоти на изменение на електричното поле E от порядъка на 10^{15} Hz):

$$P_\infty = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_\infty - 1) \cdot E, \quad (1)$$

- на **установената стойност на поляризация** P_c съответства статичната диелектрична проницаемост ε_c (диелектрична проницаемост при нулеви честоти на изменение на електричното поле E – при постоянно електрично поле):

$$P_c = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - 1) \cdot E. \quad (2)$$

Чрез почленно изваждане на ур.2 и ур.1 се намира амплитудата на релаксационната поляризация:

$$P_{pc} = P_c - P_\infty = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \cdot E. \quad (3)$$

Релаксационната поляризация P_p при наличие на един механизъм на релаксация и едно време на релаксация τ се описва с една експонента:

$$P_p = P_{pc} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right).$$

Ако в диелектрика няма обемни заряди и неговото съпротивление остава постоянно, то лесно се определят плътността на тока на преместване (j_{np}) и плътността на тока на релаксационна поляризация (j_p):

$$j_{np} = \frac{dD}{dt} = \frac{d(\varepsilon_0 E + P)}{dt} = \frac{dP}{dt}, \quad (4)$$

$$j_p = \frac{dP_p}{dt} = \frac{P_{pc}}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = j_{pc} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5)$$

На фиг. 1 (в) е показана времевата зависимост на плътността на тока при включване и изключване на електрично поле E . След включването на E се наблюдава експоненциално спадащ релаксационен ток съгласно ур. 5. В началния момент на включване т. O_1 плътността на тока е j_{pc} , а в края на процеса т. O_2 става нула.

Пълната плътност на тока $j = j_p + j_{np}$ е съответно:

- при включване т. O_1 : $j_{\max} = j_{pc} + j_{np}$,
- при изключване т. O_2 : $j_{\min} = j_{np}$.

Когато в даден момент т. O_2 се изключи външното поле, то поляризацията практически мигновено намалява с безинерционната поляризация P_∞ - фиг. 1 (б). Остава само релаксационната поляризация P_{pc} , която след това намалява експоненциално с време на релаксация τ . Ако времето се отчита от т. O_2 , то намаляването на релаксационната поляризация се описва с експонента така:

$$P_p = P_{pc} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Тогава обратният деполяризационен ток е - фиг. 1 (в):

$$j_p = \frac{dP_p}{dt} = -\frac{P_{pc}}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

➤ **Връзка между времето на релаксация и времето на „заседнал“ живот на молекула-дипол.**

Разглеждаме един вид релаксатор, който е молекула, характеризираща се с диполен момент p .

Времето на релаксация τ е константа, определяща преходните процеси на изменение на поляризацията на веществото и плътността на тока при включване и изключване на външно електрично поле E .

Времето на „заседнал“ живот $\tau_{жс}$ е константа, определяща времето, за което молекулата-дипол се намира (заседнала е) в едно установено състояние. Вероятността за време dt молекулата-дипол да премине от едно в друго състояние е $dt / \tau_{жс}$.

Релаксационната поляризация на молекулата-дипол може да се представи чрез диполно-релаксационна поляризация и инерционната част на електронната поляризация:

$$P_p = P_{op} + P_{ep}.$$

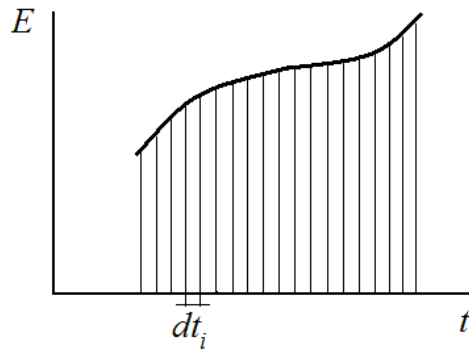
Като се използва уравнението на Клаузиус-Мосоти и се направят някои пресмятание се установява, че времето на релаксация при диполно-релаксационната поляризация е пропорционално на времето на „заседнал“ живот $\tau_{жс}$ на молекулата-дипол:

$$\tau = \frac{\varepsilon_c + 2}{\varepsilon_\infty + 2} \tau_{жс}.$$

Тъй като $\varepsilon_c > \varepsilon_\infty$, то от последното уравнение следва, че $\tau > \tau_{жс}$. При диполно-релаксационната поляризация, инерционната част на електронната поляризация следва диполната поляризация.

➤ **Поляризация при непрекъснато изменение на поляризиращото поле**

Ще разгледаме поляризацията на диелектрик в променливо електрично поле, изменящо се непрекъснато с времето по произволна зависимост – фиг. 2. Разбиваме зададения временен интервал на равни малки отрязъци dt_i и предполагаме, че във всеки от малките времеви интервали електричното поле $E(t_i)$ е постоянно. Тогава за всеки времеви интервал dt_i можем да използваме зависимостите за поляризацията в постоянно поле. След това интегрираме по времето.



Фигура 2. Електрично поле, изменящо се с времето.

При непрекъснато изменящо се електрично поле величините ϵ_∞ и ϵ_c в линейните диелектрици остават постоянни и релаксационната поляризация се записва във вида:

$$P_p(t) = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_c - \epsilon_\infty) \int_{-\infty}^t E(t_i) \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right) \frac{dt_i}{\tau} \quad (6)$$

Пълната поляризация е сума от безинерционната P_∞ и релаксационната P_p поляризация:

$$P(t) = P_\infty + P_p = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_\infty - 1) E(t) + \epsilon_0 \cdot (\epsilon_c - \epsilon_\infty) \int_{-\infty}^t E(t_i) \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau}\right) \frac{dt_i}{\tau} \quad (7)$$

В зависимост от вида на функцията $E(t_i)$ се получават различни изрази за вектора на поляризация.

➤ **Поляризация в синусоидално поляризиращо поле**

Поляризиращо поле е:

$$E(t) = E_m \sin \omega t .$$

Тогава от уравнение 7 се получава:

$$P(t) = P_\infty + P_p = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_\infty - 1) E_m \sin \omega t + \epsilon_0 \cdot (\epsilon_c - \epsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + (\omega\tau)^2} (\sin \omega t - \omega\tau \cos \omega t) . \quad (8)$$

При ниски честоти и малки τ , когато $\omega\tau \ll 1$:

$$P(t) = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_\infty - 1) E_m \sin \omega t + \epsilon_0 \cdot (\epsilon_c - \epsilon_\infty) E_m \sin \omega t = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_c - 1) E(t) . \quad (9)$$

Следователно при изпълнение на неравенството $\omega\tau \ll 1$ поляризацията е във фаза с поляризиращото поле, т.е. при ниски честоти и малко време на релаксация, поляризацията успява да следва измененията на електричното поле. При това поляризацията $P(t)$ съответства на статичната поляризация P_c в поле с интензитет $E(t)$. Действително формули 2 и 9 се отличават само по зависимостта на E от времето.

Ако неравенството $\omega\tau \ll 1$ не е спазено, то трябва да се използва общата формула 8. Пълната поляризация е сума от безинерционната поляризация и релаксационната поляризация, като всяка една е функция на времето:

$$P(t) = P_{\infty}(t) + P_p(t),$$

където безинерционната поляризация P_{∞} е:

$$P_{\infty} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_{\infty} - 1) \cdot E(t), \quad (10)$$

а релаксационната поляризация е:

$$P_p(t) = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{\infty}) \frac{E_m}{1 + (\omega\tau)^2} (\sin \omega t - \omega\tau \cos \omega t). \quad (11)$$

➤ **Активна и реактивна поляризация в синусоидално поле**

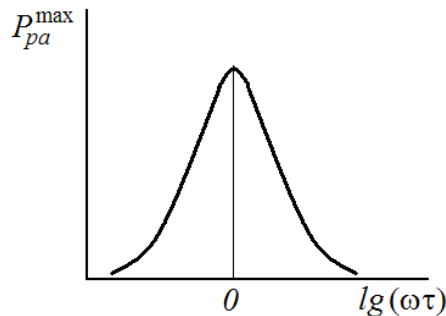
Закъсняването на поляризацията по фаза спрямо поляризиращото синусоидално поле води до разсейване на енергия в диелектрика, т.е. до диелектрични загуби.

Разглеждаме релаксационната поляризация, записана с ур. 11. Частта от релаксационната поляризация, отместена по фаза на $\pi/2$ спрямо поляризиращото поле, е свързана с отделяне на активна мощност и се нарича активна релаксационна поляризация:

$$P_{pa}(t) = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{\infty}) \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} E_m \cos \omega t = P_{pa}^{\max} \cos \omega t. \quad (12)$$

Интерес представлява амплитудата на активната релаксационна поляризация, представена на фиг. 3:

$$P_{pa}^{\max} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{\infty}) \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} E_m. \quad (13)$$



Фигура 3. Честотна зависимост на амплитудата на активната релаксационна поляризация.

При $\omega\tau = 1$ кривата има максимум. Това е условие за своеобразен резонанс на външното поле с микрорелаксаторите. Това не означава, че при $\omega\tau = 1$ ще се наблюдава максимум на диелектричните загуби, т.к. те зависят от произведението на амплитудата и честотата.

При $\omega\tau < 1$ ур. 13 има вида:

$$P_{pa}^{\max} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{\infty}) \omega\tau E_m,$$

т.е. с нарастване на $\omega\tau$, нараства и P_{pa}^{\max} .

При $\omega\tau > 1$ ур. 13 има вида:

$$P_{pa}^{\max} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{\omega\tau},$$

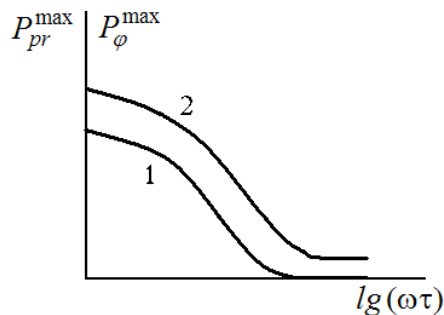
т.е. с нарастване на $\omega\tau$, намалява P_{pa}^{\max} .

Частта от релаксационната поляризация, намираща се във фаза с поляризиращото поле, не е свързана с отделяне на активна мощност и се нарича реактивна релаксационна поляризация. От ур. 11 се получава:

$$P_{pr} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + (\omega\tau)^2} \sin \omega t = P_{pr}^{\max} \sin \omega t. \quad (14)$$

Амплитудата на реактивната релаксационна поляризация, представена на фиг. 4 е:

$$P_{pr}^{\max} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (15)$$



Фигура 4. Честотна зависимост на амплитудата на реактивната релаксационна поляризация (1) и пълната реактивна поляризация (2).

При $\omega\tau \ll 1$, P_{pr}^{\max} е практически постоянна величина, т.к. при малки $\omega\tau$ релаксационната поляризация успява напълно да се осъществи и за определен интервал от ниски честоти не зависи от $\omega\tau$. С приближаване на $\omega\tau$ към 1, P_{pr}^{\max} започва да намалява. При по-нататъшното нарастване на $\omega\tau > 1$, P_{pr}^{\max} намалява силно до 0. С нарастването на честотата реактивната релаксационна поляризация намалява по амплитуда, т.к. не успява да следва полето. При достатъчно високи честоти тя отсъства.

Към общата съставна част на реактивната поляризация P_φ , която е във фаза с поляризиращото поле, освен реактивната релаксационна поляризация P_{pr} се включва и безинерционната поляризация P_∞ :

$$P_\varphi(t) = P_\infty(t) + P_{pr} = \left[\varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1) + \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)}{1 + (\omega\tau)^2} \right] E_m \sin \omega t.$$

Амплитудата на реактивната поляризация, представена на фиг. 4, е:

$$P_{\varphi}^{\max}(t) = \left[\varepsilon_0(\varepsilon_{\infty} - 1) + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_c - \varepsilon_{\infty})}{1 + (\omega\tau)^2} \right] E_m.$$

Очевидно графиката на $P_{\varphi}^{\max}(t)$ (крива 2 на фиг.4) повтаря графиката на амплитудата P_{pr}^{\max} (крива 1 на фиг.4), но е отместена по ост Y нагоре с $\varepsilon_0(\varepsilon_{\infty} - 1)E_m$. Това отместване не зависи от честотата и представлява амплитудата на безинерционната поляризация.

Общата релаксационна поляризация, включваща активната и реактивната части, изостава от електричното поле на ъгъл β , т.е. фазата на $P_p(t)$ се различава от тази на синусоидалното поляризиращо поле с:

$$\beta = \text{arctg}(\omega\tau).$$

След несложни преобразования за релаксационната поляризация от ур. 11 се получава:

$$P_p(t) = P_p^{\max} \sin(\omega t - \beta).$$

Ъгълът β с нарастване на честотата се изменя от 0 до $\pi/2$. При високи честоти релаксационната поляризация не успява да се създаде.

2. Диелектрични загуби в диелектрици с релаксационна поляризация и проводимост.

Диелектрични загуби се нарича мощността, разсеяна в диелектрика при прилагане на електрично поле. В променливо електрично поле диелектричните загуби са по-големи от тези в постоянно поле. В променливо поле, те се определят от поляризацияните токове и от токовете на омова проводимост, докато в постоянно поле – само от токовете на омова проводимост.

➤ Диелектрични загуби в еднороден диелектрик за синусоидално поле

Пълната плътност на тока е сума от тока на омова проводимост j_{σ} и от плътността тока на преместване j_{np} :

$$j = j_{\sigma} + j_{np} \quad (16)$$

$$j_{\sigma} = \sigma E = \sigma E_m \sin \omega t = \frac{\sigma V_m}{d} \sin \omega t, \quad (17)$$

$$j_{np} = \frac{dD}{dt} = \frac{d(\varepsilon_0 E + P)}{dt}, \quad (18)$$

където σ е специфична електропроводимост в постоянно поле, d – дебелината на диелектрика, $V_m = E_m d$ - амплитуда на външното напрежение.

В ур. 18 за плътността на тока на преместване j_{np} , заместваме интензитета на полето с $E = E_m \sin \omega t$ и поляризацията с израза $P(t) = P_{\infty}(t) + P_p(t)$, като използваме ур. 10 и ур. 11:

$$j_{np} = \varepsilon_0 \frac{E_m d(\sin \omega t)}{dt} + \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) \frac{E_m d(\sin \omega t)}{dt} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) E_m d(\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)}{1 + (\omega \tau)^2 dt}.$$

Диференцираме, заместваме с $E_m = V_m / d$ и получаваме:

$$j_{np} = \varepsilon_0 \omega \frac{V_m}{d} \cos \omega t + \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) \omega \frac{V_m}{d} \cos \omega t + \varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{V_m}{d} \frac{(\omega \cos \omega t + \omega^2 \tau \sin \omega t)}{1 + (\omega \tau)^2} \quad (19)$$

Уравнението 16 за пълния ток, който е сума от активния и реактивния ток, може да се запише и така:

$$j = j_a^{\max} \sin \omega t + j_r^{\max} \cos \omega t, \quad (20)$$

където амплитудата на плътността на активния ток е:

$$j_a^{\max} = \sigma \frac{V_m}{d} + \varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega^2 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{V_m}{d}, \quad (21)$$

а амплитудата на плътността на реактивния ток е:

$$j_r^{\max} = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega \frac{V_m}{d} + \varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{V_m}{d}. \quad (22)$$

За разлика от поляризацията, компонентата на тока, която е във фаза с електричното поле се нарича активна, а компонентата на тока, отместена по фаза с $\pi/2$ - реактивна. При високи честоти, в израза (21) може да се пренебрегне в знаменателя единицата и се получава постоянна амплитуда, независеща от честотата, с максимална стойност:

$$(j_a^{\max})_{\max} = \sigma \frac{V_m}{d} + \varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{V_m}{\tau d}.$$

Диелектричните загуби при дадени ток I и напрежение V се изчисляват по формулата:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T IV dt = \frac{1}{T} \int_0^T jSV dt, \quad (23)$$

където T – период на външното напрежение, S – площта на напречното сечение.

В ур.23 заместваме с ур. 20 и получаваме:

$$W = \frac{I_a^{\max} V_m}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt + \frac{I_r^{\max} V_m}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt.$$

Първият интеграл е равен на $T/2$, а вторият – на нула. Следователно, в диелектрици с релаксационна поляризация, диелектричните загуби се определят от активната част на поляризацияния ток. Тогава се получава:

$$W = \frac{I_a^{\max} V_m}{2} = \sigma S \frac{V_m^2}{2d} + \varepsilon_0 (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{S \omega^2 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{V_m^2}{2d}.$$

Като се въведе ефективното напрежение $V = V_m / \sqrt{2}$, се получава:

$$W = \sigma S \frac{V^2}{d} + \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{S \omega^2 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{V^2}{d}. \quad (24)$$

Първият член на ур. 24 изразява диелектричните загуби, вследствие на омовата проводимост:

$$W_\sigma = \sigma S \frac{V^2}{d} = \frac{V^2}{R} = IV, \quad (25)$$

където съпротивлението на диелектрика в постоянно електрично поле, създаващо напрежение V , е :

$$R = \frac{d}{\sigma S} = \rho_v \frac{d}{S}. \quad (26)$$

Съгласно ур. 25 диелектричните загуби от омовата проводимост не зависят от честотата ω , а се определят от амплитудите на тока и на напрежението.

Вторият член на ур. 24 изразява диелектричните загуби, вследствие на релаксационните процеси:

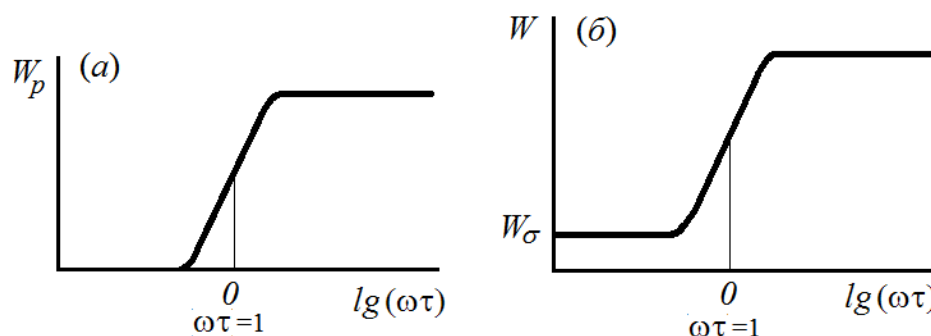
$$W_p = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{S \omega^2 \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{V^2}{d}, \quad (27)$$

Когато в ур. 27 се замести амплитудата на активната релаксационна поляризация от ур.13: $P_{pa}^{\max} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \frac{\sqrt{2}V}{d}$, се получава:

$$W_p = \frac{SV}{\sqrt{2}} P_{pa}^{\max} \omega \sim P_{pa}^{\max} \omega. \quad (28)$$

Съгласно ур. 28, релаксационните загуби са пропорционални на произведението на амплитудата на активната релаксационна поляризация и честотата ω .

Зависимостта на реласкационните загуби от честотата е показана на фиг. 5 (а), а зависимостта на пълните загуби – на фиг. 5 (б).



Фигура 5. Честотна зависимост на релаксационните (а) и пълните (б) загуби.

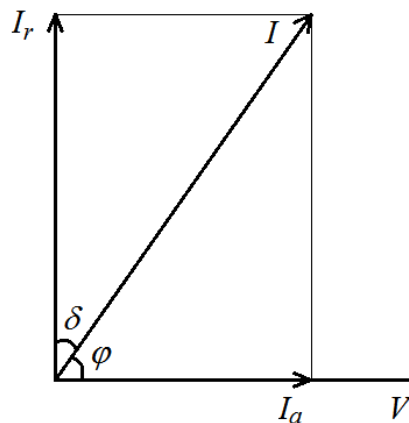
При ниските честоти, когато $\omega \tau \ll 1$, ефектът е такъв, както и при постоянен ток – диелектричните загуби се определят само от загубите на омовата проводимост. При ниските честоти поляризацията е във фаза с полето и няма загуби, т.к енергията за поляризация се възстановява във веригата за един пълен период. При ниски честоти

$\omega\tau \ll 1$ активна поляризация няма – виж фиг. 3, докато реактивната поляризация има някаква постоянна стойност - виж фиг. 4.

При доближаване на $\omega\tau$ към единица ($\omega\tau \leq 1$), нарастват релаксационните загуби и при $\omega\tau = 1$ кривата променя наклона си. По нататък с нарастване на честотата растат и релаксационните загуби до достигане на насищане при високи честоти, отговарящо на j_a^{\max} - ур. 21.

3. Тангес от ъгъла на диелектричните загуби при синусоидално поле

Важен параметър, който определя диелектричните загуби е тангесът от ъгъла на диелектричните загуби или тангент делта - $tg\delta$. За да въведем това понятие ще разгледаме векторната диаграма на токовете за кондензатор със загуби – фиг. 6.



Фигура 6. Векторна диаграма на токовете за кондензатор със загуби.

Активната мощност или диелектричните загуби в теорията на променливите токове се изразяват чрез ефективните стойности на тока - $I = I_m / \sqrt{2}$ и на напрежението - $V = V_m / \sqrt{2}$:

$$W = VI \cos \varphi = VI_a = VI_r tg \delta. \quad (29)$$

От ур. 29 следва, че:

$$tg \delta = \frac{I_a}{I_r} = \frac{I_a^{\max}}{I_r^{\max}} = \frac{j_a^{\max}}{j_r^{\max}}. \quad (30)$$

Заместваме в ур. 30 амплитудите на плътността на активния и реактивния токове с ур. 21 и 22 и получаваме:

$$tg \delta = \frac{\sigma + \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega^2 \tau}{1 + (\omega\tau)^2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega + \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega}{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (31)$$

При много ниски честоти, $\omega \rightarrow 0$, от ур.31 се получава:

$$tg \delta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty \omega} \rightarrow \infty. \quad (32)$$

При много малки проводимости, $\sigma \rightarrow 0$, от ур. 31 се получава:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2}}{\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty)}{1 + (\omega \tau)^2}}. \quad (33)$$

Ако разгледаме достатъчно високи честоти $\omega \tau \gg 1$, то от ур.33 се получава т.н. формула на Дебай:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega \tau}{\varepsilon_c + \varepsilon_\infty (\omega \tau)^2}. \quad (34)$$

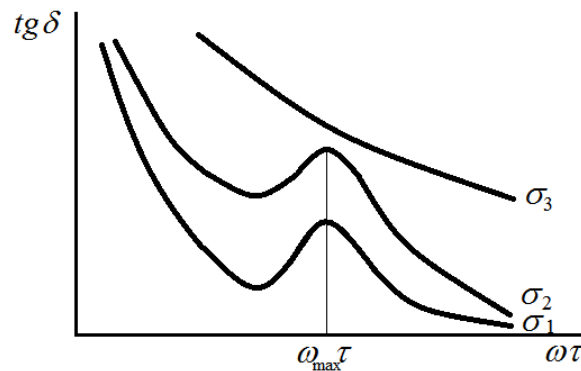
За да намерим екстремалната стойност (това е максимум, т.к. втората производна се получава отрицателно число) на $\operatorname{tg} \delta$ диференцираме ур. 34 по $\omega \tau$, приравняваме на нула и получаваме условието за максимум:

$$\omega_{\max} \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_\infty}}.$$

Заместваме в ур. 34 и получаваме максималната стойност на $\operatorname{tg} \delta$:

$$(\operatorname{tg} \delta)_{\max} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\infty}{2\varepsilon_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_\infty}}.$$

На фиг. 7 са представени графики на функцията $\operatorname{tg} \delta = f(\omega \tau)$ за различни стойности на проводимостта, като $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$.



Фигура 7. Честотна зависимост на $\operatorname{tg} \delta$ при различни проводимости.

Когато се променя проводимостта σ , а ε_c и ε_∞ остават непроменени, то кривите $\operatorname{tg} \delta = f(\omega \tau)$ се отместват по вертикалата. Колкото по-голяма е проводимостта, толкова повече по оста Y нагоре се отмества кривата. При голяма омова проводимост релаксационният максимум $(\operatorname{tg} \delta)_{\max}$ може да не се наблюдава, както е показано за кривата с проводимост σ_3 на фиг.7.

4. Комплексна диелектрична проницаемост. Диаграма на Коул-Коул.

Диелектричната проницаемост на веществото обикновено се определя от закона на Кулон за силата на електростатично взаимодействие на два точкови заряда q_1 и q_2 , разположени на разстояние r един от друг:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}. \quad (\text{a})$$

Относителната диелектричната проницаемост ϵ е число, което показва колко пъти намалява силата на взаимодействие между двата точкови заряда при запълване на вакуума с вещество, характеризиращо се с ϵ .

Относителната диелектрична проницаемост ϵ се използва и при определяне на електростатичната индукция D в диелектрик, намиращ се между плочите на плосък кондензатор:

$$D = \epsilon_0\epsilon E = \epsilon_0 E + P. \quad (\text{б})$$

В този случай ϵ е число, което показва колко пъти нараства капацитетът на вакуумен кондензатор C_0 при запълване на пространството между плочите му с вещество, характеризиращо се с ϵ :

$$\epsilon = C / C_0. \quad (\text{в})$$

За описание на явленията в променливи полета е подходящо използването на комплексни величини, т.к. позволява да се използва метода на комплексните променливи. Затова ще разгледаме диелектричната проницаемост като комплексна величина:

$$\langle \epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' \rangle. \quad (35)$$

Плътността на пълния ток в комплексна форма е:

$$\langle j = j_a + ij_r \rangle. \quad (36)$$

Комплексният ток $\langle j$ може да се представи като първа производна на комплексния заряд:

$$\langle j = \frac{d\langle Q \rangle}{dt} \rangle. \quad (37)$$

Комплексният заряд $\langle Q$ може да се представи чрез комплексната диелектрична проницаемост $\langle \epsilon$ и напрежението в комплексна форма $\langle V = V_m e^{i\omega t} \rangle$:

$$\langle Q = \langle \epsilon C_0 \rangle \langle V = \langle \epsilon C_0 V_m e^{i\omega t} \rangle, \quad (38)$$

където $C_0 = \epsilon_0 S / d = \epsilon_0 / d$ е капацитетът на плосък въздушен кондензатор с единична площ на плочите S и разстояние между тях d .

Заместваме в ур. 38 с ур. 35:

$$\langle Q = (\epsilon' - i\epsilon'') C_0 V_m e^{i\omega t},$$

диференцираме по времето:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = i\omega(\epsilon' - i\epsilon'') C_0 V_m e^{i\omega t}$$

и от ур. 37 след елементарни преобразования получаваме:

$$\langle j = \varepsilon'' C_0 \omega V_m e^{i\omega t} + i \varepsilon' C_0 \omega V_m e^{i\omega t} .$$

Сравняваме с ур. 36 и получаваме:

$$j_a = \varepsilon'' C_0 \omega V_m e^{i\omega t} , \quad (39)$$

$$j_r = \varepsilon' C_0 \omega V_m e^{i\omega t} . \quad (40)$$

От ур. 39, 40 и 30 се получава едно уравнение, много използвано при анализа на процесите в променливо поле:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{j_a^{\max}}{j_r^{\max}} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} . \quad (41)$$

Оттук се получава:

$$\varepsilon'' = \varepsilon' \operatorname{tg} \delta . \quad (42)$$

Тъй като ε'' е пропорционално на $\operatorname{tg} \delta$, следва, че имагинерната диелектрична проникваемост ε'' определя диелектричните загуби, а реалната диелектрична проникваемост ε' има физически смисъл на обикновена диелектрична проникваемост, дефинирана от ур. (а), (б), (в).

Приравняваме ур. 21 с амплитудата от ур. 39, заместваем с $C_0 = \varepsilon_0 / d$ и след елементарни преобразования получаваме:

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} + \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} , \quad (43)$$

Аналогично приравняваме ур. 22 с амплитудата от ур. 40, заместваем с $C_0 = \varepsilon_0 / d$ и след елементарни преобразования получаваме:

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega \tau)^2} . \quad (44)$$

При много малки проводимости $\sigma \rightarrow 0$ и високи честоти $\omega \tau \gg 1$ от ур. 43 и 44 се получава израз, който съвпада с формулата на Дебай от ур. 34:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega \tau}{\varepsilon_c + \varepsilon_\infty (\omega \tau)^2} . \quad (45)$$

Релаксационната част на имагинерната диелектричната проникваемост ε'' или ε'' при ниска проводимост от ур. 43 е:

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_\infty) \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} . \quad (46)$$

За да намерим екстремалната стойност (това е максимум, т.к. втората производна се получава отрицателно число) на ε'' диференцираме ур. 46 по $\omega \tau$, приравняваме на нула и получаваме условието за максимум:

$$\omega_{\max} \tau = 1 . \quad (47)$$

Сравняваме ур. 47 с условието за максимум на $tg\delta$: $\omega_{\max}\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_\infty}} > 1$, т.к. $\varepsilon_c > \varepsilon_\infty$.

Следователно максимумите на ε'' и $tg\delta$ малко се отличават. Максималната честота ω_{\max} , при която $tg\delta$ има максимум в даден диелектрик с определено време на релаксация τ , е по-голяма от максималната честота за ε''_{\max} .

От ур. 44 и 46 могат да се намерят максималните стойности на ε' и на ε'' при условието от ур. 47:

$$\varepsilon'_{\max} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_\infty}{2}, \quad (48)$$

$$\varepsilon''_{\max} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\infty}{2}. \quad (49)$$

Крайните стойности на ε' се определят от ур. 48 при ниски и високи честоти:

$$\text{за } \omega\tau \ll 1, \quad \varepsilon' = \varepsilon_c,$$

$$\text{за } \omega\tau \gg 1, \quad \varepsilon' = \varepsilon_\infty.$$

Нагледно ε' и ε'' се изобразяват чрез диаграмата на Коул-Коул. Тази диаграма се получава като от ур. 44 и 46 се изключи $\omega\tau$ и се изрази функцията $\varepsilon'' = f(\varepsilon')$:

$$(\varepsilon' - \varepsilon'_0)^2 + (\varepsilon'')^2 = R^2,$$

$$R = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\infty}{2},$$

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_\infty}{2} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_\infty}{2}.$$

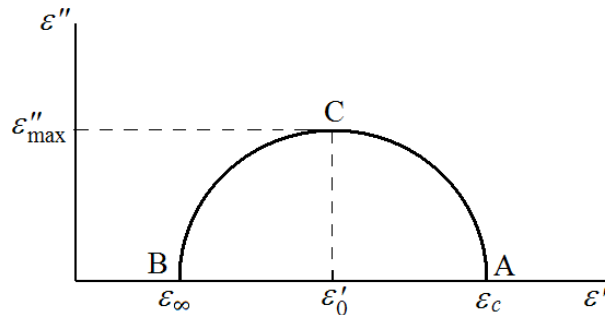
Диаграмата на Коул-Коул е една полуокръжност в координати ε' и ε'' , изобразена на фиг. 8.

От ур. 44 и 46 следва, че:

при $\omega\tau = 0$ се получава т. А от окръжността: $\varepsilon' = \varepsilon_c$ и $\varepsilon'' = 0$,

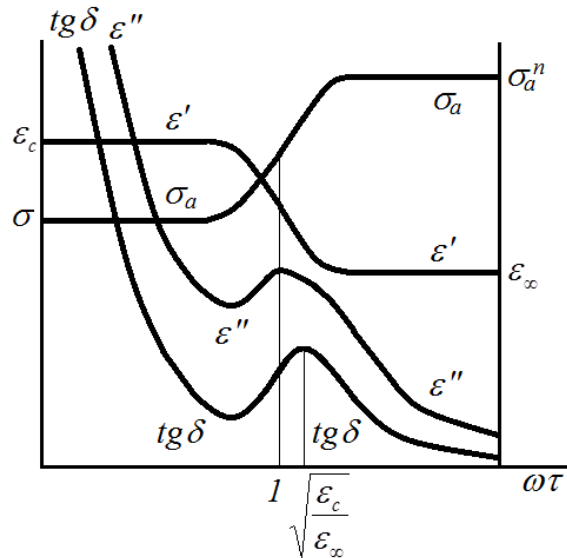
при $\omega\tau \rightarrow \infty$ се получава т. В от окръжността: $\varepsilon' = \varepsilon_\infty$ и $\varepsilon'' = 0$,

при $\omega\tau = 1$ се получава т. С от окръжността: $\varepsilon' = \varepsilon'_0$ и $\varepsilon'' = \varepsilon''_{\max}$.



Фигура 8. Диаграма на Коул-Коул.

На фиг. 9 качествено са показани диелектричните дисперсии или честотните зависимости на величините $tg\delta$, ϵ' , ϵ'' и σ_a . По ординатната ос в произволен мащаб са нанесени величините $tg\delta$, ϵ' , ϵ'' и σ_a , а по абсисната – ъгловата честота $\omega = 2\pi\nu$, където ν е линейната честота.



Фигура 9. Диелектрична дисперсия.

Големината на специфичната активна електропроводимост може да се получи от ур. 21 и ур. 39, като се има в предвид диференциалната форма на закона на Ом $j = \sigma_a E$:

$$\sigma_a = \epsilon'' \epsilon_0 \omega = \sigma + \epsilon_0 (\epsilon_c - \epsilon_\infty) \frac{\omega^2 \tau}{1 + (\omega \tau)^2}. \quad (50)$$

Специфичната активна електропроводимост при ниски честоти е равна на тази в постоянно електрично поле - σ . Ур. 50 се отнася за еднородни диелектрици, в които не се образуват обеднени слоеве и омовата проводимост може да се смята независеща от честотата.

При високи честоти $\omega \tau \gg 1$, от ур. 50 се получава:

$$\sigma_a^n = \sigma + \epsilon_0 (\epsilon_c - \epsilon_\infty) \frac{1}{\tau},$$

което е стойността на насищане на σ_a и при увеличаване на $\omega \tau$, тя не се променя.

Стойността на ϵ' се изменя от ϵ_c до ϵ_∞ и изкривяването на кривата става при $\omega \tau = 1$. При $\omega \tau = 1$ се наблюдава и максимума на кривата $\epsilon'' = f(\omega)$, докато максимумът на кривата на $tg\delta$ е разположен при по-високи честоти при $\omega \tau = \sqrt{\epsilon_c / \epsilon_\infty}$. Кривата $\epsilon'' = f(\omega)$ лежи по-високо от $tg\delta = f(\omega)$, т.к. $\epsilon'' = \epsilon' tg\delta$ и $\epsilon' > 1$.

С изменение на температурата се изменя и диелектрическата дисперсия. Затова при построяване на кривите на фиг. 9 температурата се приема за постоянна.

5. Температурна зависимост на диелектричните загуби

Времето на релаксация τ е функция на температурата. При диполно-релаксационната и йонно-релаксационната поляризация τ е експоненциална функция на температурата:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right).$$

С нарастване на температурата времето на релаксация рязко намалява по експонента. Тогава максимумите на $\operatorname{tg} \delta$ и ε'' се отместват към по-високите честоти с нарастване на температурата. Диелектричните загуби при повишаване на температурата се увеличават за сметка на нарастването на омовата проводимост.