


ФРАУНХОФЕРОВА ДИФРАКЦИЯ ОТ БЕЗКРАЙНО ДЪЛЪГ ПРОЦЕП



Лектор: проф. д-р Т. Йовчева

1. Фраунхоферова дифракция от безкрайно дълъг процеп

Между 2 лещи е разположен екран с (различни) препятствия E_1 . Във фокусите им са поставени съответно източник на светлина S и екран за наблюдение на дифракционната картина E_2 .

$$S \rightarrow L_1 \rightarrow E_1 \rightarrow L_2 \rightarrow E_2$$

Отворите имат различна форма и размери.

Светлината минава по различни пътища и дава различни осветени точки на E_2 , които са образи на източника S .

1. Фраунхоферова дифракция от безкрайно дълъг процеп

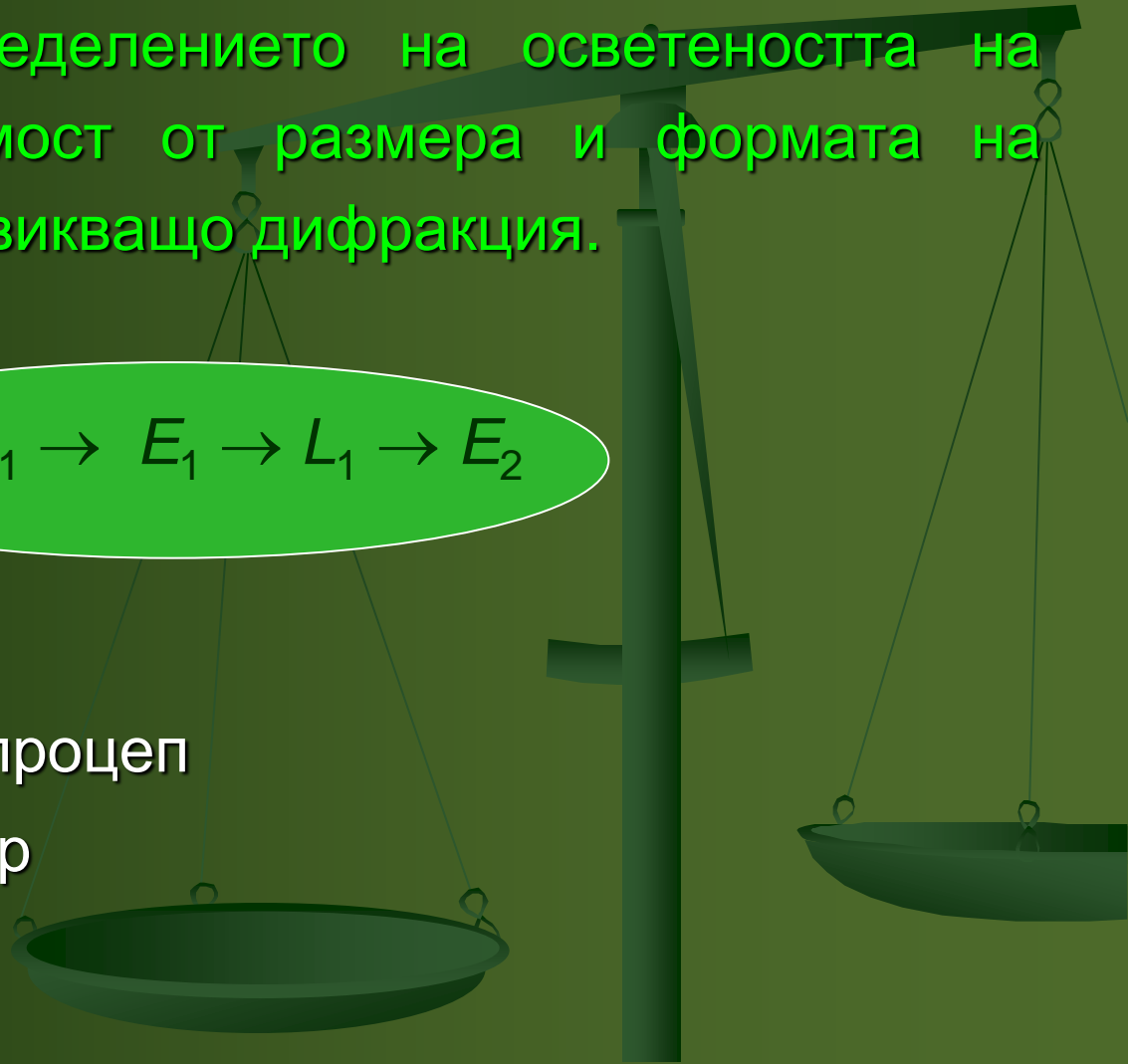
Решение на задачата за дифракция:

Да се намери разпределението на осветеността на екрана E_2 , в зависимост от размера и формата на препятствието, предизвикващо дифракция.

$$S \rightarrow L_1 \rightarrow E_1 \rightarrow L_2 \rightarrow E_2$$

Препятствията са:

- безкрайно дълъг процеп
- правоъгълен отвор
- кръгъл отвор



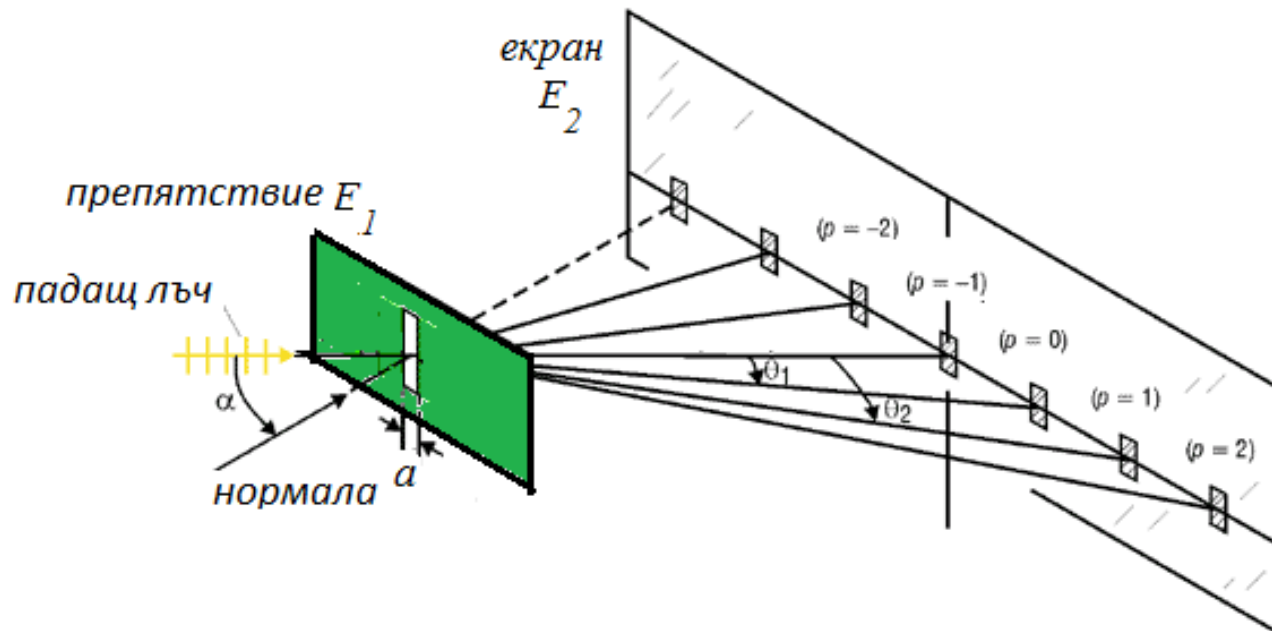
Разглеждаме безкраен процеп с:

ширина a (пр. $a \approx 0.01 \div 0.02\text{nm}$),

дължина $l \rightarrow \infty$ ($l \cong 10\text{mm}$).

Дифракционната картина е тъмни и светли ивици (минимуми и максимуми), редуващи се в направление перпендикулярно на процепа, т.к. светлината дифрактира наляво и надясно от процепа.

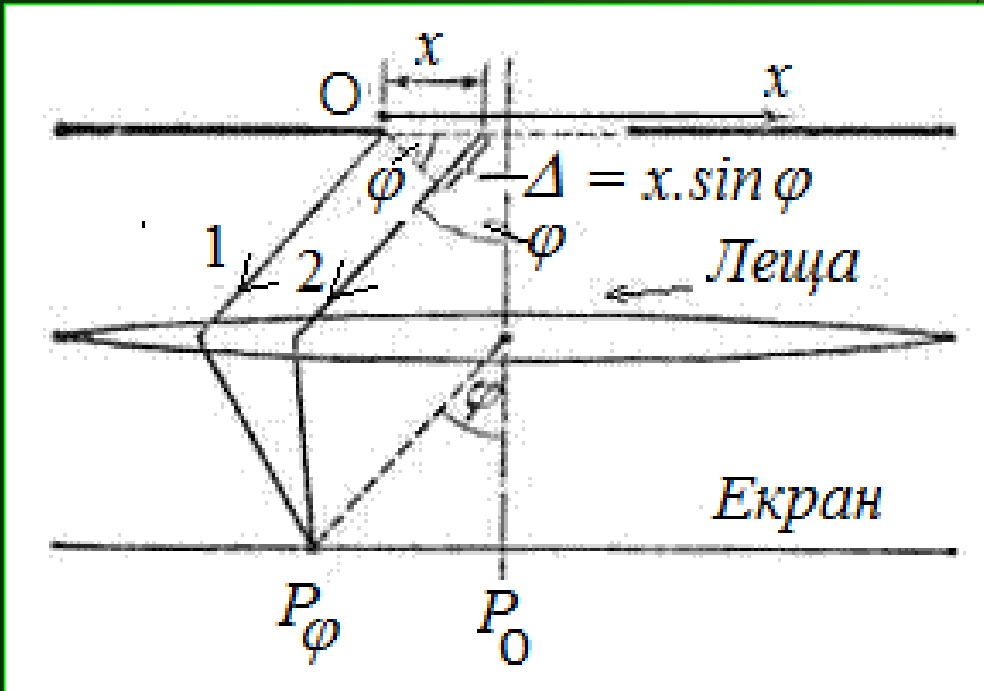
Ще изследваме
ДК в една равнина.



Нормално пада плоска монохроматична вълна

Равнината на процепа е вълнова повърхност за падащата вълна, т.е. с еднакви фази за всяка точка.

Разделяме откритата част на тази вълнова повърхност на елементарни зони, успоредни на краищата на процепа с ширина dx .



Площите на тези зони са равни, следователно амплитудите им са равни.

Вторичните вълни, разпространяващи се от зоните в направление определено от ъгъл φ , ще се съберат от лещата в т. P_φ от екрана.

(1)

$$I = c.A^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi \right)^2}$$

Означаваме:

$$I_0 = c.A^2$$

- ИНТЕНЗИТЕТЪТ в средата на дифракционната картина

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi = u = \frac{\delta_a}{2}, \delta_a = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_{0,a}$$

- фазовата разлика между лъчите 1 и 3, от краищата на процепа a .

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

(2)

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

- за произволна т. Р

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

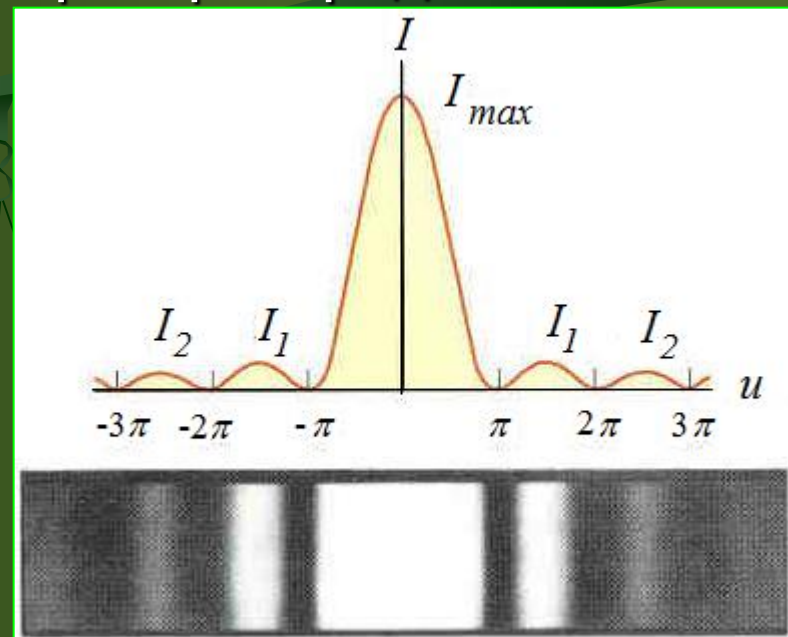
2. Изследване на дифракционната картина

Ако местим т. Р по екрана ще намерим разпределението на I .
Анализираме (1) или (2).

а) Минимуми

$$I = I_{\min} = 0 ; \text{ ако}$$

$$\sin u = 0 \text{ или } u = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$



$$u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi = m\pi ;$$

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{a}$$

условие за минимум.

Условието определя направлението към точки от екрана, в които интензитетът е минимален (амплитудата на трептенията е 0).

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

б) Максимуми: При определени промеждутъчни стойности на φ , интензитетът има максимуми с различна големина.

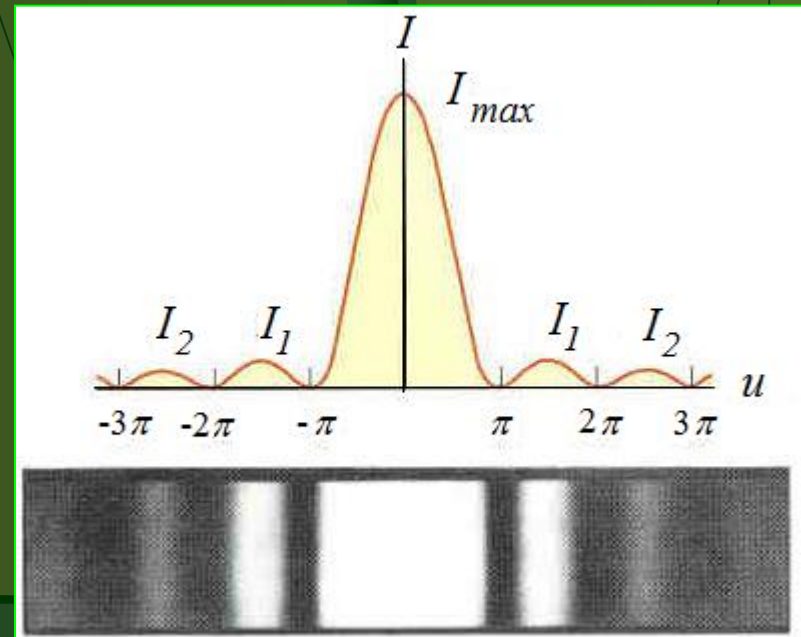
- Централен максимум (в центъра на екрана) - I_{\max}

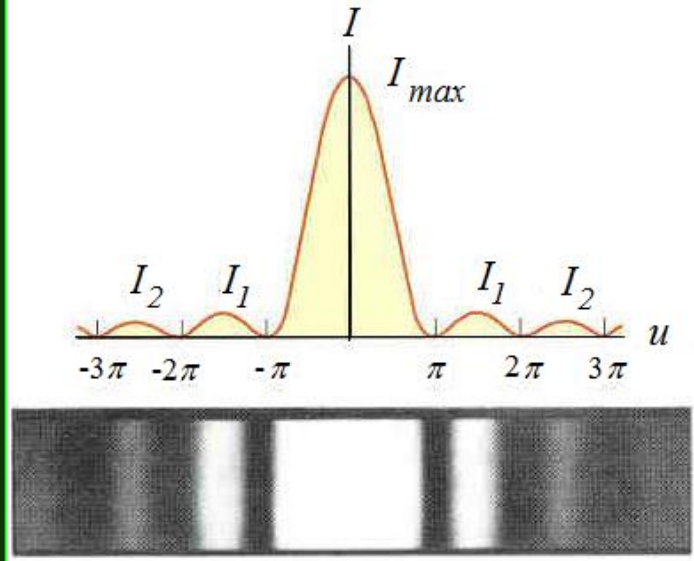
$$I = I_0 \text{ за } \varphi = 0 \text{ в т.О}$$

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi = u$$

$$\text{За т. О, } \varphi = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \sin u = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \Rightarrow \frac{0}{0} = 1$$





$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad (2)$$

- Следващи максимуми (за $\varphi \neq 0$) – $I_1, I_2 \dots$

Първата производна на (2) се приравняват на 0, за да се намерят тези екстремуми.

Получава се трансцидентно уравнение:

$$\text{tg } u = u$$

Не съвсем точно, но качествено решение за максимума се

получава от условието: $\sin^2 u = 1$, т.е

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2a} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda}{a}$$

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \varphi = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{a}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

условие за максимум, не
съвсем точно.

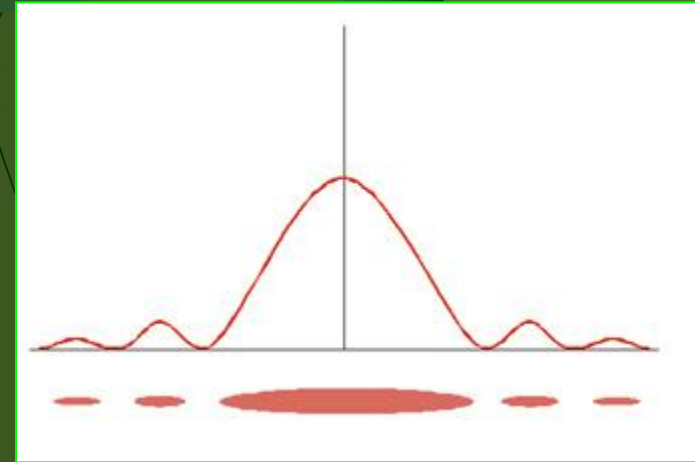
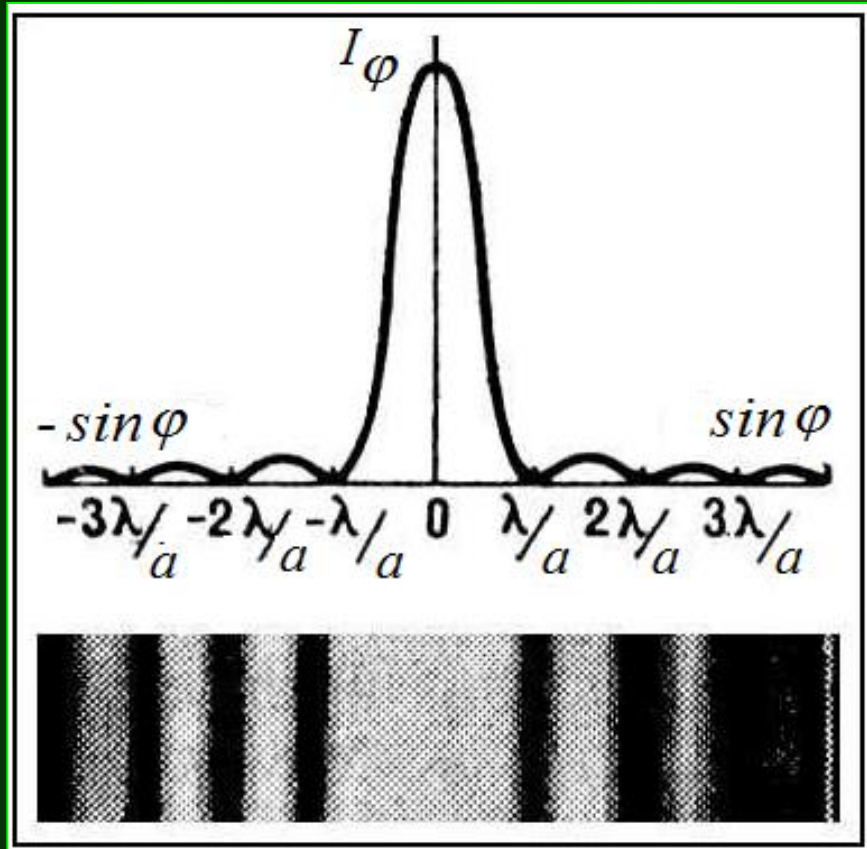
Стойността на нецентралните максимуми бързо намалява.

Отношенията на интензитетите на централния и следващите максимуми е както:

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \frac{4}{49\pi^2} : \frac{4}{81\pi^2} \dots$$

или

$$1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : 0,005 \dots$$



От ф-ла (1) и (2) \Rightarrow , че $I_\varphi = I_{-\varphi}$

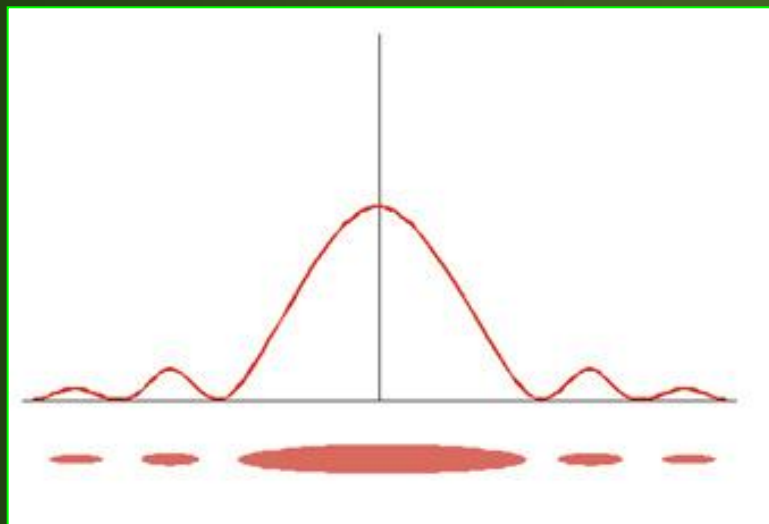
\Rightarrow Дифракционната картина е симетрична относно центъра на лещата.

в) Броят минимума на интензитета се определя от отношението на ширината на процепа a към дължината на вълната λ :

$$m \leq \frac{a}{\lambda}$$

Усл. min: $\sin \varphi = m \frac{\lambda}{a}$; $\sin \varphi \leq 1 \Rightarrow m \frac{\lambda}{a} \leq 1$ или $m \leq \frac{a}{\lambda}, a \geq \lambda$

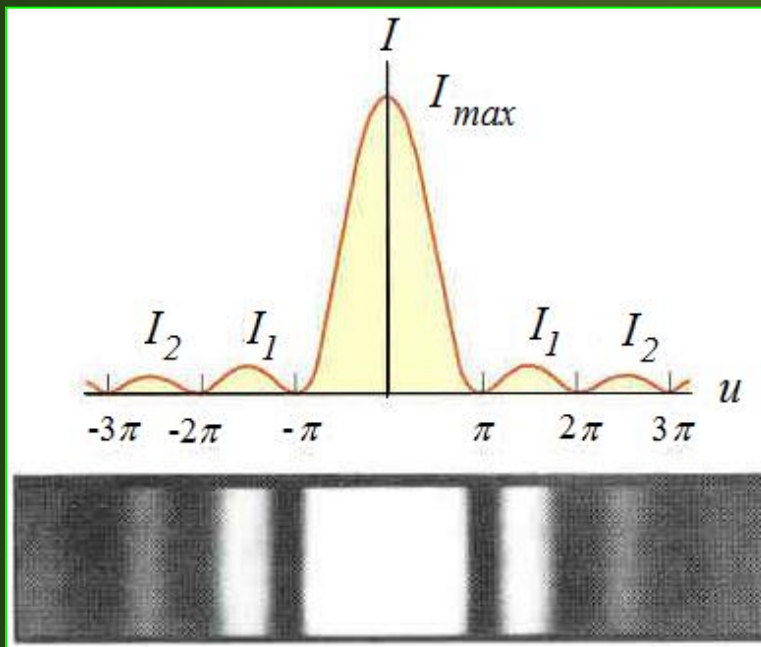
За $a < \lambda$ - минимум не се наблюдава.



От условието за минимум:

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{a} \Rightarrow$$

Разстоянието на минимумите от центъра на дифракционната картина нараства с намаляване на $a \Rightarrow$ с намаляване на a , централният максимум се разширява и захваща все по-голяма област от екрана.



г) Краищата на централния максимум се определят от

условието за минимум:

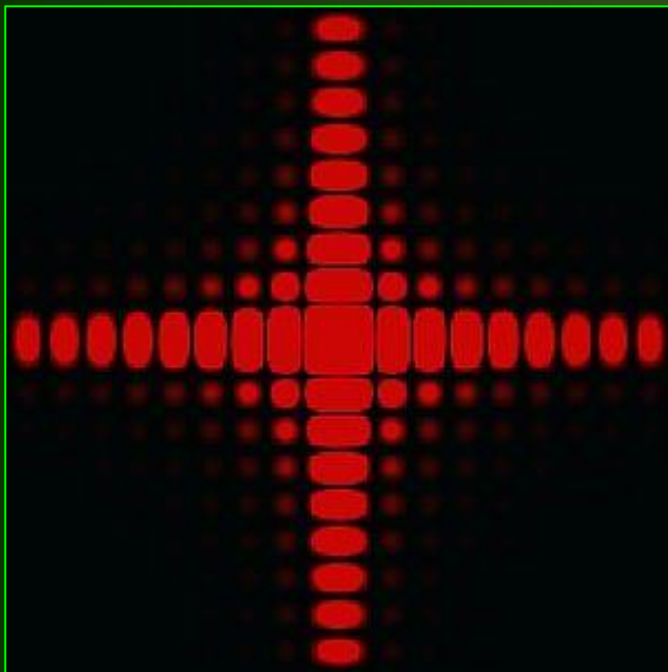
$$\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{a}$$

За $a \gg \lambda$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\varphi = \frac{\lambda}{a}$

Тогава ъгловата ширина на централния максимум е:

$$\delta\varphi = 2\varphi = 2\frac{\lambda}{a}$$

3. Фраунхоферова дифракция от правоъгълен отвор



Ако процепът има ограничена дължина, т.е l не клони към безкрайност и представлява правоъгълник със страни a и l , то очевидно и по посока на дължината на процепа ще се наблюдава ДК.

ДК ще е по-широка в това направление, което съответства на по-късата страна на отвора. В случай на квадрат – симетрична ДК.

При решаване на задачата за ДК, вълновият фронт се разделя на малки правоъгълни елементи, като се прекарват две фамилии линии, успоредни на l и успоредни на a .

Дифракцията се характеризира с два ъгъла ψ и φ : отклонение от направления, определени от две равнини успоредни на a и l .

Условие за минимум е:

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{a}$$

$$\sin \psi = n \frac{\lambda}{l}$$

$$m, n = 1, 2, 3 \dots$$

$$I_{\varphi, \psi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 v}{v^2}, \quad v = \frac{\pi}{\lambda} l \sin \psi$$

4. Фраунхоферова дифракция от кръгъл отвор

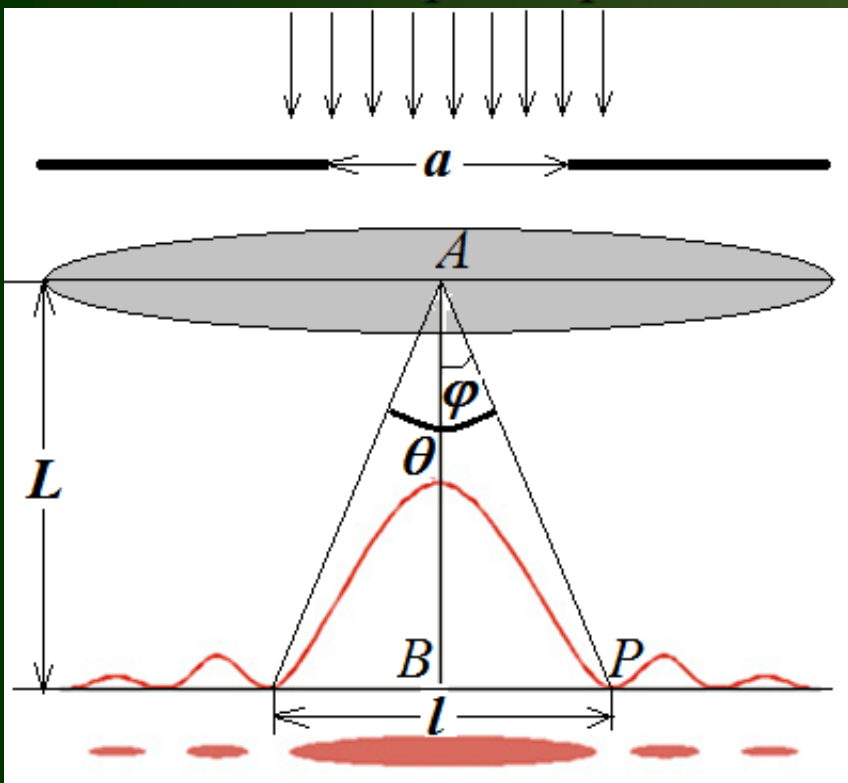


По-трудно се правят разчети. Вълновият фронт се разделя чрез вектори с различна дължина. Стига се до беселови функции. Дифракционната картина е концентрични кръгове за максимуми и минимуми, с ъглов радиус на тъмните кръгове:

$$\sin \varphi_m = \frac{0.61 + (m + 1)/2}{R} \cdot \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad R - \text{радиус на отвора}$$

Колкото по-голям е радиусът, толкова по-малка ще е ДК.

Задача 1. Върху процеп с ширина a mm пада нормално успореден сноп светлина от монохроматичен източник с дължина на вълната λ nm. Да се определи ширината на централния максимум в дифракционната картина, проектирана с леща върху екран, който се намира на разстояние $L = 1,6$ m от лещата.



$$a \sin \varphi = m \lambda$$

$$m = \pm 1$$

$$a \sin \varphi = \lambda$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l/2}{L} \Rightarrow l = 2L \operatorname{tg} \varphi$$

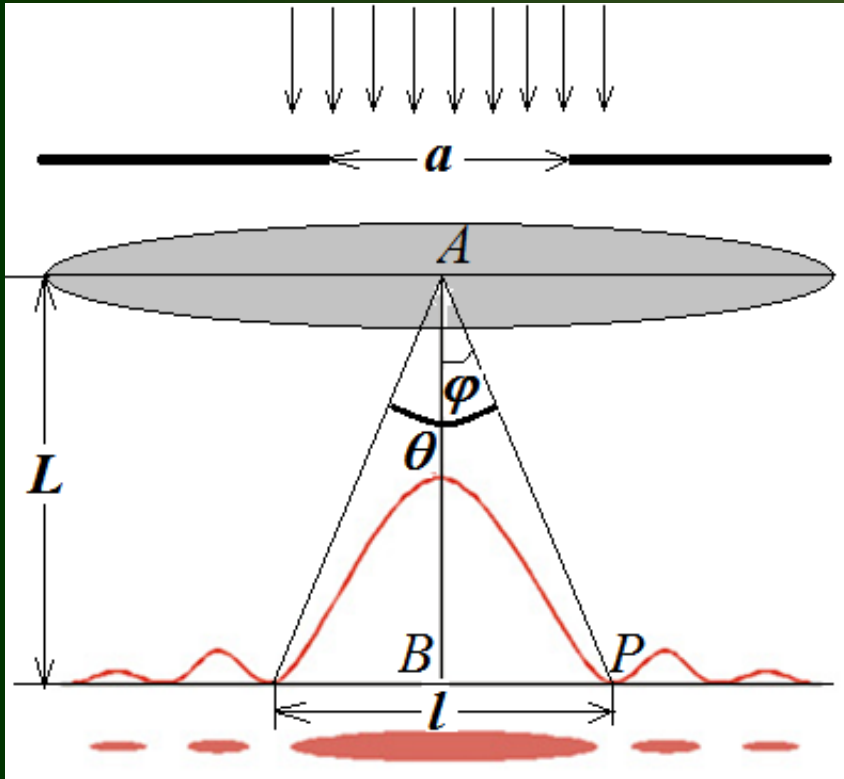
$$l = 2L \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\lambda}{a} \right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$$

$$l = 2L \frac{\lambda}{a}$$

$$l = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 630 \cdot 10^{-9}}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Задача 2. Върху безкрайно дълъг процеп с ширина $a=215 \mu\text{m}$ пада нормално плоска светлинна вълна с дължина на вълната 650 nm . Зад процепа е разположена тънка събирателна леща. Определете ъгловата ширина на централния дифракционен максимум.



$$a \sin \varphi = m\lambda$$

$$m = 1$$

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

$$\angle \theta = 2\varphi$$

$$\theta = 2 \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

$$\theta = 2 \arcsin \frac{650 \cdot 10^{-9}}{215 \cdot 10^{-6}} = 0,35^\circ$$

Задача 3. Върху безкрайно дълъг процеп с ширина a пада нормално плоска светлинна вълна с дължина на вълната λ . Наблюдението се води в успореден сноп лъчи.

Да се определи при каква ширина на процепа няма да възникват дифракционни минимуми.

$$a \sin \varphi = m\lambda$$

$$m = \frac{a \sin \varphi}{\lambda}$$

$$m \leq 1$$

$$\frac{a \sin \varphi}{\lambda} \leq 1$$

$$\varphi \leq 90^\circ$$

$$\sin \varphi \leq 1$$

$$\frac{a}{\lambda} \leq 1$$

$$a \leq \lambda$$

При ширина на процепа по-малка или равна на дължината на светлинната вълна няма да възникнат дифракционни минимуми.