ФРАУНХОФЕРОВА ДИФРАКЦИЯ ОТ БЕЗКРАЙНО ДЪЛЪГ ПРОЦЕП.

1. Фраунхоферова дифракция от безкрйно дълъг процеп

Наблюдава се като между 2 лещи, в чиито фокуси са поставени съответно източник на светлина S и екран за наблюдение на дифракционната картина E_2 е разположен екран с (различни) препятствия E_1.

$$S \rightarrow L_1 \rightarrow E_1 \rightarrow L_1 \rightarrow E_2$$

Отворите могат да имат различна форма и размери $\Rightarrow$ светлината ще минава по различни пътища и ще дава различни осветени точки на E_2, които са образи на източника S.

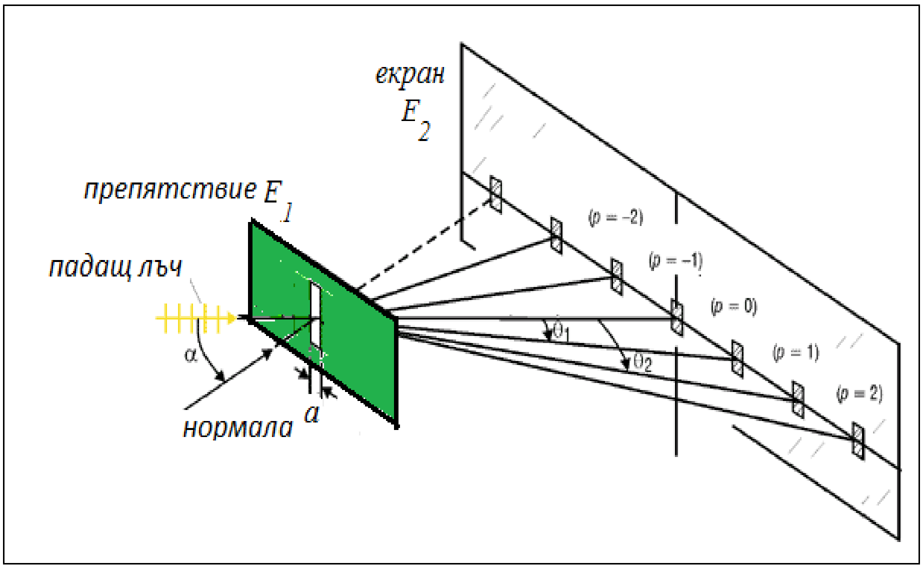
Решението на задачата за дифракция:
Да се намери разпределението на осветеността на екрана E_2, в зависимост от размера и формата на препятствието, предизвикващо дифракция.

Препятствията са:

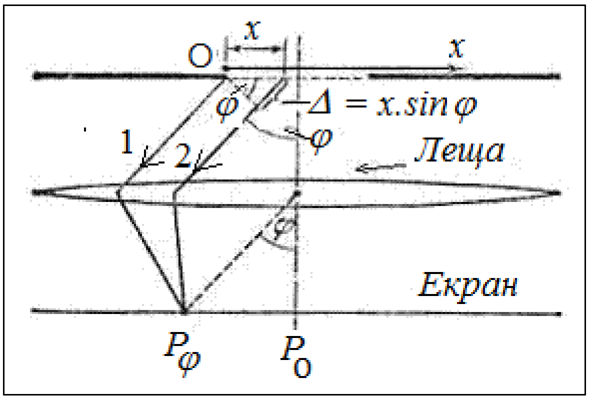
- безкрайно дълъг процеп,
- правоъгълен отвор,
- кръгъл отвор.

Разглеждаме безкраен процеп, т.е с ширина a (пр. $a \approx 0.01 \div 0.02\text{nm}$) и дължина $l \rightarrow \infty\, (l \cong 10\text{mm})$.

Дифракционната картина е тъмни и светли ивици (минимуми и максимуми), редуващи се в наравление перпендикулярно на процепа, т.к. светлината дифрактира наляво и надясно от процепа.



Ще изследваме ДК в една равнина.



Нормално пада плоска монохроматична вълна ⇒ Равнината на процепа е вълнова повърхност за падащата вълна, т.е. с еднакви фази за всяка точка. Разделяме откритата част на тази вълнова повърхност на елементарни зони, успоредни на краищата на процепа с ширина dx. Площите на тези зони са равни, следователно амплитудите им са равни. Вторичните вълни, разпространяващи се от зоните в направление определено от ъгъл φ, ще се съберат от лещата в т. P_φ от екрана.

dA – амплитудата на трептенето dE, възбудено от една зона dx, в коя да е точка от екрана ще зависи само от площта на зоната (плоска вълна, а не сферична, за която $dA \approx \frac{1}{r}; k(\varphi) \approx const, \varphi$ не са големи)

Амплитудата на трептене, изхождащо от елемента dx и достигащо до т. P_φ.

$$dA = \frac{A}{a} dx$$

A – амплитудата на падналата вълна

$\frac{A}{a}$ - амплитудата на падналата вълна на единица дължина

Търсим резултантния интензитет в т. P

Разликата в оптичните пътища между лъчи 1 и 2, изхождащи от точки с координати 0 и x е:

$$\Delta = x \sin\varphi$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin\varphi \ ,$$

Ако $x = 0$, то $\delta = 0$ и фазата е ωt.

Ако $x \neq 0$, $\delta \neq 0$ и фазата е $(\omega t - \delta)$.

Трептенето възбудено от елементарната зона dx в т. P на екрана, определяна от ъгъл φ - P_φ , е :

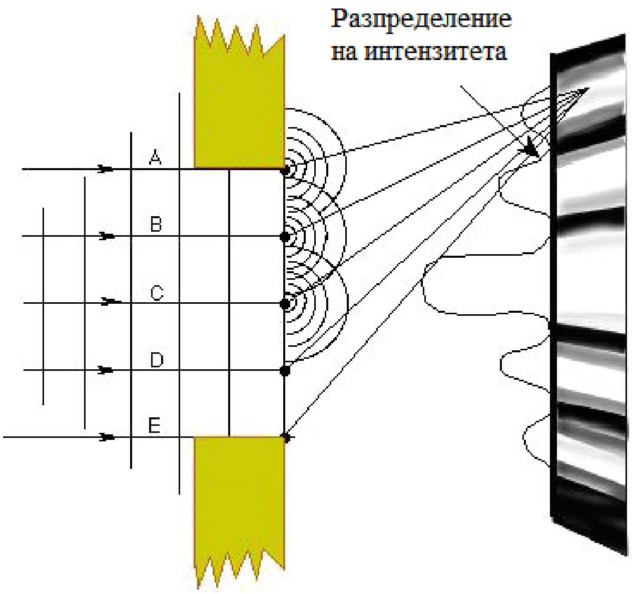
$$dE = \frac{A}{a} dx.\exp[-i(\omega.t - \delta)] = \frac{A}{a}\exp[-i(\omega.t)]\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\varphi\right)\right] dx$$

Резултантното трептене, възбудено от целия процеп в т. P_φ ще намерим като интегрираме по цялата му ширина:

$$E(P)=\int_0^a dE(P)=\frac{A}{a}\exp[-i(\omega.t)]\int_0^a \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right].dx=$$

$$=\frac{A}{a}\exp[-i(\omega.t)].\frac{1}{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi\right)}\int_0^a \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right].d\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right]=$$

$$=\frac{A}{a}.\frac{\exp[-i(\omega.t)]}{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\varphi\right)}.\exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\varphi\right)\right]\Big|_0^a$$



$$E(P)=Ae^{-i\omega.t}\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}-1}{i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}=\tilde{A}_0.e^{-i\omega.t}$$

$\tilde{A}_0$ - комплексна амплитуда

За интензитета в т.Р получаваме:

$$I=c\tilde{A}_0.\tilde{A}_0^*$$

$$I=c.A^2\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}-1}{i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}.\frac{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}-1}{(-i)\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi}$$

$$I = c.A^2 \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi} - e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi} + 1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)^2}$$

$$I = c.A^2 \frac{\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)\right)}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)^2}$$

$$I = \frac{c.A^2.2.2\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)}{4\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)^2}$$

(1) $$\boxed{I = c.A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi\right)^2}}$$

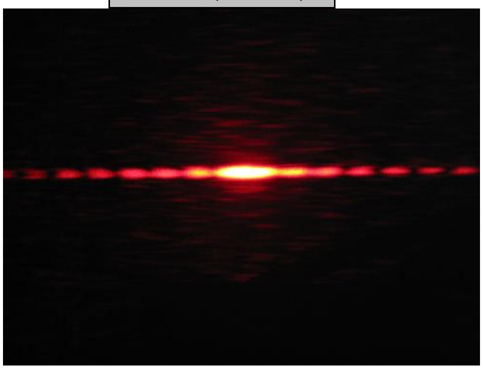
Използвахме, че $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$; $1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$

Означаваме: $I_0 = c.A^2$ - интензитетът в средата на дифракционната картина

$\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi = u = \frac{\delta_a}{2}, \delta_a = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_{0,a}$ - фазовата разлика между лъчите 1 и 3, от краищата на процепа a.

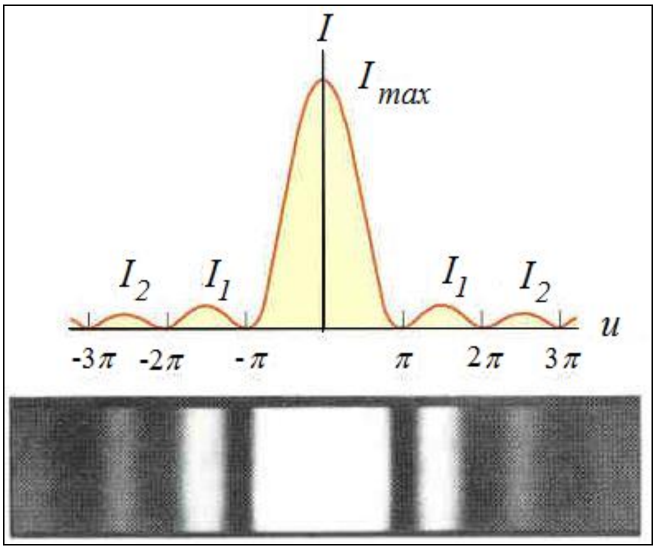
$$I = I_0.\frac{\sin^2 u}{u^2} = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

(2) $\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2}$ - за произволна т.Р



2. Изследване на дифракционната картина.

Ако местим т.P по екрана ще намерим разпределението на I. Анализираме формула (1) или (2).



а) минимуми

$I = I_{\min} = 0$; ако $\sin u = 0$ или $u = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3.....$

$$u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = m\pi$$

$\boxed{\sin\varphi = \frac{m\lambda}{a}}$ - условие за минимум.

Условието определя направлението към точки от екрана (и съответното им положение), в което интензитетът е минимален (амплитудата на трептенията е 0).

б) максимуми

При определени промеждутъчни стойности на φ, интензитетът има максимуми с различна големина.

- **централен максимум** (в центъра на екрана)

  $I = I_0$ за $\varphi = 0$ в т.O

  $\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = u$

За т. O, $\varphi = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \sin u = 0$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \Rightarrow \frac{0}{0} = 1$$

- **следващи максимуми** (за $\varphi \neq 0$)

Намираме първата производна на (2) и я приравняваме на 0, за да намерим тези екстремуми (изследваме функцията $I = I(\varphi)$ за максимум)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\frac{\sin u}{u}\right)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(\frac{\sin u}{u}\right)=\sin u.\left(-\frac{1}{u^2}\right)+\frac{1}{u}.\cos u=0$$

(3) $$\mathrm{tg}\,u=u \text{ - max}$$

Условието за максимум довежда до трансцидентното уравнение (3).

Негови корени са:

u=0; 1.43π; 2.46π; 3.47π……

Точно условие за максимум: $\sin\varphi=1{,}43\lambda/a;\ 2{,}46\lambda/a;\ 3{,}47\,\lambda/a$

Не съвсем точно, но качествено решение за максимума се получава от условието:

$\sin^2 u=1$, т.е $u=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi=(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\varphi=(2m+1)\frac{\lambda}{2a}=\left(m+\frac{1}{2}\right).\frac{\lambda}{a}$$

$\boxed{u=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}}$, $\boxed{\sin\varphi=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{a}}$, $m=1,2,3,\ldots$ - условие за максимум, не съвсем точно.

Отношението между максималните интензитети е:

$$I_{\max}^{(m)}=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2=I_0\frac{1}{\left[\left(2m+1\right)\dfrac{\pi}{2}\right]^2}$$

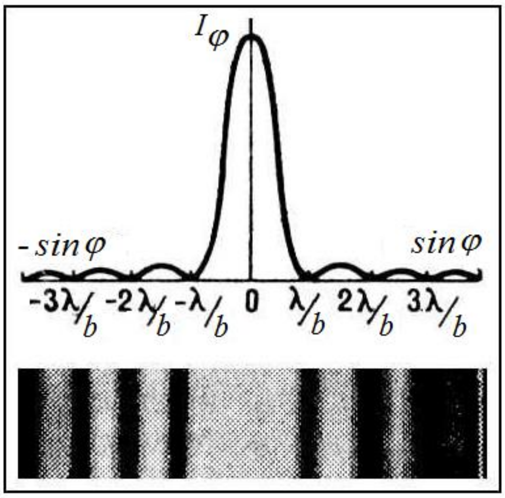
$$\frac{I_{\max}^{(m)}}{I_0}=\frac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}(2m+1)^2},\quad m=1,\,2,\,3...$$

$$\frac{I_{\max}^{(1)}}{I_0}=\frac{4}{\pi^2.9}\cong 0.045;\qquad \frac{I_{\max}^{(2)}}{I_0}=\frac{4}{\pi^2.25}\cong 0.016$$

Стойността на нецентралните максимуми бързо намалява. Отношенията на интензитетите на централния и следващите максимуми е както:

$$1:\frac{4}{9\pi^2}:\frac{4}{25\pi^2}:\frac{4}{49\pi^2}:\frac{4}{81\pi^2}....$$ или

$$1:0{,}045:0{,}016:0{,}008:0{,}005\ldots.$$



От ф-ла (1) и (2) $\Rightarrow$, че $I_\varphi = I_{-\varphi}$

Дифракционната картина е симетрична относно центъра на лещата.

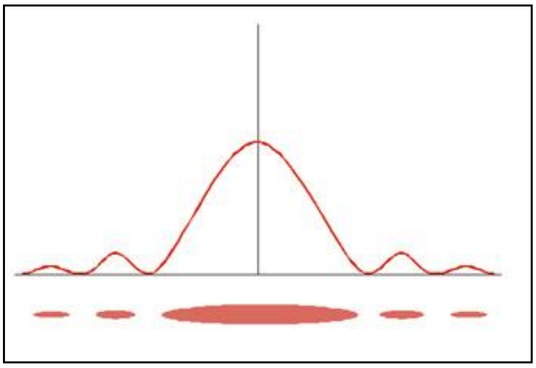
в) Броят минимуми на интензитета се определя от отклонението на ширината на процепа a към дължината на вълната λ: $m \le \dfrac{a}{\lambda}$

Усл. min: $\sin\varphi = m\dfrac{\lambda}{a}$

$$\sin\varphi \le 1 \Rightarrow m\frac{\lambda}{a} \le 1 \text{ или } m \le \frac{a}{\lambda}, a \ge \lambda$$

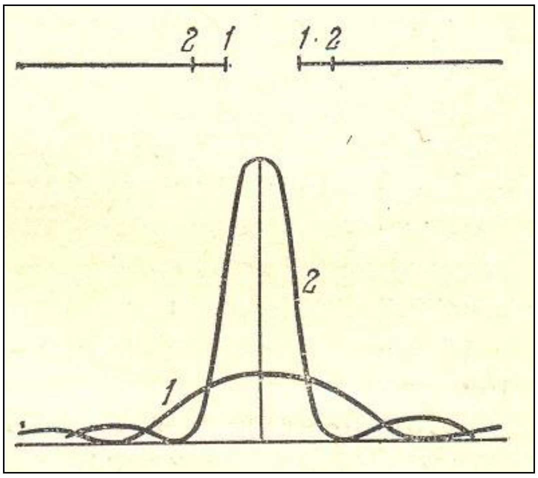
За $a < \lambda$ - минимум не се наблюдава.

От условието за минимум: $\sin\varphi = m\dfrac{\lambda}{a} \Rightarrow$ разстоянието на минимумите от центъра на дифракционната картина нараства с намаляване на a $\Rightarrow$ с намаляване на a, централният максимум се разширява и захваща все по-голяма област от екрана.



За $a = \lambda,\ m = 1,\ \varphi = 90^\circ \Rightarrow$ първият минимум съответства на $\varphi = 90^\circ$, т.е. той е отместен на безкрайност по екрана. Осветеността на екрана спада постепенно от центъра към крайщата му. С намаляване на a осветеността се стреми към изравнянане.

С увеличаване на a, т.е с увеличаване на ширината на процепа, първите минимуми се приближават към центъра на ДК, централния максимум става все по-рязък.



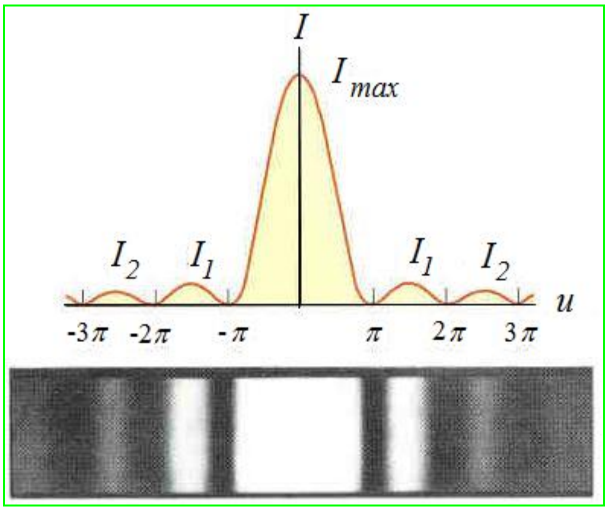
г) Краищата на централния максимум се определят от условието за минимум:

$$\sin\varphi = \pm\frac{\lambda}{a}$$

За $a >> \lambda,\ \sin\varphi \approx \varphi,\ \varphi = \dfrac{\lambda}{a}$

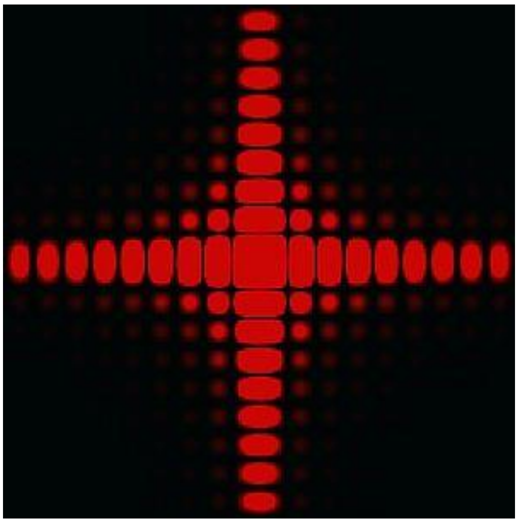
Тогава ъгловата ширина на централния максимум е:

$$\delta\varphi = 2\varphi = 2\frac{\lambda}{a}$$



3. Фраунхоферова дифракция от правоъгълен отвор

Ако процепът има ограничена дължине, т.е l не клони към безкрайност и представлява правоъгълник със страни a и l, то очевидно и по посока на дължината на процепа ще се наблюдава ДК.



ДК ще е по-широка в това направление, което съответсва на по-късата страна на отвора. В случай на квадрат – симетрична ДК.

При решаване на задачата за ДК, вълновият фронт се разделя на малки правоъгълни елементи, като се прекарват две фамилии линии, успоредни на l и успоредни на a.

Дифракцията се характеризира с два ъгъла ψ и φ : отклонение от направления, определени от две равнини успоредни на a и l.

Условие за минимум е: $\sin\varphi = m\dfrac{\lambda}{a}$ или $\sin\psi = n\dfrac{\lambda}{l}$, $m,n = 1,2,3....$

$$I_{\varphi,\psi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}.\frac{\sin^2 v}{v^2},\ v = \frac{\pi}{\lambda} l \sin\psi$$

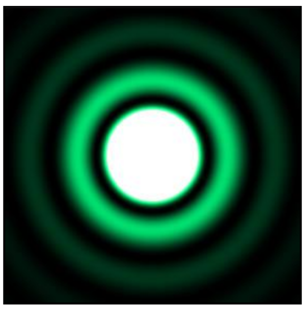
4. Фраунхоферова дифракция от кръгъл отвор

По-трудно се правят разчети. Вълновият фронт се разделя чрез вектори с различна дължина. Стига се до беселови функции. Дифракционната картина е концентрични кръгове за максимуми и минимуми, с ъглов радиус на тъмните кръгове:

$$\sin\varphi_m = \frac{0.61 + (m+1)/2}{R}.\lambda,\ m = 1,2,3....$$

където R – радиус на отвора.

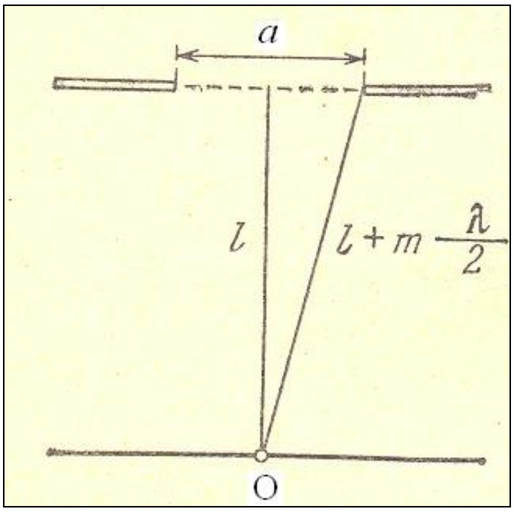
Колкото по-голям е радиусът, толкова по-малка ще е ДК. Ако радиусът клони към безкрайност, дифракционната картина изчезва.



ВАЖНО! Дифракцията от кръгъл отвор е много важна за практиката, т.к. обикновено рамките на лещите и обективите имат кръгла форма. Следователно при разглеждане на явленията в оптическата индустрия, трябва да отчетем тази дифракция.

5. Параметър, определящ вида на дифракцията

Разглеждаме дифракция на плоска вълна от тесен процеп a. Разделяме на m на брой зони разстоянието a, симетрично спрямо центъра. Всеки две съседни зони дават трептения, достигащи до т.О в противофаза, а разстоянието от края на зоната до т.О е $\left(l+m\dfrac{\lambda}{2}\right)$.



Разглеждаме т.О, лежаща срещу средата на процепа. За т.О са открити m на брой зони на Френел.

$$\left(l+m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$m = \frac{a^2}{4l\lambda} \approx \frac{a^2}{l\lambda}$$

Параметърът $\dfrac{a^2}{l\lambda}$ е свързан с броя открити зони на Френел за точка, лежаща срещу средата на процепа – т.О

$m \approx \dfrac{a^2}{l\lambda}$	<<1 – Фраунхоферова дифракция (трябва $a > \lambda$)
	~ 1 – Френелова дифракция
	>>1 – Геометрична оптика

$m << 1$ - Ако отвора открива малка част от централната зона на Френел се наблюдава фраунхоферова дифракция с централен рязък максимум и няколко по-слаби вторични максимума, като броят минимуми се определя от условието $m \le \frac{a}{\lambda}$, т. е. трябва $a >> \lambda$.

$m \approx 1$ - Отворът открива неголям брой зони на Френел. На екрана се наблюдава образ на процепа, ограден със светли и тъмни петна по края. Френелова дифракция.

$m >> 1$ - Откриват се голям брой зони на Френел на екрана се наблюдава равномерно осветен образ на процепа.

От разглежданията следва, че критерий за използването на законите на геометричната оптика не е $\lambda \to 0$, т. е. малко λ в сравнение с размерите на преградата.

Точният критерий е параметърът $\frac{a^2}{l\lambda}$ да бъде много по-голям от 1.

Пример: Ако $\frac{a}{\lambda} = 100$, т.е λ е 100 пъти по-малко от a и $\frac{l}{a} = 100$, т.е екранът е отдалечен на разстояние l = 100.a. $\Rightarrow$ $m = \frac{a}{\lambda}.\frac{a}{l} = 100.\frac{1}{100} = 1.$

Ще се наблюдава френелова дифракция.