ЛИНЕЙНА ДИФРАКЦИОННА РЕШЕТКА

1. Линейна дифракционна решетка

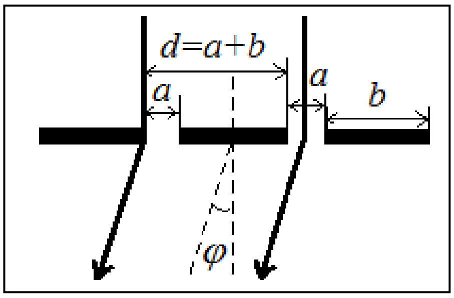
Съвкупност от голям брой едакви процепи, отстоящи един от друг на еднакво разстояние.

a - ширина на процепа

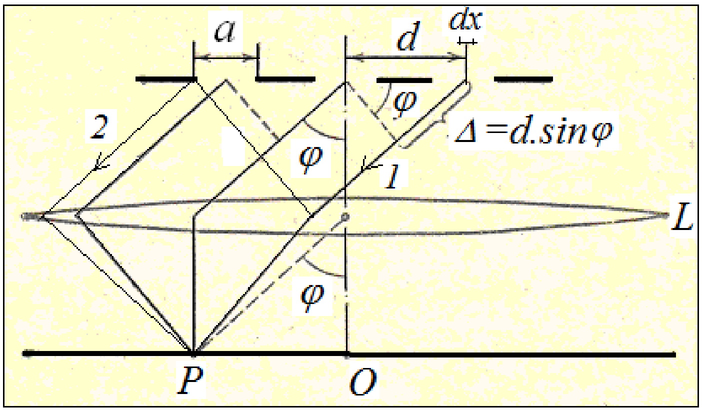
b – ширина на преградата

$d = a + b$ - период или константа на решетката

Нормално падане: i=0



Успоредно на дифракционната решетка поставяме събирателна леща L, във фокалната равнина на която има екран. Разглеждаме нормално падане на плоска монохроматична вълна.



Всеки от процепите ще даде дифракционна картина на екрана. Картините от всички процепи ще са разположени на едно и също място на екрана (независимо от положението на процепа, централният му максимум лежи срещу центъра на лещата т.O). Ако трептенията, достигащи до т. P от различните процепи са некохерентни, то резултатната дифракционна картина (ДК) от N процепа ще се отличава от ДК от един процеп, само по интензитетът, който ще нарастне N пъти , т.е.

$I = N.I_\varphi$, I_φ - интензитетът, създаден от един процеп.

Но! Трептенията от различните процепи са кохерентни $\Rightarrow$ те ще интерферират. Резултантното трептене в т. P, положението на която точка се определя от ъгъл φ ще се получи от сума на N трептения с еднаква амплитуда A_φ, отместени едно спрямо друго по фаза на една и съща величина δ:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta$$

Разглеждаме безкрайно малък елемент dx от n$^{-тия}$ процеп с координата X, отчетена от началото на процепа. Тогава разликата във фазите между лъчи 1 и 2 е:

$$\Delta = [(n-1)d + x]\sin\varphi$$

Трептенето възбудено от елемента dx на n$^{-тия}$ процеп в т. P на екрана:

$$dE_n(P_\varphi) = \frac{A}{a}\exp[-i(\omega t - \delta)]dx$$

Заместваме: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}.[(n-1)d + x]\sin\varphi$

$$dE_n(P) = \frac{A}{a}\exp\left[-i\left\{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(n-1\right)d + x\right]\sin\varphi\right\}\right]dx =$$

$$= \frac{A}{a}\exp[-i(\omega t)].\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(n-1\right)d.\sin\varphi\right)\right].\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x.\sin\varphi\right)\right]dx$$

Резултантното трептене, възбудено от целия n$^{-ти}$ процеп в т. P ще намерим като интегрираме по цялата му ширина a

$$E_n(P) = \frac{A}{a}\exp[-i(\omega t)].\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(n-1\right)d.\sin\varphi\right)\right].\int_0^a \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x.\sin\varphi\right)\right]dx$$

$$E_n(P) = A.\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(n-1\right)d.\sin\varphi\right)\right].\frac{\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)\right]-1}{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)}.\exp[-i(\omega t)]$$

Резултантното трептене в т. P ще бъде сума от трептенията от всички процепи N:

$$E(P) = \sum_{n=1}^{N} E_n(P)$$

$$E(P) = A.\frac{1-\exp\left[-i\left(N.\frac{2\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)\right]}{1-\exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)\right]}.\frac{1-\exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)\right]}{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)}.\exp\left[-i(\omega t)\right]$$

Амплитудата на резултантното трептене е:

$$E_0(P) = A.\frac{1-\exp\left[-i\left(N.\dfrac{2\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)\right]}{1-\exp\left[-i\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)\right]}.\frac{1-\exp\left[-i\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)\right]}{i\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)}$$

Интензитетът на трептенето е:

$$I = const.E_0.E_0^*$$

Получаваме:

$$I(P) = I_0.\frac{\sin^2\left(N.\dfrac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)}{\left(\dfrac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi\right)^2}$$

Въвеждаме означенията

$$\frac{\pi}{\lambda}a.\sin\varphi = u$$

$$\frac{\pi}{\lambda}d.\sin\varphi = v$$

Тогава :

(1) $$\boxed{I(P) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 . \left(\frac{\sin N\nu}{\sin\nu}\right)^2}$$

2. Анализ: Разпределение на интензитета на светлината

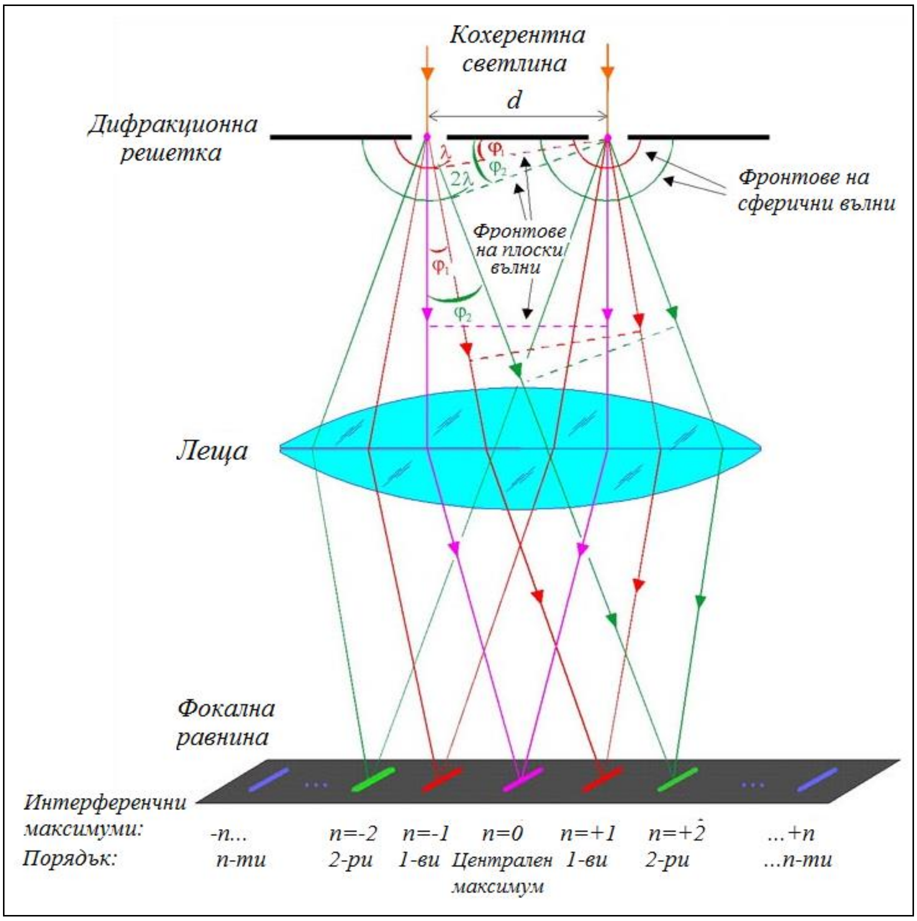
A/ $$I_1 = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

Характеризира разпределението, предизвикано от дифракция от един процеп.

B/ $$I_2 = \left(\frac{\sin N\nu}{\sin\nu}\right)^2$$

Характеризира многолъчевата интерференция на лъчите, излизащи от всички процепи.

Ход на кохерентна светлина през дифракционна решетка на пропускане:



а) изследване на $I_1 = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ **:** дифракционен множител

1) Централен максимум: При $\boxed{\varphi = 0}$ $\Rightarrow$ u = 0

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

2) Минимуми

В тези точки $\frac{\sin u}{u} = 0$, т.е. интензитетът, създаден от всеки процеп поотделно е 0: $I = 0$

Това е при: $\sin u = 0 \Rightarrow \quad u = k\pi, \quad \textit{но} \quad u \neq 0$

$$\frac{\pi}{\lambda} a.\sin\varphi = k\pi$$

$$\boxed{\sin\varphi = k\frac{\lambda}{a} \quad , \; k = 1, 2, 3...} \qquad (2)$$

б) изследване на $I_2 = \left(\dfrac{\sin N\nu}{\sin \nu}\right)^2$**:** интерференчен множител (при многолъчева интерференция)

1) Главни максимуми: При $\nu = m\pi$, $m = 0, 1, 2...$

$$\lim_{\nu\to m\pi}\frac{\sin N\nu}{\sin \nu} = \lim_{\nu\to m\pi}\frac{\cos N\nu}{\cos \nu}.N = N\lim_{\nu\to m\pi}\frac{\cos N\nu}{\cos \nu} = N$$

$\left(\dfrac{\sin N\nu}{\sin \nu}\right)^2 = N^2$ - трептенията в тези направления взаимно се усилват

$$I_{\max} = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2.N^2$$

Направлението се определя от условието:

$$\nu = m\pi$$

$$\frac{\pi}{\lambda}d\sin\varphi = m\pi \Rightarrow .$$

$$\boxed{\sin\varphi = m\frac{\lambda}{d},\ m = 0,1,2,..} \qquad (3)$$

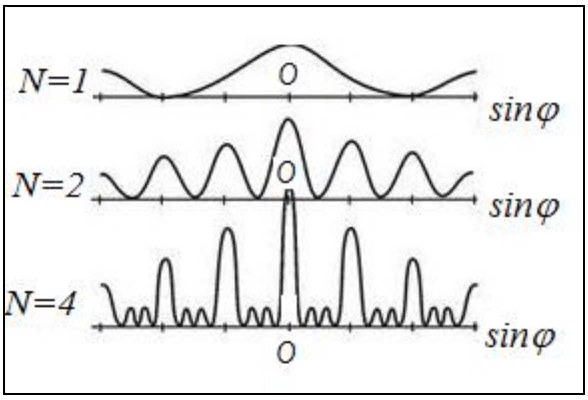
Тези максимуми се наричат главни максимуми, а m – порядък на главния максимум. Има един нулев и по два максимума от $1^{\text{-ви}}$, $2^{\text{-ри}}$ ... порядъци

2) Минимуми

$$I = 0: \qquad \sin N\nu = 0,\ N\nu = m'\pi$$

$$N\frac{\pi}{\lambda}d\sin\varphi = m'\pi$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{m'}{N}\frac{\lambda}{d}} \qquad (4)$$



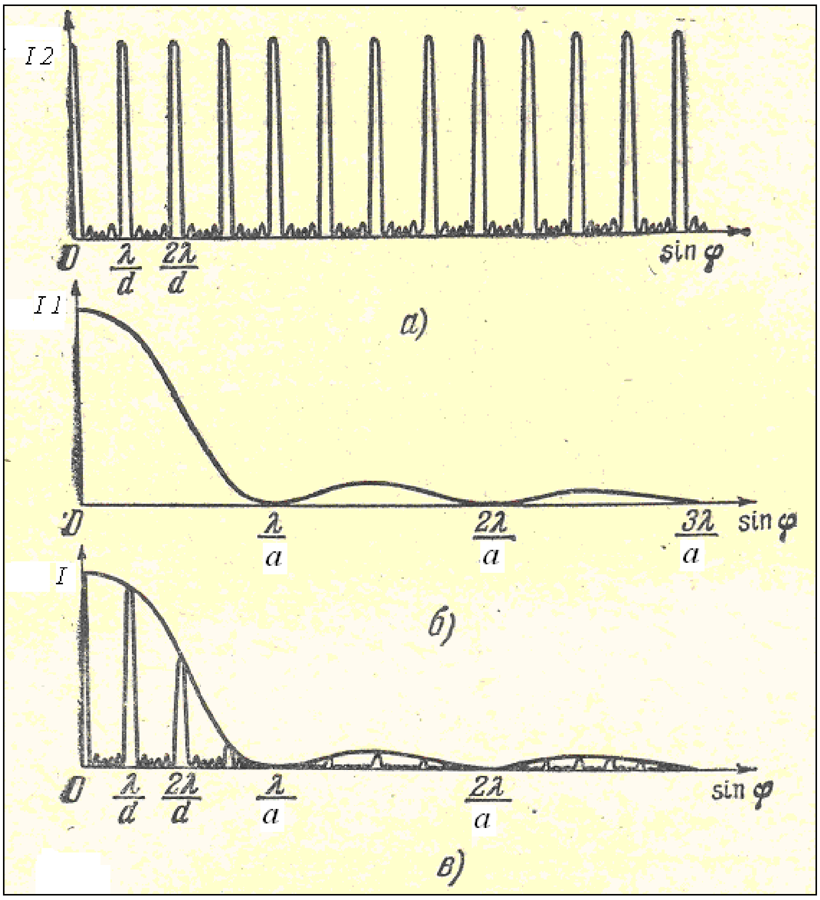
$$m' = 1, 2, \ldots (N-1), (N+1), \ldots, (2N-1)$$

или $\dfrac{m'}{N} = \left(m + \dfrac{k}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots (N-1)$

m' приема всички целочислени стойности, с изключение на $m' = m.N$, за което усл. (4) става (3) условие за максимум.

Следователно, между главните максимуми се наблюдават (N-1) min.

N=6



Условие за главен max:

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\sin\varphi = 0, \frac{\lambda}{d}, 2\frac{\lambda}{d}, 3\frac{\lambda}{d}, 4\frac{\lambda}{d}\ldots.$$

Условие за min:

$$\sin\varphi = \left(m + \frac{k}{N}\right).\frac{\lambda}{d}, \quad k = 1, 2, \ldots.(N-1)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{2}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{3}{4}\frac{\lambda}{d}; \ldots; \ \frac{\lambda}{d}\,\frac{5}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{6}{4}\frac{\lambda}{d}; \frac{7}{4}\frac{\lambda}{d}; \ldots; 2\frac{1}{4}\frac{\lambda}{d}; 2\frac{2}{4}\frac{\lambda}{d}$$

Между всеки два минимума се намира вторичен максимум.

Извод: Между всеки два главни максимума се намират (N-1) min и (N-2) вторични максимума.

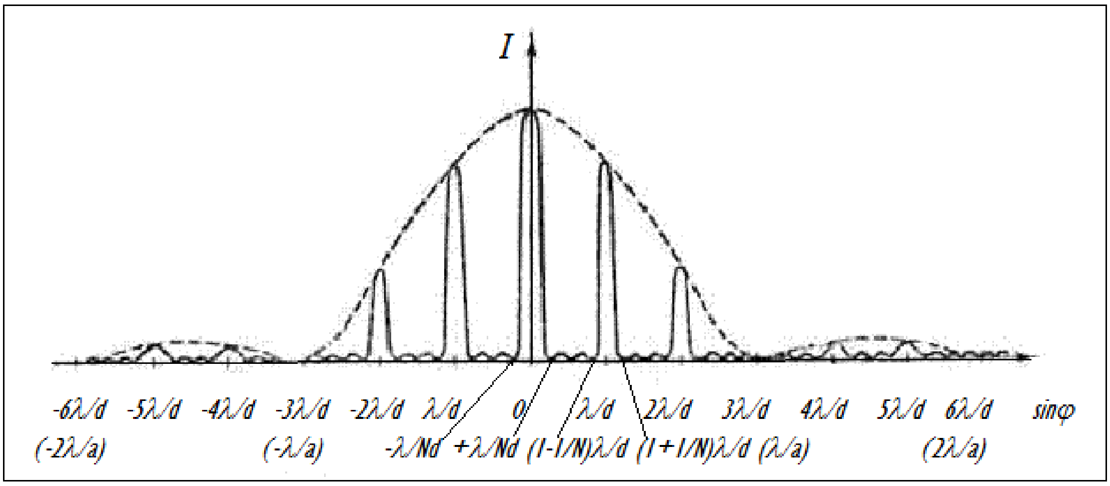
Резултантната картина се получава от наслагването на двете картини: интерференция от много лъчи и дифракция от всеки процеп.

Тези интерференчни максимуми, за които се изпълнява едновременно и условието за минимум на дифракционната картина изчезват, т.е. главните максимуми изчезват ако:

$$m\frac{\lambda}{d} = k\frac{\lambda}{a} \to m = \frac{d}{a}k$$

Означаваме $\frac{d}{a} = m_0$ $\Rightarrow$ Всеки m_0 главен максимум ще изчезне $\Rightarrow$ наблюдават се $0^{лев}$, $1^{-ви}$, $2^{-ри}$ гл. макс.

Пример: $d = 3a$, N=4



$d = 3a \Rightarrow \frac{m\lambda}{3a} = \frac{k\lambda}{a} \Rightarrow m = 3k$ $\Rightarrow$ всеки трети главен максимум ще изчезва.

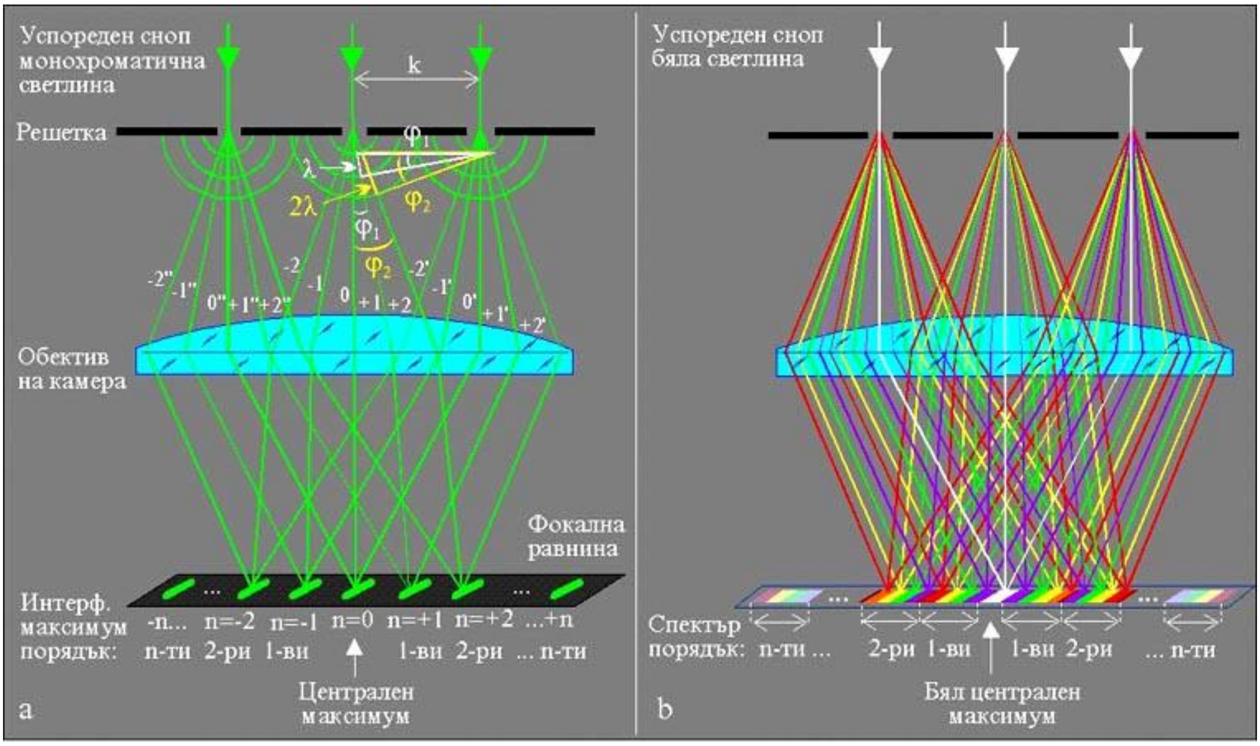
Наблюдава се картина само от централния дифракционен максимум, т.к. интензитетът на първия дифракционен максимум е 4,7%I_0 $\Rightarrow$ за дифракционен минимум се разглежда k = ±1 $\Rightarrow$

$$m\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow m = \frac{d}{a} = m_0$$

Толкова главни максимума m_0 се наблюдава в централния дифракционен максимум.

Наблюдавана картина при N=4, d/a=3=m_0

Дифракция на монохроматична светлина - a и на бяла светлина – b през прозрачна дифракционна решетка



3. Основни характеристики на всеки спектрален прибор са дисперсията и разделителната способност.

3.1 Дисперсията определя ъгловото или линейното разстояние между две спектрални линии, отличаващи се по дължината на вълната с единица (наприме, 1Å)

3.2 Разделителната способност определя минималната разлика в дължините на вълните $\Delta\lambda$, при която две линии в спектъра се възприемат разделено.

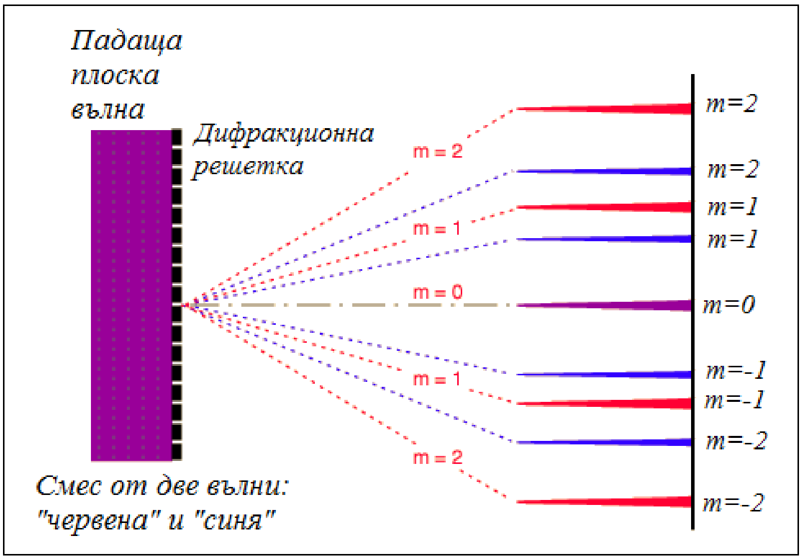
4. Дисперсия на дифракционната решетка

4.1 Ъглова дисперсия на дифракционна решетка

Ъгловото разстояние между две спектрални линии, различаващи се по дължина на вълната с $\Delta\lambda$ (~1Å)

$$\boxed{D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{5}$$

Характеризира разтегнатостта на спектъра по ъгли на дифрактиране.



За да намерим D_φ ще диференцираме условията за главни максимуми отляво по φ, отдясно по λ

$$d\sin\varphi = m\lambda$$
$$d\cos\varphi \,.\, \mathrm{d}\varphi = m\mathrm{d}\lambda$$

$$D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \qquad (6)$$

При малки ъгли на дифракция φ, $\cos\varphi \sim 1$:

$$\boxed{D_\varphi = \frac{m}{d}}$$

При дадена константа на дифракционната решетка d, спектралните линии ще се виждат под по-голямо ъглово разстояние, колкото по-голям е порядъкът m.

$$D_\varphi = \frac{m}{d\cos\varphi},\ d\sin\varphi = m\lambda \Rightarrow m = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}$$

$$D_\varphi = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}.\frac{1}{d\cos\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\lambda}$$

$L = d.N$, където L – дължина на ДР, N – броя процепи

$$D_\varphi = \frac{m}{d},\ d = \frac{L}{N} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{D_\varphi = m\frac{N}{L}}$$

4.2 Линейна дисперсия на дифракционна решетка

$$\boxed{D_l = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}}$$

Линейното разстояние $\mathrm{d}l$ във фокалната равнина на лещата (на екрана), между две спектрални линии, отличаващи се по дължина на вълните $\mathrm{d}\lambda$. При малки ъгли φ:

$\mathrm{d}l = f.\mathrm{d}\varphi$, f – фокусното разстояние на лещата

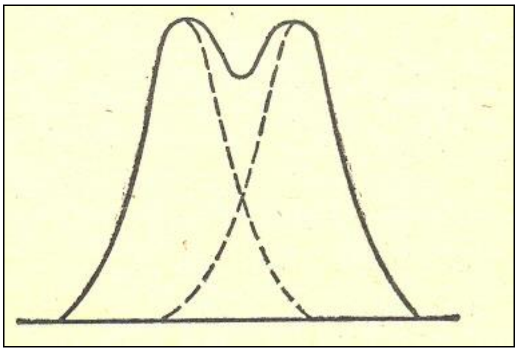
$$D_l = f\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = f.D_\varphi$$

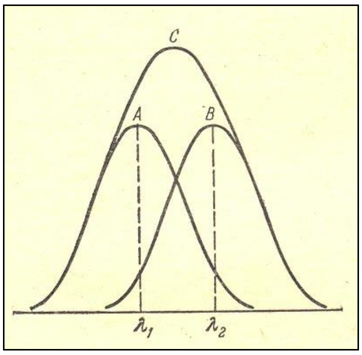
5. Разделителна способност

$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}}$ - безразмерна величина,

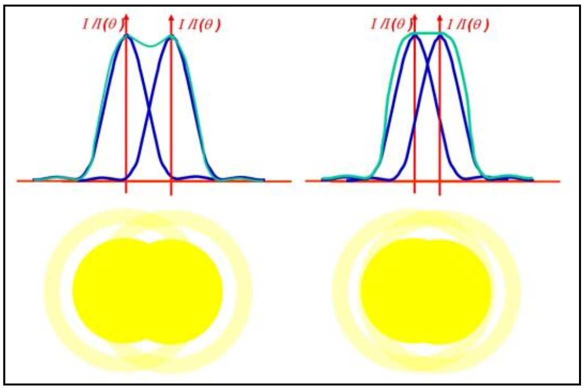
$\Delta\lambda$ - минималната разлика между две спектрални линии, които се възприемат разделени.

Възможностите за разделяне на две близки спектрални линии зависи не само от разстоянието между тях (което се определя от дисперсията на прибора), но и от ширината на спектралния максимум.





Два близки максимума се възприемат от окото разделени, ако интензитетът в промеждутъка (min) между тях е не повече от 80% от интензитета на максимума, т.е. $I_{\min} \le 0.8I_0$.



Според критерия на Релей, такова съотношение на интензитетите се получава, ако максимума на едната линия съвпада с минимума на другата.

Разглеждаме линии: λ и $\lambda+\Delta\lambda$; $\lambda_1=\lambda+\Delta\lambda$; $\lambda_2=\lambda$; $\lambda_1>\lambda_2$

Условие за m^{ти} максимум на λ_1:

$$\boxed{\sin\varphi_{\max} = m\frac{\lambda+\Delta\lambda}{d}}$$

Условие за първи минимум, след m^{ти} максимум за λ_2:

$$\boxed{\sin\varphi_{\min} = \left(m+\frac{1}{N}\right).\frac{\lambda}{d}}$$

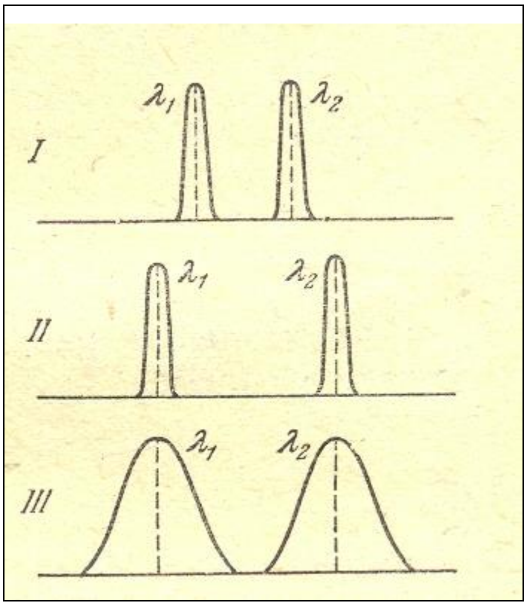
$\sin\varphi_{\max}(\lambda_1) = \sin\varphi_{\min}(\lambda_2)$ - критерий на Релей

$$\frac{m(\lambda+\Delta\lambda)}{d} = \left(m+\frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

$$m\lambda + m\Delta\lambda = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN}$$

Следователно разделителната способност на ДР (R) е пропорционална на порядъка на главния максимум (m) и на броя на процепите (N), т.е. увеличавайки (N), можем да използваме по-малък порядък.



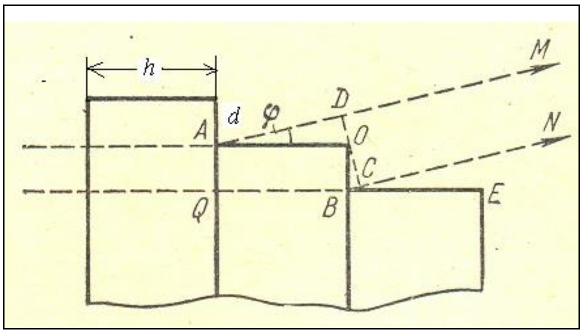
6. Стъпалчеста решетка на Майкелсон

При обикновените ДР има много интерфериращи лъчи (N – голямо), дифрактирали под един и същи ъгъл, но разликата в оптичните пътища е малка (Δ- малко $\Rightarrow$ $m = \Delta/\lambda$ - малък порядък на спектъра).

За да получим по-голям порядък е необходимо да увеличаваме ъгъла на дифракция φ: $m = \dfrac{d\sin\varphi}{\lambda}$. Така получаваме голяма разделителна способност.

Принцип на стъпалчестата дифракционна решетка:

Броят на взаимодействащите лъчи е малък, но разликата в ходовете на два съответни съседни лъча е голяма, поради което тук се явяват спектри от висок порядък. (N – малко, m-голямо (Δ-голямо)).

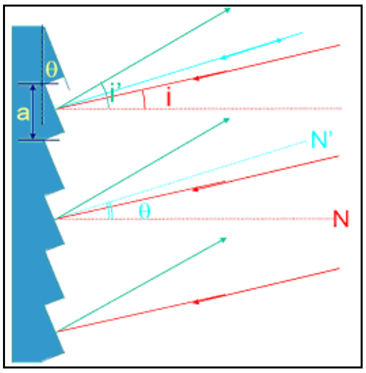


Решетка на Майкелсон 1898г. Съвкупност от еднакво дебели плоскости, отместени една от друга на еднакво разстояние. Лъчите, преминали през пластинките дифрактират по краищата им и понеже ширината на стъпалата d е много голяма спрямо λ, то ъгъла φ е много малък.

За $\varphi \to 0:\ \Delta = \mathrm{h}(\mathrm{n}-1)$, разлика в оптичните пътища за два съседни съответни лъчи. h – дебелина на пластинката; n – показател на пречупване на пластината

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N.m = N.\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{N.(n-1)h}{\lambda}$$

Пример: Решетка на Майкелсон



Характеристики: N=20 пластини; n=1,5; h=18mm; λ=500nm

$$m = \frac{(n-1)h}{\lambda} = 18000 \text{ и } \quad R = m.N = 360000$$