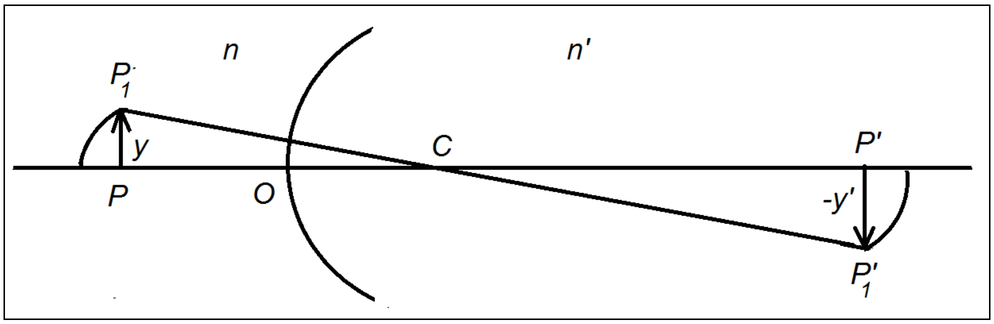
ИНВАРИАНТ НА ЛАГРАНЖ-ХЕЛМХОЛЦ

1. Инвариант на Лагранж-Хелмхолц

До сега разглеждахме точков обект и неговия точков образ, получаван от сферична пречупваща повърхност. Какъв ще бъде образът на права, перпендикулярна към оптичната ос?



Ако ъгълът, на който сме завъртяли оста PC е малък, то дъгите PP_1 и $P'P'_1$ са малки и можем да ги заменим с праволинейните участъци (отрязъци) y и y', перпендикулярни към оста POP'.

- Образът на малък, праволинеен отрязък y, перпендикулярен към главната оптична ос е отрязък y', също перпендикулярен към главната оптична ос.

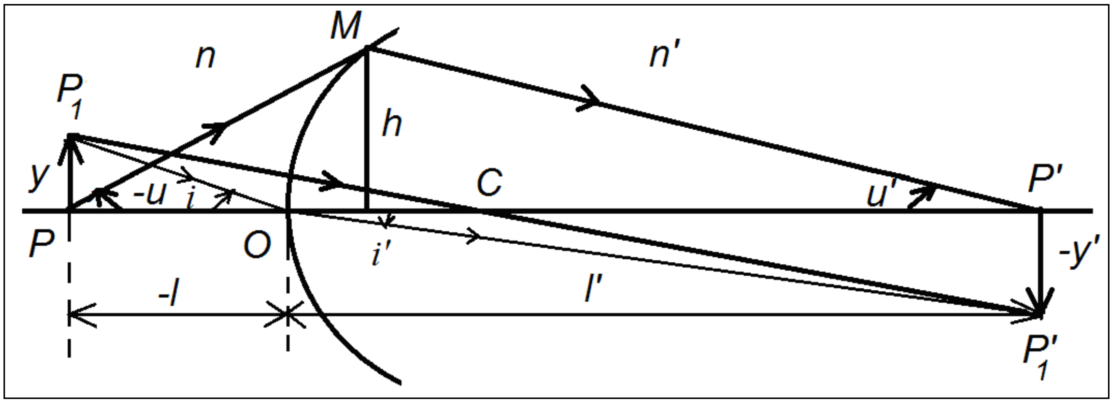
- Образът на плоска повърхност ΔS, перпендикулярна към оптичната ос ще бъде също плоска повърхност $\Delta S'$, перпендикулярна към главната оптична ос.

- Използваме следното правило за знаците:
  Образите перпендикулярни на главната оптична ос: (+) ако са насочени нагоре, (-) ако са насочени надолу

За снопове със значителна апертура (непараксиални лъчи) получаването на ясен образ е възможно при изпълнение на условието за синусите на Аббе

$$\boxed{y_1 n_1 \sin u_1 = y_2 n_2 \sin u_2} \qquad (0)$$

Извод: Условието на Лагранж-Хелмхолц или условието (0) налагат ограничения върху свободата на преобразуване на светлинните снопове чрез оптична система, свързвайки апертурата u_1 и размера y_1 на предмета с апертурата u_2 и размера y_2 на образа.



Фиг.1

Разглеждаме параксиални лъчи:

$$ni = n'i' \tag{1}$$

Но $i = \dfrac{y}{-l}; i' = -\dfrac{y'}{l'}$

От (1) $\Rightarrow$

$$\frac{ny}{l} = \frac{n'y'}{l'} \tag{2}$$

$$\frac{nyh}{l} = \frac{n'y'h}{l'},$$

но $\dfrac{h}{-l} = -u; \quad \dfrac{h}{l'} = u' \quad \Rightarrow$

$$\boxed{nyu = n'y'u'} \tag{3}$$

Ако лъчите пресичат редица повърхности 1, 2, 3,..... съотношение (3) може да се приложи последователно за всяка повърхност и тогава се получава (за параксиални лъчи):

$$\boxed{nyu = n'y'u' = n''y''u'' = \ldots} \tag{4}$$

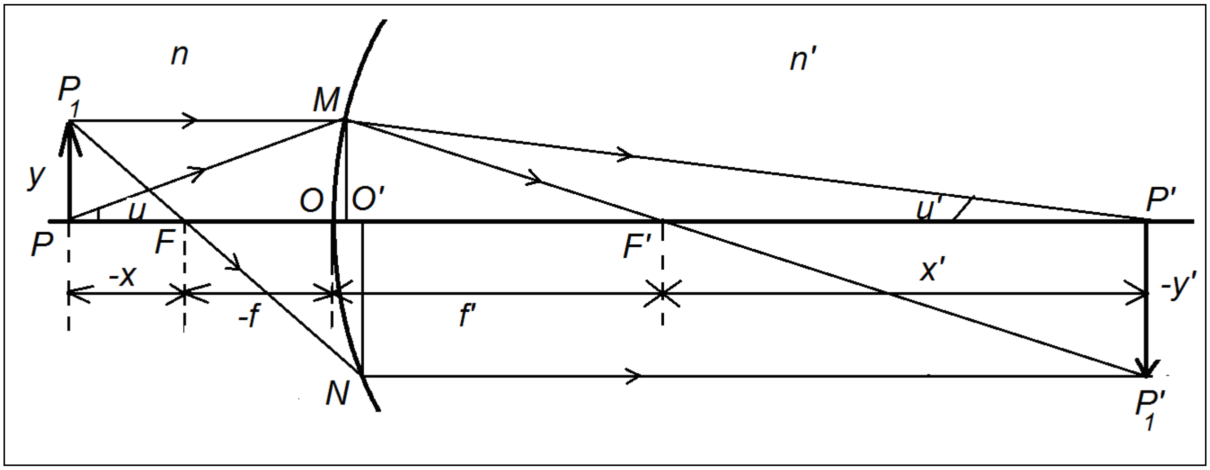
Уравнение (3) може да се напише и за цялата оптична система, разбирайки под n', y', u' - величините, отнасящи се към последната среда.

$\boxed{ynu}$ - **инвариант на Лагранж-Хелмхолц**

2. Линейно увеличение:

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y}} \tag{5}$$

Означаваме: y – дължината на обекта; y' – дължината на образа.



От Δ PFP$_1$ и ΔO'NF: $$-\frac{y'}{y} = \frac{-f}{-x} \rightarrow \beta = -\frac{f}{x} \tag{6}$$

От Δ F'P'P'$_1$ и ΔO'MF': $$-\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'} \rightarrow \beta = -\frac{x'}{f'} \tag{7}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \tag{8}$$

- Линейното увеличение не зависи от размера на предмета y. Затова образът на плосък предмет, перпендикулярен на оптичната ос ще бъде подобен на предмета.

- Образът на предмет, имащ размер по оптичната ос, няма да бъде подобен на предмета: $\beta = \beta(x)$

От (3) $\Rightarrow$ $\frac{y'}{y} = \frac{nu}{n'u'}$

$$\boxed{\beta = \frac{nu}{n'u'}} \tag{9}$$

3. Ъглово увеличение

$$\boxed{\gamma = \frac{u'}{u}} \tag{10}$$

От фиг. 1 $\Rightarrow$

u – ъгъл, под който се вижда обекта от разстояние $-l$

u' –ъгъл, под който се вижда обекта от разстояние l'

Или $$u' = \frac{h}{l'} = \frac{h}{f' + x'}; -u = \frac{h}{-l} = \frac{h}{-f - x};\ \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{f + x}{f' + x'}$$

От уравнението на Нютон: $x.x' = f.f' \Rightarrow x' = \frac{f \cdot f'}{x}; x = \frac{f \cdot f'}{x'}$

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'} \tag{11}$$

От (9) $\boxed{\beta = \frac{n}{n'}.\frac{1}{\gamma}}$ - връзка между линейно и ъглово увеличение, чрез n и n'.

От (8) $\boxed{\gamma = -\frac{f}{f'}.\frac{1}{\beta}}$ - връзка между линейно и ъглово увеличение, чрез f и f'.

При по-голямо линейно увеличение $\beta \rightarrow$ по-малко ъглово увеличение γ и обратно.

4. Надлъжно увеличение

$$\boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}} \tag{12}$$

Означаваме: dx – дължината на обекта по направление на оптичната ос ;
dx' – дължината на образа по направление на оптичната ос.

От уравнението на Нютон $x.x' = f.f'$, имайки предвид, че f и $f' \rightarrow$const $\Rightarrow$

$$x.dx' + x'.dx = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}$$

От (12) $\Rightarrow$ $$\alpha = -\frac{x'}{x} \tag{13}$$

От (8) $\Rightarrow$ $$x = \frac{-f}{\beta}, \quad x' = -f'.\beta$$

От (8) и (13) $\Rightarrow$ $$\boxed{\alpha = -\frac{f'}{f}\beta^2}$$

Това уравнение дава връзката между линейното и надлъжно увеличение.

Надлъжното увеличение характеризира рязкостта на образа на пространствен обект върху плосък екран.

Например при фотографиране:

От $\gamma = -\frac{f}{f'}.\frac{1}{\beta}$ и $\alpha = -\frac{f'}{f}.\beta^2 \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\beta}{\gamma}; \quad \alpha.\gamma = \beta$ (14)

Образът би бил геометрически подобен, ако $\alpha = \beta$, т. е.

$$-\frac{f}{x} = -\frac{f \cdot f'}{x^2} \text{ или } x = f'$$