ЕЛЕКТРОМАГНИТНА ТЕОРИЯ НА СВЕТЛИНАТА

Лектор: проф. д-р Т. Йовчева

1. Електромагнитна природа на светлината

1.1. Уравнения на Максуел

За среда без токове на проводимост $j = 0$ и без некомпенсирани свободни заряди $\rho = 0$:

Уравнението за пълния ток

$$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + j$$

Закон за електромагнитната индукция

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Теоремата на Гаус

$$div\vec{D} = \rho$$

Закон за магнитния поток през затворена повърхност

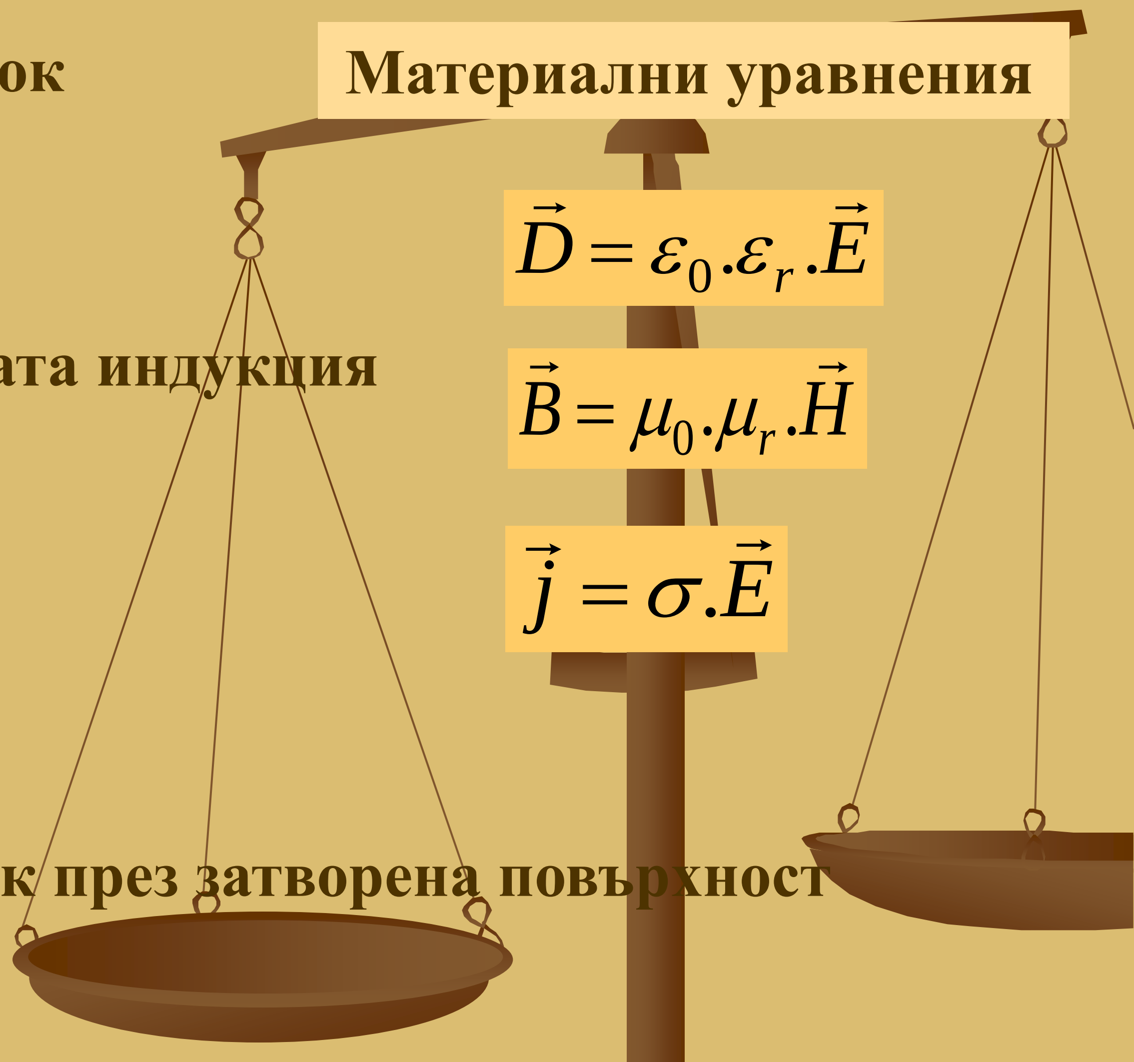
$$div\vec{B} = 0$$

Материални уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon_0.\varepsilon_r.\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0.\mu_r.\vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma.\vec{E}$$



Вълнови уравнения за електричното и магнитно поле на ЕМВ:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} . \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} . \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

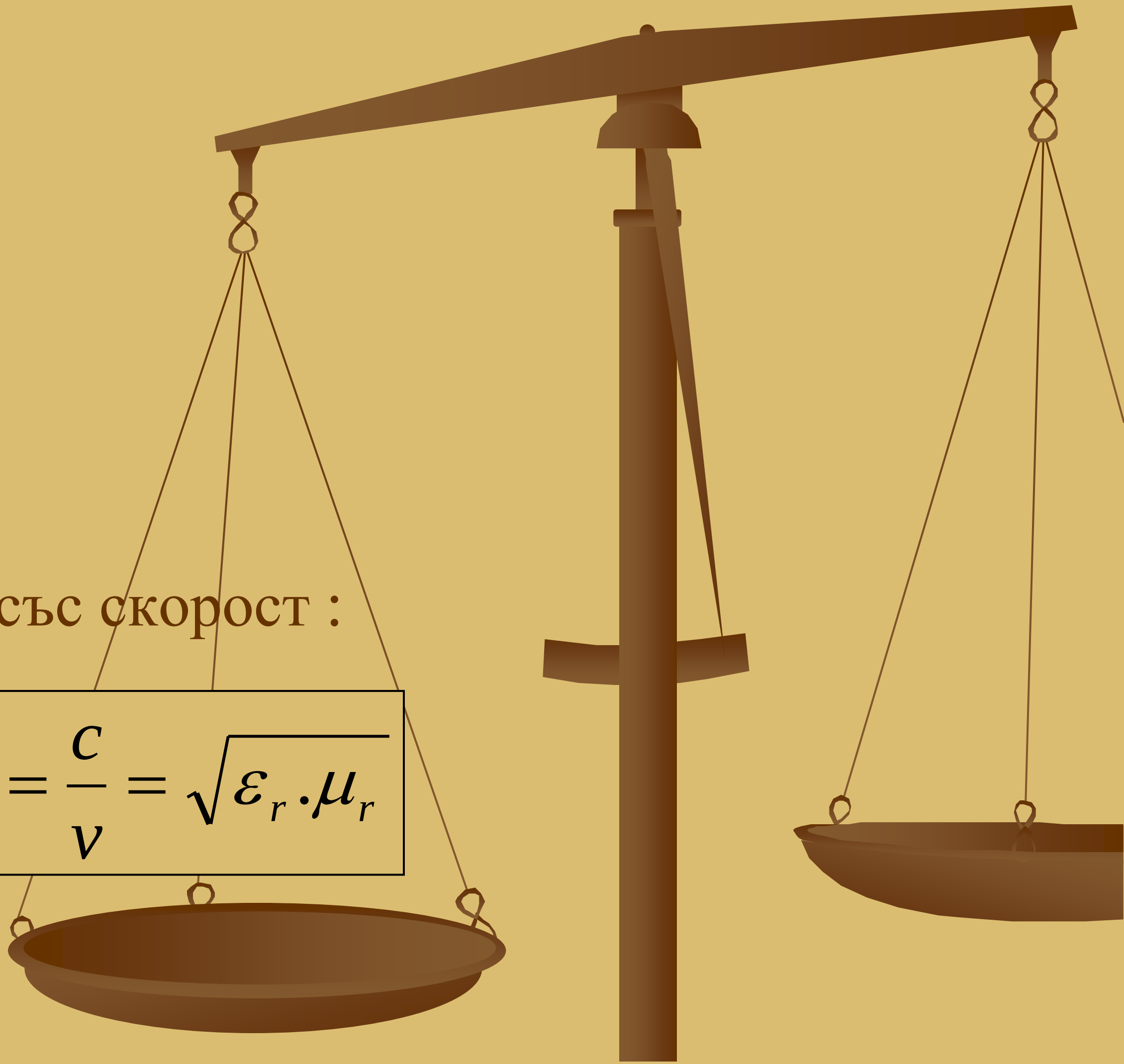
където $\varepsilon_0 . \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$$\varepsilon_0 . \mu_0 . \varepsilon_r . \mu_r = \frac{1}{v^2}$$

ЕМВ се разпространява със скорост :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r . \mu_r}}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r . \mu_r}$$



Решения на вълновите уравнения

Бягаща вълна, разпространяваща се със скорост v :

$$\boxed{E = E_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \alpha)}$$

$$\boxed{H = H_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \alpha)}$$

$\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ - дясно-винтова ортогонална система;

Тези вълни са напречни:

$$\vec{E}, \vec{H} \perp \vec{k}$$

$$\vec{E} \perp \vec{H}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon.\mu}$$

1.2. Видове бягащи вълни

а) Плоска вълна:

- вълновата повърхност е плоска равнина;
- E_0, H_0, α не зависят от r и t, т. е. в цялото пространство, във всеки момент време са еднакви.

б) Сферична вълна:

- вълновата повърхност е сферична равнина;
- амплитудите E_0, H_0 са обратно пропорционални на разстоянието до центъра.

1.3. Плоска монохроматична вълна

$$E = E_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \alpha)$$

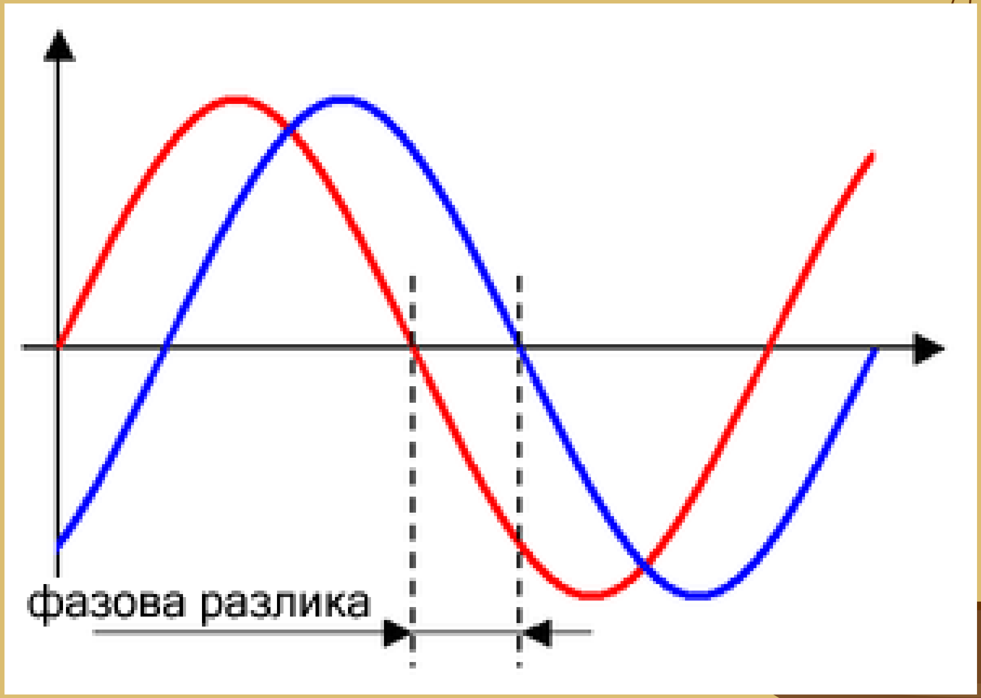
- Силно идеализирана – трябва да е ∞ дълга и да се разпространява ∞ дълго време.
- Всяка реална ЕМВ може да се представи като суперпозиция от такива прости вълни.
- Поради линейността на уравненията на Максуел, сумата от кои да е решения, също е решение.

Основни понятия:

- **амплитуда (E_0);**
- **начална фаза (α);**
- **фаза на вълната (φ)** – аргумента на cos;

$$E = E_0.\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \alpha)$$

Синята и червената вълни са с еднакви честоти, но имат фазово отместване.



Основни понятия:

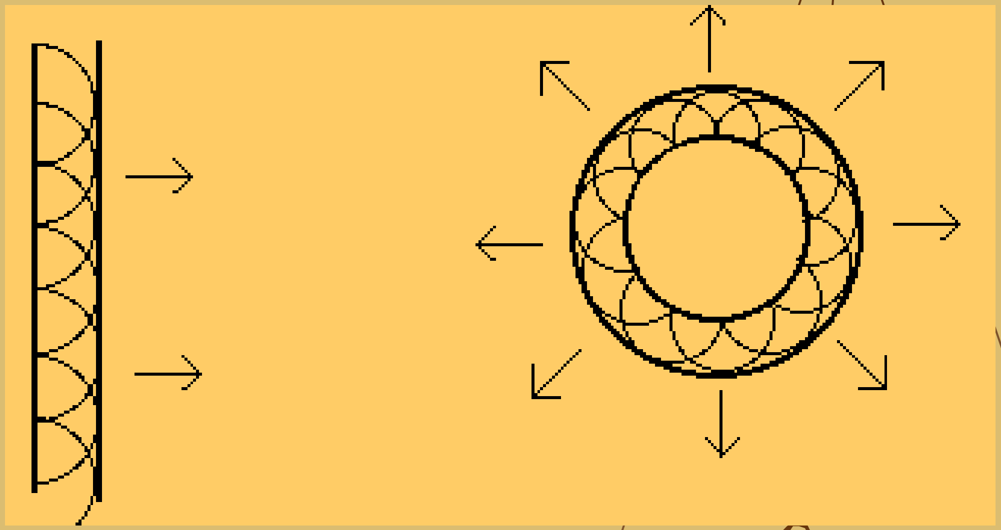
$$E = E_0 . \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \alpha)$$

- вълнова повърхност, вълнов фронт или

фазова повърхност

Повърхност с постоянна фаза (φ = const).

Определя в пространството равнина, перпендикулярна на вълновия вектор k .

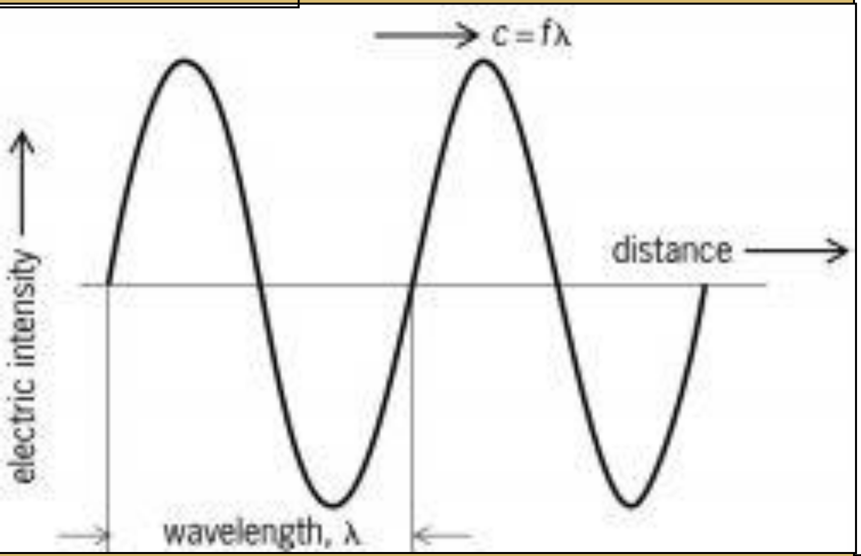


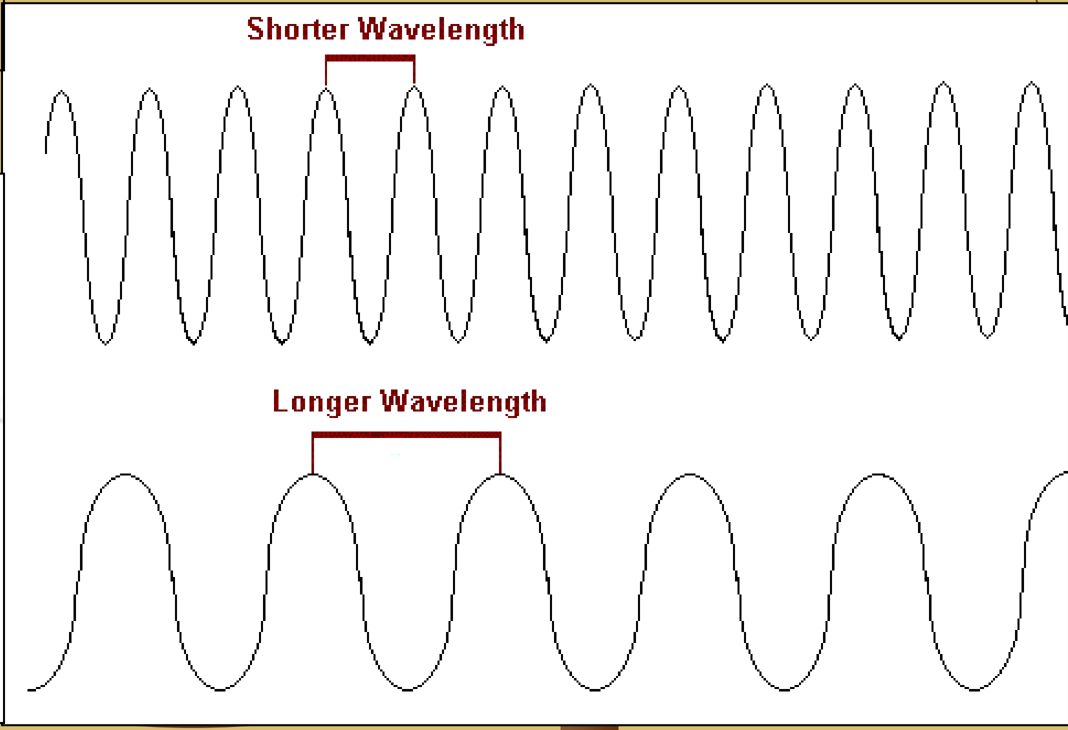
а) Плоска вълна б) Сферична вълна

- **дължина на вълната (λ)** – разстоянието между две най-близки (съседни) точки, за които трептенията са във фаза (фазовата им разлика е 2π) за даден момент време (t = const). Разстоянието, на което се премества вълновия фронт за време T;
- **вълново число ($\vec{k}$)** – определя посоката на разпространение на ЕМВ; показва колко дължини на вълните се нанасят в отрязък 2π; $\boxed{k = 2\pi / \lambda}$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k.(x_2 - x_1) = 2\pi}$$

$$\boxed{t = const}$$

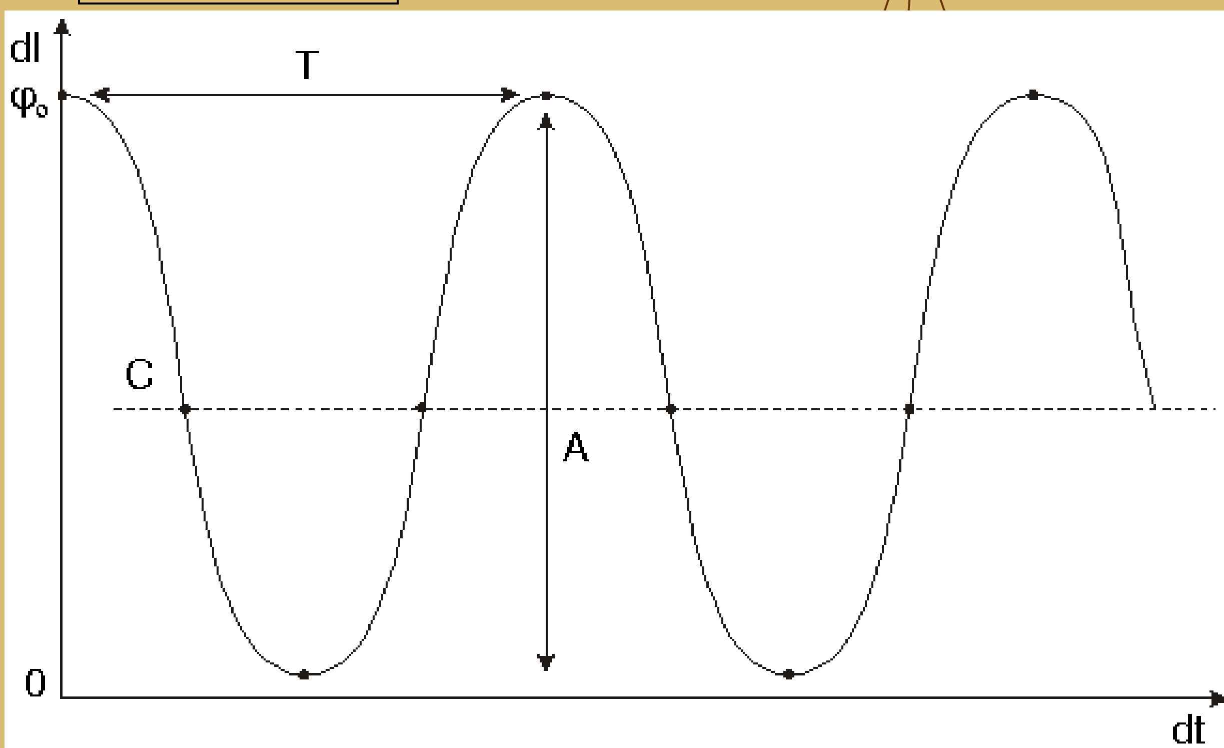




- **период на вълната (*T*)** – най-краткото време между два момента, за които трептенията на дадена точка (x = const) са във фаза (фазовата им разлика е 2π);
- **кръгова честота (ω)** - показва колко периода на вълните се нанасят в отрязък 2π $\boxed{T = 2\pi/\omega}$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega.(t_2 - t_1) = 2\pi}$$

$$\boxed{x = const}$$



2. Фазова и групова скорост

2.1 Фазова скорост

Скоростта, с която се разпространява всяка повърхност с постоянна фаза (φ = const), т.е. скоростта, с която се разпространява фронтът на вълната.

$$\varphi = \omega t - k.r + \alpha = const$$

$$d\varphi = \omega.dt - k.dr = 0$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$T = 2\pi/\omega$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

- Това понятие „фазова скорост“ е приложимо само за строго монохроматична вълна, разпространяваща се в среда без дисперсия.
- Тя не може да се определя експериментално.
- В среда с дисперсия: n = f (λ) или v = f (λ), резултатната вълна при разпространението си се деформира и скоростта е неопределено понятие.

2.2. Групова скорост

2.2.1. Вълнов пакет

- **Вълнов пакет** – Импулс, който може да се представи като сума от безкраен брой синусоиди, чиито честоти малко се отличават една от друга.

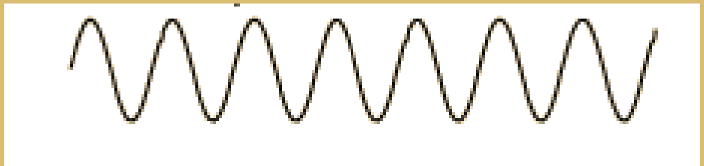
- Ако всички монохроматични синусоиди, с различно λ, се се разпространяват с една фазова скорост, независеща от λ, то импулсът (вълновият пакет) би се разпространявал с тази скорост, запазвайки своята форма, т.е. без да се деформира.

- Ако средата се характеризира с дисперсия ($\nu = f(\lambda)$), то импулсът се деформира, но това става бавно, ако дисперсията е слаба.

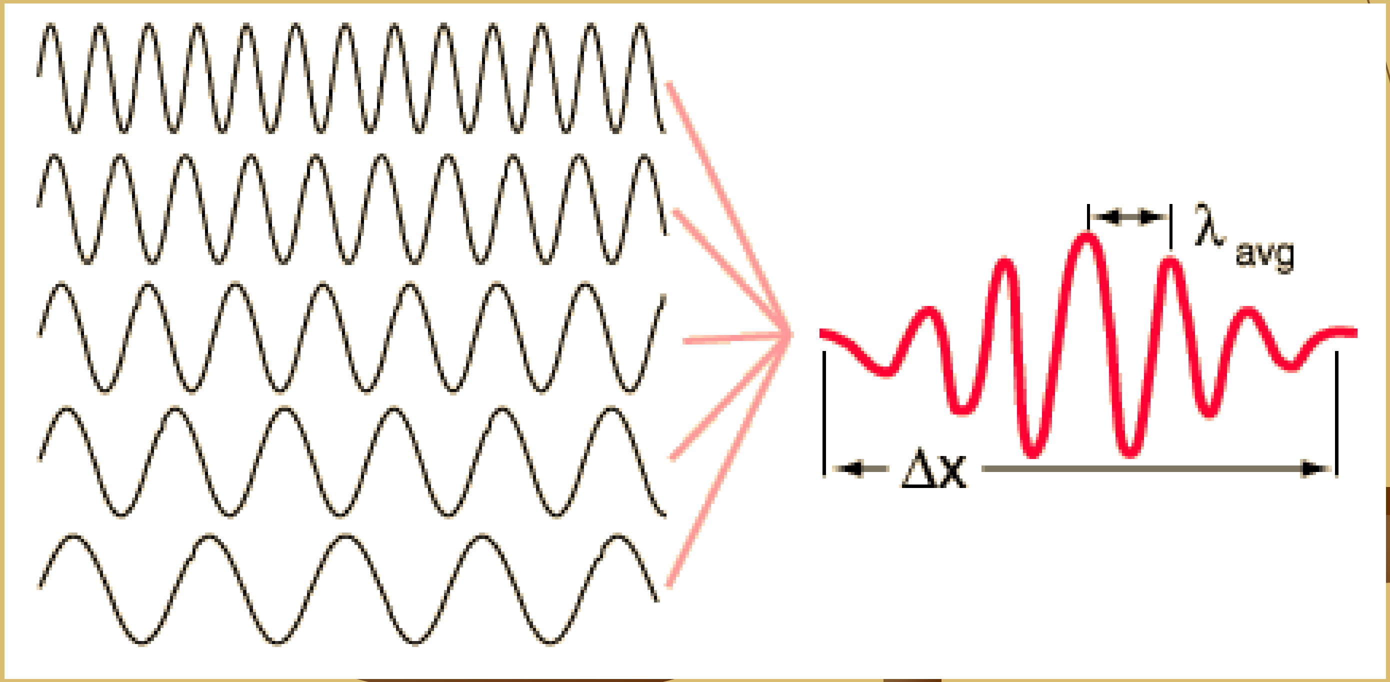
2.2. Групова скорост

2.2.1. Вълнов пакет

Монохроматична вълна



Вълнов пакет



2.2.2. Групова скорост

Скоростта на разпространение на максималната амплитуда от вълновия пакет.

Разглеждаме суперпозицията на 2 вълни, разпространяващи се независимо в една равнина с близки честоти и еднакви амплитуди.

$$\begin{cases} E_1 = E_0.\cos(\omega_1 t - k_1.r + \alpha) \\ E_2 = E_0.\cos(\omega_2 t - k_2.r + \alpha) \end{cases}$$

$$\omega_1 = \overline{\omega} + \delta\omega \qquad k_1 = \bar{k} + \delta k$$

$$\omega_2 = \overline{\omega} - \delta\omega \qquad k_2 = \bar{k} - \delta k$$

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

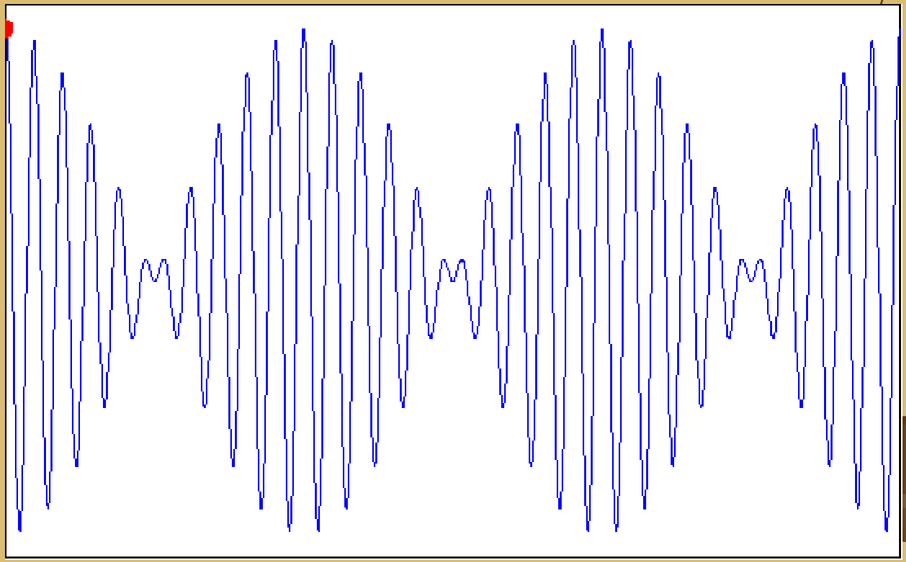
Получаваме хармонично трептене с амплитуда $E_0^{'}$, меняща се много бавно с времето и положението.

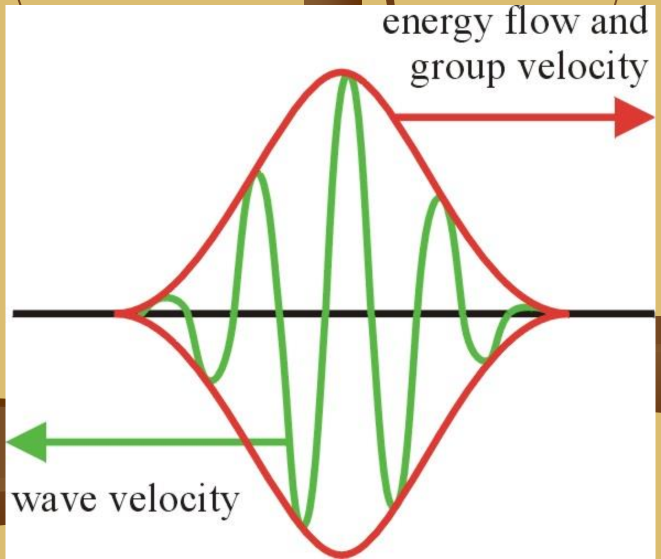
$$E = [2E_0.\cos(\delta\omega\,.t - \delta k.r)]'\cos(\overline{\omega}.t - \bar{k}.r + \alpha)$$

Ако вместо 2 вълни сумираме безкраен брой вълни се получава квазимонохроматична вълна с амплитуда отличаваща се от 0 в тесен интервал:

$$\overline{\omega} \pm \delta\omega$$

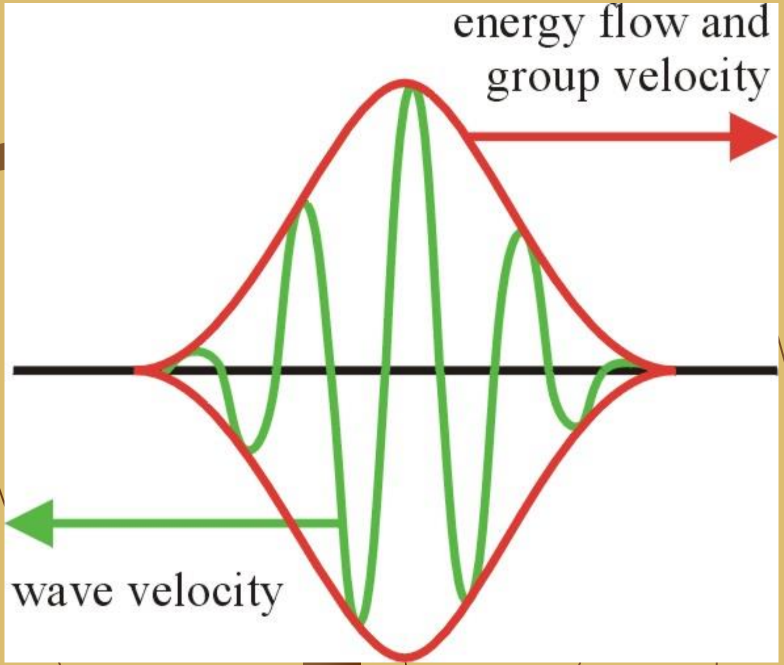
Тогава се говори за вълнов пакет, който се разпространява с групова скорост.





Групова скорост - Скоростта на разпространение на равнината на постоянната амплитуда, а и следователно енергията, пренасяна от вълновия пакет.

$$E_0^{/} = 2E_0.\cos(\delta\omega\,.t - \delta k.r)$$



$$\delta\omega\,.t - \delta k\,.r = const$$

$$\delta\omega\,.dt - \delta k\,.dr = 0$$

$$\boxed{u_{гр} = \frac{dr}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k}}$$

Извод:

1. Монохроматичната вълна се характеризира с фазова скорост $v = \omega/k$, означаваща скорост на преместване на фазата.

2. Вълновият пакет се характеризира с групова скорост $u_{гр} = d\omega/dk$, съответстваща на скоростта на разпространение на полето на този пакет.

2.3. Връзка между фазова и групова скорост

а) формула на Релей

$$u_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v.k)}{dk} = v + k.\frac{dv}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u_{гр} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

- нормална дисперсия - $dv/d\lambda > 0$, т.е. $u\ гр < v$

- аномална дисперсия - $dv/d\lambda < 0$, т.е. $u\ гр > v$

б) друга форма на закона

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n(\lambda)},$$

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2(\lambda)} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$u_{гр} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

$$u_{гр} = v + \frac{c.\lambda}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

- *нормална дисперсия* – $dn / d\lambda < 0$

- *аномална дисперсия* – $dn / d\lambda > 0$

- Ако n не зависи от $\lambda \Rightarrow u\ гр = v$.

  Не се наблюдава дисперсия.

- Ако n зависи от $\lambda \Rightarrow u\ гр \neq v$.

  Наблюдава се дисперсия.