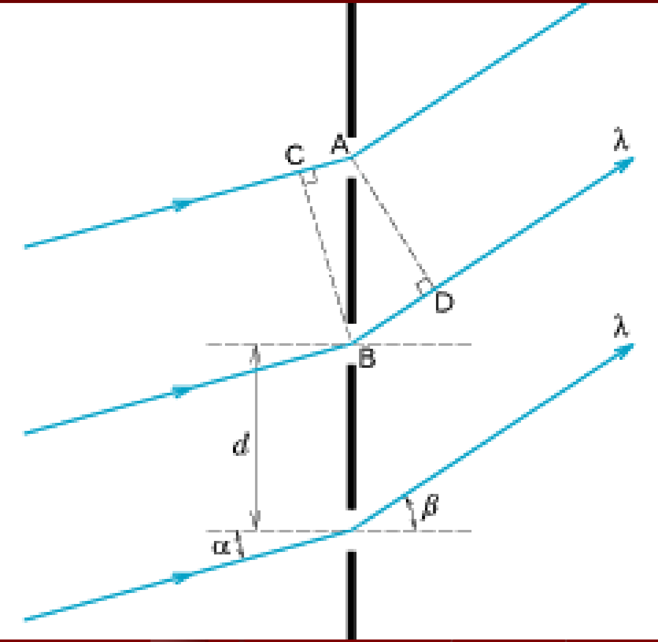
# ЛИНЕЙНА ДИФРАКЦИОННА РЕШЕТКА

Лектор: проф. д-р Т. Йовчева

# 1. Линейна дифракционна решетка

Съвкупност от голям брой еднакви процепи, отстоящи един от друг на еднакво разстояние.

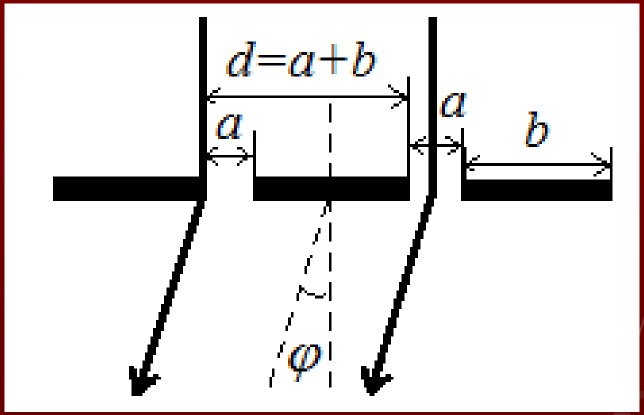



*a* - ширина на процепа

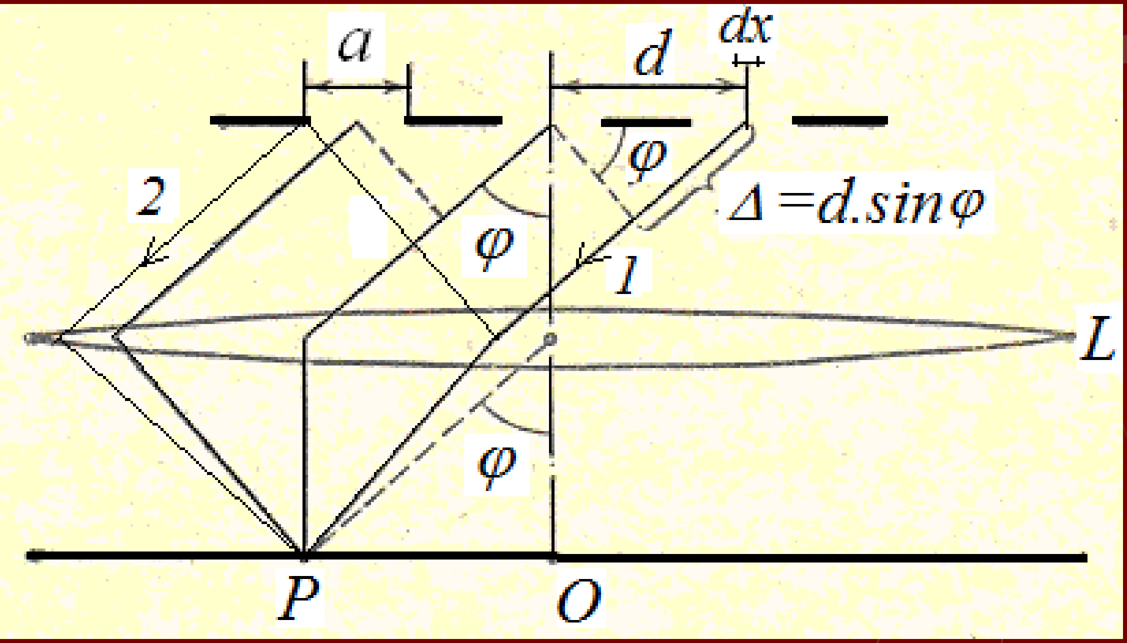
*b* – ширина на преградата

$d = a + b$ - период (константа на решетката)

Нормално падане: $i=0$



Успоредно на дифракционната решетка поставяме събирателна леща *L*, във фокалната равнина на която има екран. Разглеждаме нормално падане на плоска монохроматична вълна.




Всеки от процепите ще даде дифракционна картина на екрана. Картините от всички процепи ще са разположени на едно и също място на екрана.

Независимо от положението на процепа, централният му максимум лежи срещу центъра на лещата т.*O*.

Ако трептенията, достигащи до т. Р от различните процепи са некохерентни, то резултатната дифракционна картина (ДК) от N процепа ще се отличава от ДК от един процеп, само по интензитетът, който ще нарастне *N* пъти , т.е.

$$I = N.I_{\varphi}$$

$I_{\varphi}$ - интензитетът, създаден от един процеп

Но! Трептенията от различните процепи са кохерентни $\Rightarrow$ те ще интерферират. Резултантното трептене в т. Р, положението на която точка се определя от ъгъл $\varphi$, ще се получи от сума на *N* трептения с еднаква амплитуда $A_{\varphi}$, отместени едно спрямо друго по фаза на една и съща величина $\delta$:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta$$

## 2. Разпределение на интензитета на светлината

$$I(P) = I_0 . \frac{\sin^2\left(N.\frac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)^2}$$

Въвеждаме означенията:

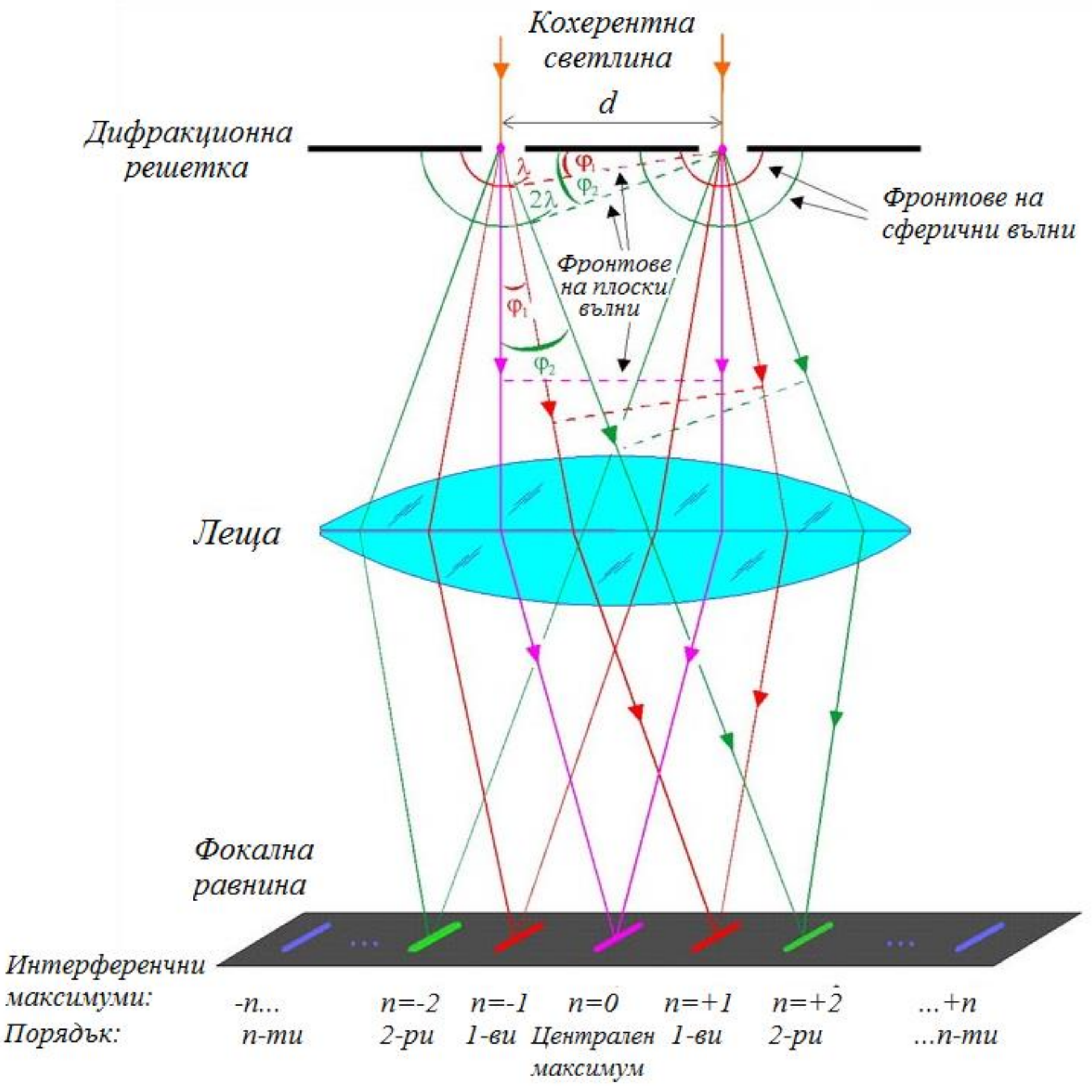
$$\frac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi = u$$

$$\frac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi = v$$

Тогава :

$$I(P) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin Nv}{\sin v}\right)^2 \qquad (1)$$

# Ход на кохерентна светлината през дифракционна решетка на пропускане



**Анализ:**

$$I(P) = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin N\nu}{\sin \nu} \right)^2$$

А/ $$I_1 = \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

Характеризира разпределението, предизвикано от дифракция от един процеп.

В/ $$I_2 = \left( \frac{\sin N\nu}{\sin \nu} \right)^2$$

Характеризира многолъчевата интерференция на лъчите, излизащи от всички процепи

**а)** изследване на $I_1 = \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$ - дифракционен множител

1) Централен максимум

$\varphi = 0$ $\Rightarrow$ u = 0 $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

2) Минимуми

В тези точки $\frac{\sin u}{u} = 0$, т.е. интензитетът, създаден от всеки процеп поотделно е 0: $I = 0$

Това е при: $\sin u = 0 \Rightarrow \quad u = k\pi, \quad но \quad u \neq 0$

$$\frac{\pi}{\lambda} a.\sin\varphi = k\pi$$

$$\sin\varphi = k\frac{\lambda}{a} \quad , \; k = 1, 2, 3...$$

**б) изследване на** $I_2 = \left( \dfrac{\sin N\nu}{\sin \nu} \right)^2$ - интерференчен множител (при многолъчева интерференция)

**1) Главни максимуми**: При $\nu = m\pi \;, \; m = 0, 1, 2\ldots$

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin\varphi = m\pi \Rightarrow .$$

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{d}, \;\; m = 0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

Тези максимуми се наричат главни максимуми,

а *m* – порядък на главния максимум.

Има един нулев и по два максимума от $1^{\text{-ви}}$, $2^{\text{-ри}}$ ... порядък.

$$I_2 = \left( \frac{\sin N\nu}{\sin \nu} \right)^2$$

2) Минимуми $I = 0$ $\sin N\nu = 0,\ \ N\nu = m'\pi$ $N\frac{\pi}{\lambda} d \sin\varphi = m'\pi$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{m'}{N}\frac{\lambda}{d}} \quad (4)$$

$$m' = 1, 2, \ldots (N-1), (N+1), \ldots, (2N-1)$$

$$\sin\varphi = \left( m + \frac{k}{N} \right) . \frac{\lambda}{d}, \quad k = 1, 2, \ldots . (N-1)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{2}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{3}{4}\frac{\lambda}{d}; \ldots; \ \frac{\lambda}{d}\frac{5}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{6}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{7}{4}\frac{\lambda}{d}; \ldots; 2\frac{1}{4}\frac{\lambda}{d}; 2\frac{2}{4}\frac{\lambda}{d}$$

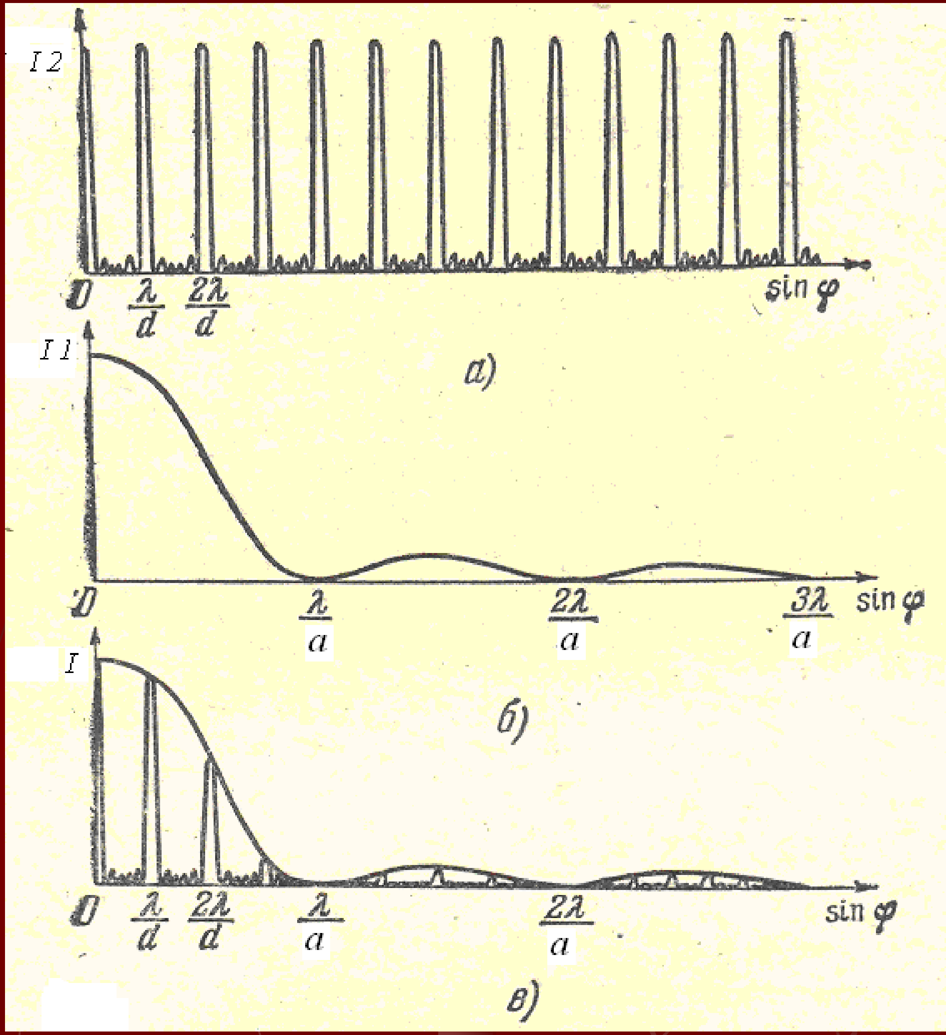
**Извод:** Между всеки два главни max се намират (N-1) min и (N-2) вторични max.

Резултантната картина се получава от наслагването на двете картини: интерференция от много лъчи и дифракция от всеки процеп.

Тези интерференчни max, за които се изпълнява едновременно и условието за min на дифракционната картина изчезват, т.е. главните max изчезват ако:

$$m\frac{\lambda}{d} = k\frac{\lambda}{a} \rightarrow m = \frac{d}{a}k$$

**N=6**

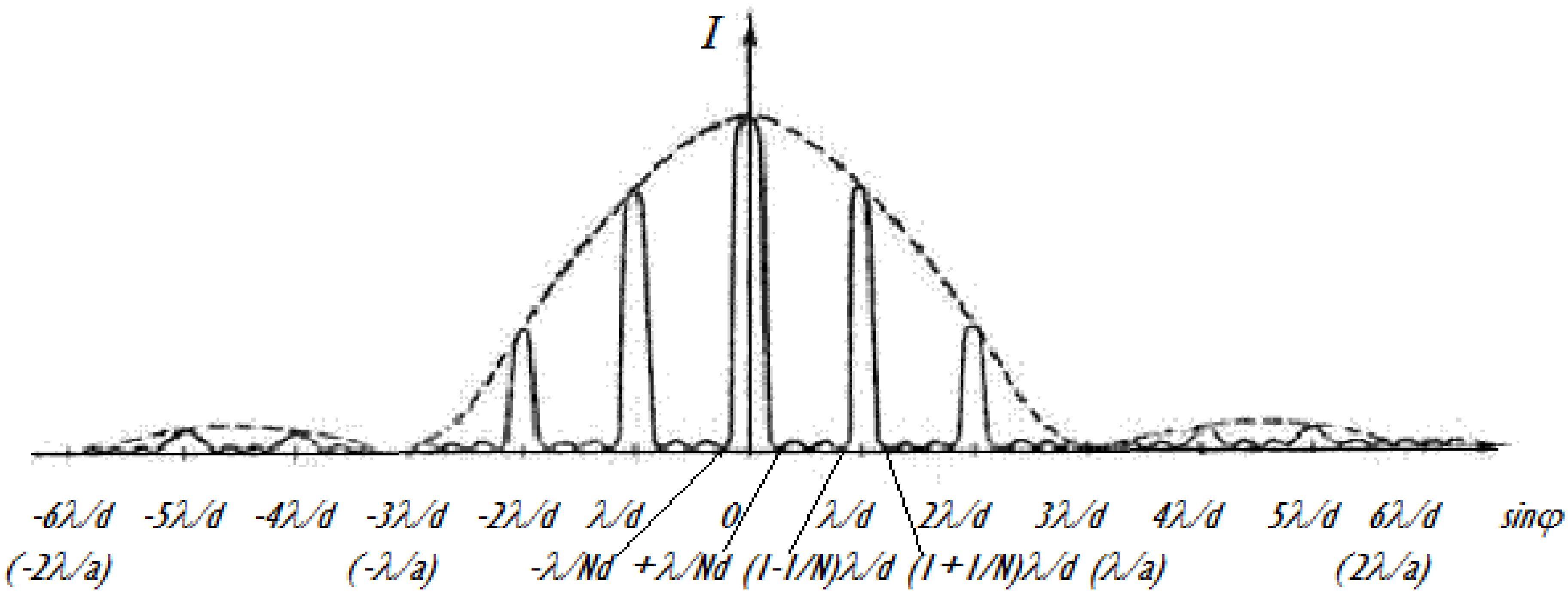



Означаваме $\frac{d}{a} = m_0$ $\Rightarrow$ Всеки $m_0$ главен максимум ще изчезне $\Rightarrow$ наблюдават се 0-лев, 1-ви, 2-ри главни max.

$$\frac{d}{a} = m_0$$

Пример:

$d = 3a$ , N=4




$d = 3a \Rightarrow \frac{m\lambda}{3a} = \frac{k\lambda}{a} \Rightarrow m = 3k$ ⇒всеки трети главен максимум ще изчезва.

Наблюдава се картина само от централния дифракционен максимум, т.к. интензитетът на първия дифракционен максимум е $4,7\% I_0 \Rightarrow$ за дифракционен минимум се разглежда k = ±1 $\Rightarrow$

$$m\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow m = \frac{d}{a} = m_0$$

Толкова главни максимума $m_0$ се наблюдава в централния дифракционен максимум.

Наблюдавана картина при N = 4, $d/a = 3 = m_0$

**Основни характеристики** на всеки спектрален прибор са дисперсията и разделителната способност.

3 Дисперсията определя ъгловото или линейното разстояние между две спектрални линии, отличаващи се по дължината на вълната с единица (например 1Å).

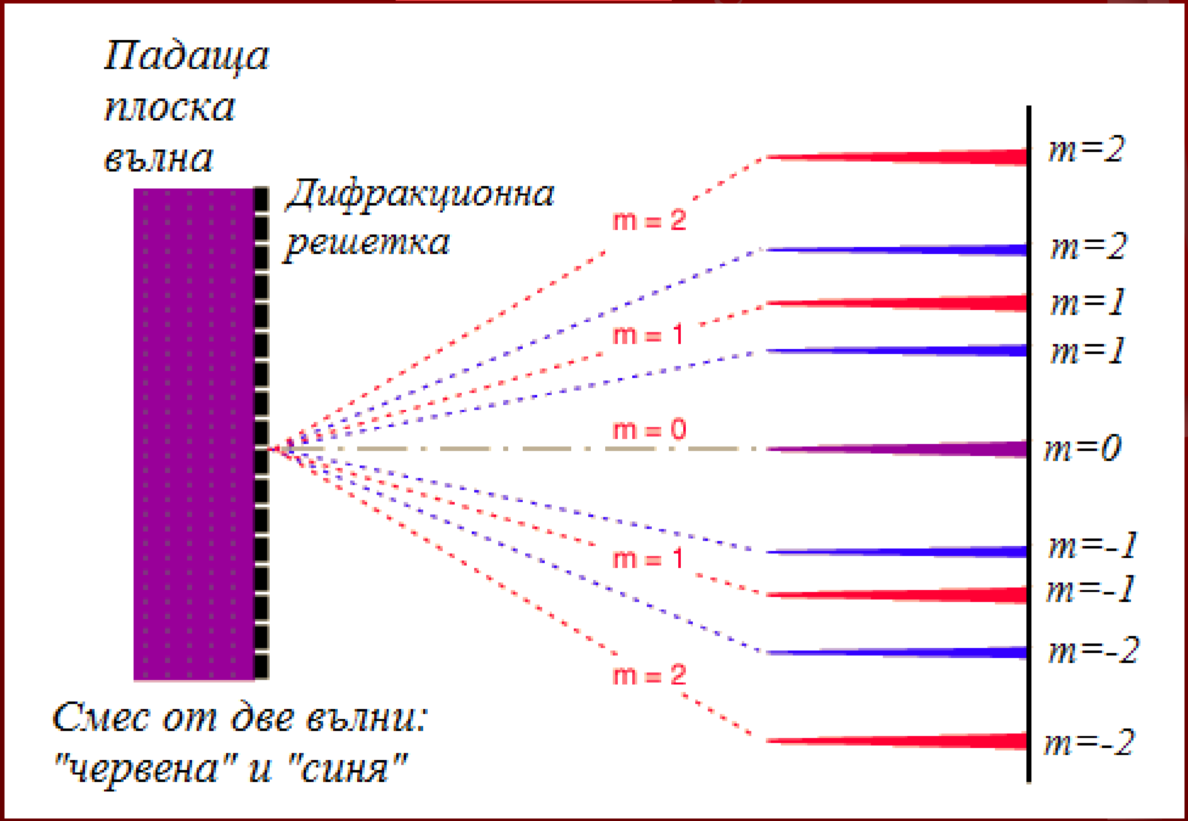
4. Разделителната способност определя минималната разлика в дължините на вълните $\Delta\lambda$, при която две линии в спектъра се възприемат разделено.

## 3. Дисперсия на дифракционната решетка

### 3.1 Ъглова дисперсия на дифракционна решетка

Ъгловото разстояние между две спектрални линии, различаващи се по дължина на вълната с $\Delta\lambda$ (~1Å)

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} \qquad (5)$$



Характеризира разтегнатостта на спектъра по ъгли на дифрактиране.

За да намерим $D_\varphi$ ще диференцираме условията за главни максимуми отляво по $\varphi$, отдясно по $\lambda$

$$d\sin\varphi = m\lambda$$

$$d\cos\varphi \,.\, \mathrm{d}\varphi = m\mathrm{d}\lambda$$

(6)
$$D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

При малки ъгли на дифракция $\varphi$, $\cos\varphi \sim 1$:
$$D_\varphi = \frac{m}{d}$$

$L = d.N$ , където $L$ – дължина на ДР, $N$ – броя процепи

$$D_\varphi = m\frac{N}{L}$$

## 3.2 Линейна дисперсия на дифракционна решетка

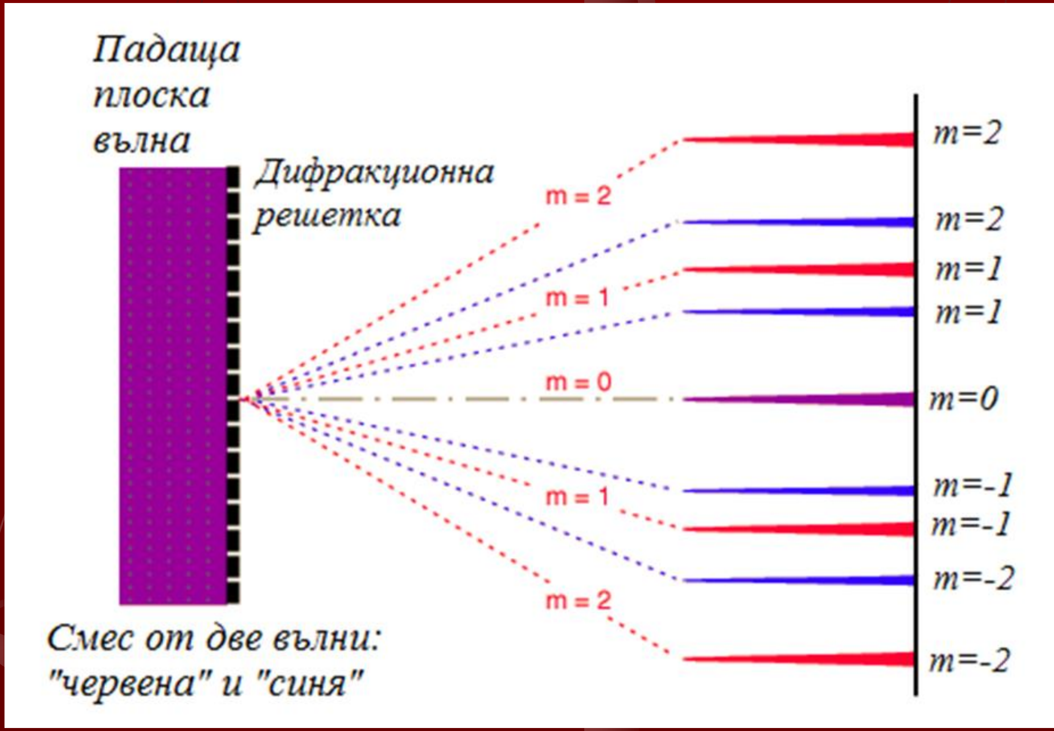
$$D_l = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}$$

Линейното разстояние d$l$ във фокалната равнина на лещата (на екрана), между две спектрални линии, отличаващи се по дължина на вълните d$\lambda$. При малки ъгли $\varphi$:

$$\mathrm{d}l = f.\mathrm{d}\varphi$$

f – фокусното разстояние на лещата

$$D_l = f\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = f.D_\varphi$$

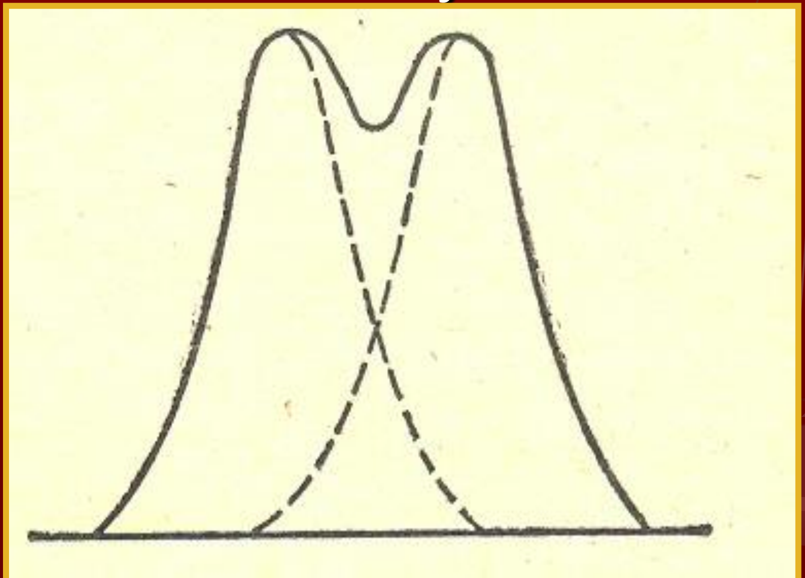


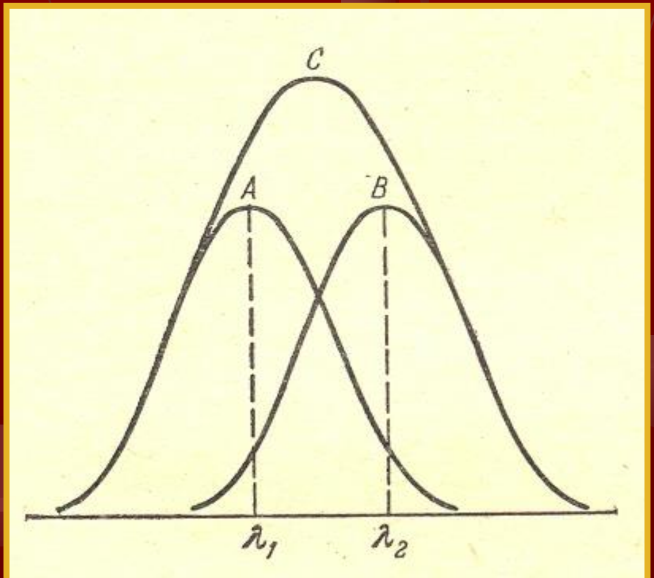
# 4. Разделителна способност

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$ - безразмерна величина,

$\Delta\lambda$ - минималната разлика между две спектрални линии, които се възприемат разделени.

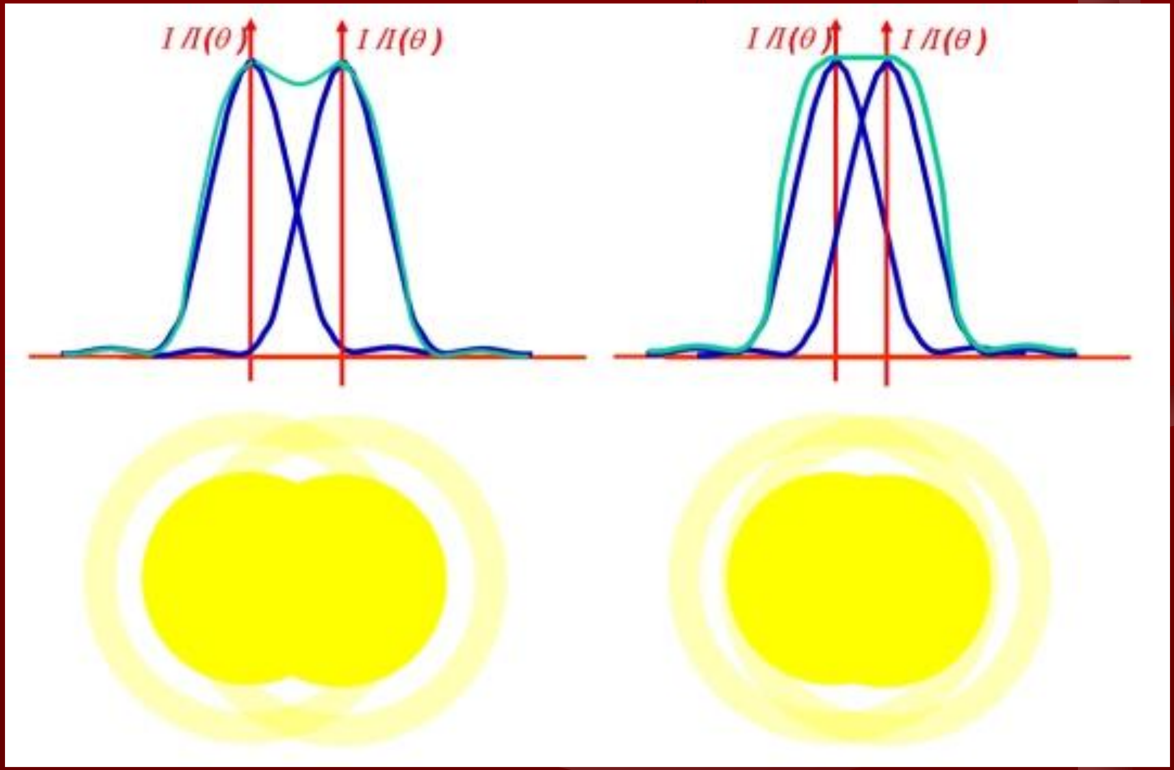
Възможностите за разделяне на две близки спектрални линии зависи не само от разстоянието между тях (което се определя от дисперсията на прибора), но и от ширината на спектралния максимум.





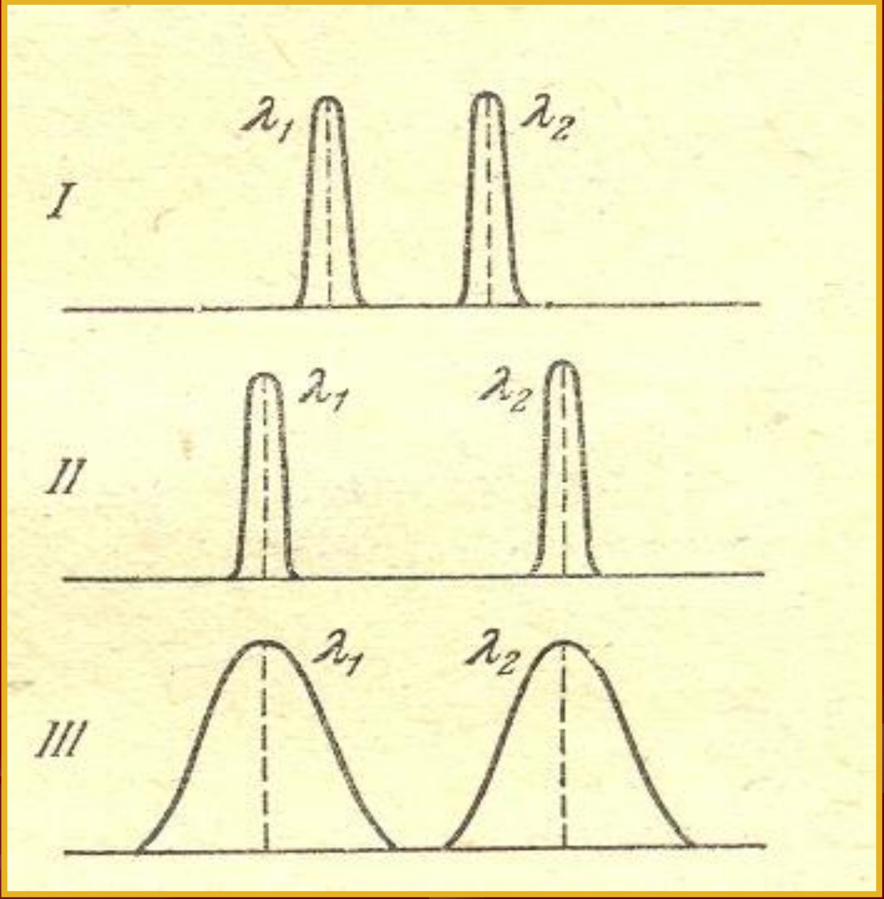
Два близки максимума се възприемат от окото разделени, ако интензитетът в промеждутъка (min) между тях е не повече от 80% от интензитета на максимума, т.е. $I_{\min} \leq 0.8 I_0$.

Според критерия на Релей, такова съотношение на интензитетите се получава, ако максимума на едната линия съвпада с минимума на другата.



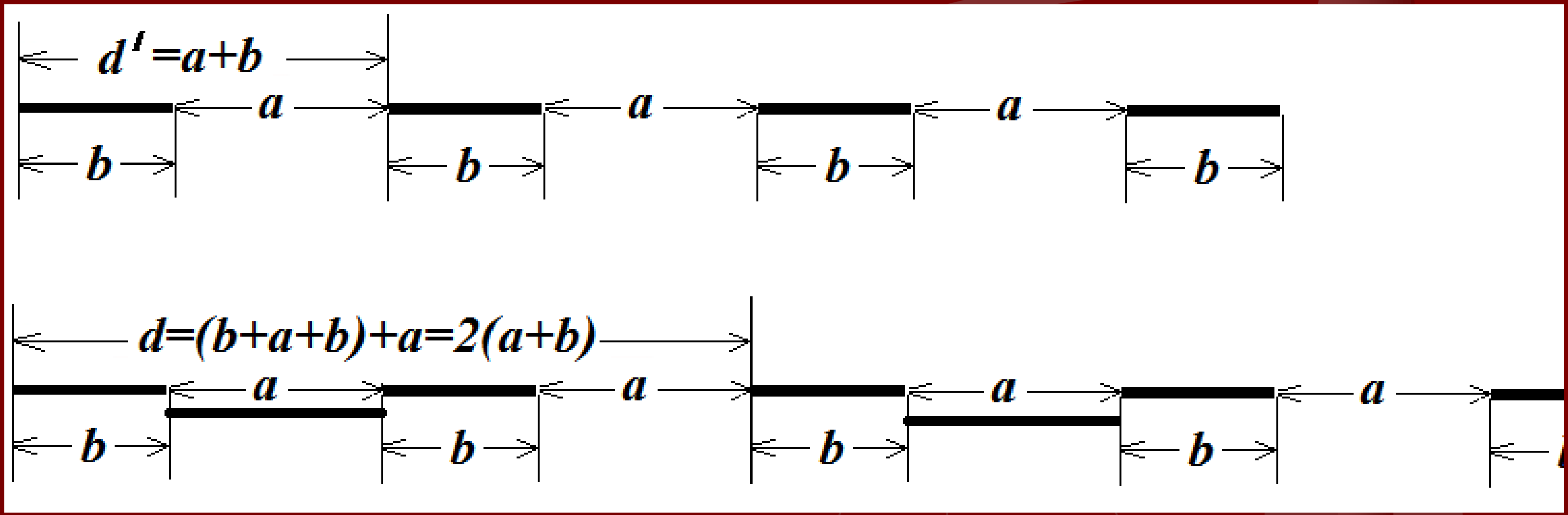
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

Следователно, разделителната способност на ДР ($R$) е пропорционална на порядъка на главния максимум ($m$) и на броя на процепите ($N$), т.е. увеличавайки ($N$), можем да използваме по-малък порядък.



**Задача 1.** Върху дифракционна решетка с константа d′, съдържаща N′ процепа, пада нормално плоска светлинна вълна. Процепите на дифракционната решетка се закриват през един. Определете как ще се изменят:

а) положението на максимумите в дифракционната картина;




$$d = 2d'$$

$$N = \frac{N'}{2}$$

$$(\sin\varphi)_{\max} = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{2d'}$$

а) Max се сгъстяват: разполагат се двойно по-нагъсто.

$$(\sin\varphi)_{\min} = \left(m + \frac{k}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{Nd} = \frac{k\lambda}{(N'/2)2d'} = \frac{k\lambda}{N'd'}$$

б) Ширината на max не се променя.

**Задача 2.** Върху дифракционна решетка с константа d′, съдържаща N′ процепа, пада нормално плоска светлинна вълна. Половината от общия брой на процепите на дифракционната решетка се закриват с непрозрачен екран.

Определете как ще се изменят:

а) положението на максимумите в дифракционната картина;

б) ширината на максимумите.

$$d = d'$$

$$N = \frac{N'}{2}$$

$$(\sin\varphi)_{\max} = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d'}$$

а) Положението на max не се изменя.

$$(\sin\varphi)_{\min} = \left(m + \frac{k}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{Nd} = \frac{k\lambda}{(N'/2)2d'} = \frac{k\lambda}{N'd'}$$

б) Ширината на max се удвоява.

**Задача 3.** Върху дифракционна решетка пада нормално светлина от натриева лампа с дължина на вълната $\lambda_1 = 589$ nm, при което спектралният максимум от трети порядък $(m_1 = 3)$ се получава при ъгъл на дифракция $\prec \varphi_1 = 10^\circ$. Каква трябва да бъде дължината на вълната, за да бъде ъгълът на дифракция за спектралния максимум от втори порядък $(m_2 = 2)$ равен на $\prec \varphi_2 = 6^\circ$?

Условия за максимум

$$d \sin \varphi_1 = m_1 \lambda_1$$

$$d \sin \varphi_2 = m_2 \lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{m_1 \lambda_1 \sin \varphi_2}{m_2 \sin \varphi_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{3.589.10^{-9} \sin 6^\circ}{2 \sin 10^\circ} = 532.10^{-9}\, m$$

**Задача 4.** Върху дифракционна решетка с дължина $L = 1$ mm, съдържаща $N = 500$ процепа пада светлина с дължината на вълната $\lambda = 590$ nm. Определете максималния порядък на спектъра, ако:

а) светлината пада нормално върху дифракционната решетка;

б) светлината пада под $\measuredangle\varphi = 30^\circ$ върху дифракционната решетка.

Условия за максимум $d\sin\varphi = m\lambda$

$$m = \frac{d\sin\varphi}{\lambda} \qquad d = \frac{L}{N} \qquad m = \frac{L\sin\varphi}{N\lambda}$$

$$\sin\varphi = 1 \qquad m = \frac{L}{N\lambda} \qquad m = \frac{1.10^{-3}}{500.590.10^{-9}} = 3{,}4$$

а) Максималният порядък ще е 3.

$$\sin 30^\circ = 0{,}5 \qquad m = \frac{0{,}5.1.10^{-3}}{500.590.10^{-9}} = 1{,}7$$

б) Максималният порядък ще е 1.

**Задача 5.** Върху дифракционна решетка с общ брой на процепите $N = 1000$ пада нормално плоска вълна, която съдържа две дължини на вълната: $\lambda_1 = 460$ nm и $\lambda_2 = 460{,}2$ nm. Определете при какви порядъци на спектъра тези две линии ще се възприемат разделени?

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = mN$$

$$m = \frac{\lambda_1}{N(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$m = \frac{460.10^{-9}}{1000.(460{,}2 - 460).10^{-9}} = 2{,}3$$

Двете линии на спектъра могат да се възприемат разделени като две отделни линии в дифракционните максимуми с порядък по-голям от 2, т.е. при m = 3, 4, 5… .

**Задача 6а.** Плоска светлинна вълна от натриева лампа, която съдържа две дължини на вълните: $\lambda_1$=589 nm и $\lambda_2$=589,6 nm пада нормално върху дифракционна решетка с константа $d = 1,7.10^{-6}$ m.
а) Определете максималният порядък, който може да се наблюдава за натриевата линия $\lambda_1$=589 nm.

Условия за максимум $$d \sin \varphi = m\lambda_1$$

$$m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda_1}$$

$$m \le \frac{d}{\lambda_1}$$

$$m \le \frac{1,7.10^{-6}}{589.10^{-9}} = 2,89$$

Тъй като *m* трябва да бъде цяло число, то максималният порядък е $m = 2$.

**Задача 6б.** Плоска светлинна вълна от натриева лампа, която съдържа две дължини на вълните: $\lambda_1$=589 nm и $\lambda_2$=589,6 nm пада нормално върху дифракционна решетка с константа $d = 1{,}7.10^{-6}$ m.

б) Определете ъгловата дисперсия на дифракционната решетка за максималния порядък.

$$D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

От условието за максимум:

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda_1}{d}$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda_1}{d}\right)^2}$$

$$D_\varphi = \frac{m}{d\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda_1}{d}\right)^2}}$$

$$D_\varphi = \frac{2}{1{,}7.10^{-6}\sqrt{1 - \left(\frac{2.589.10^{-9}}{1{,}7.10^{-6}}\right)^2}} = 1{,}63.10^6\, rad/m$$

**Задача 6в.** Плоска светлинна вълна от натриева лампа, която съдържа две дължини на вълните: $\lambda_1$=589 nm и $\lambda_2$=589,6 nm пада нормално върху дифракционна решетка с константа $d = 1{,}7.10^{-6}$ m.

в) Определете разделителната способност на решетката, необходима за разделяне на линиите на натриевия дублет.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$R = \frac{589.10^{-9}}{589{,}6.10^{-9} - 589.10^{-9}} = 982$$

**Задача 6г.** Плоска светлинна вълна от натриева лампа, която съдържа две дължини на вълните: $\lambda_1$=589 nm и $\lambda_2$=589,6 nm пада нормално върху дифракционна решетка с константа $d = 1{,}7.10^{-6}$ m.

г) Определете дължината на решетката, необходима за разделяне на линиите на дублета.

$$R = mN$$

$$N = \frac{L}{d}$$

$$L = \frac{Rd}{m}$$

$$L = \frac{982.1{,}7.10^{-6}}{2} = 0{,}83.10^{-3}\,m$$