X.2. Система уравнения на Максуел в интегрална и диференциална форма. Физичен смисъл.

Основните уравнения на електромагнетизма, които са обобщение на почти двувековни експериментални резултати, са публикувани от Джеймс Кларк Максуел през 1873 г. в „Трактат по електричество и магнетизъм". Тези уравнения образуват обща система от уравнения за електромагнитното поле. Основната идея в хипотезата на Максуел, на базата на която са съставени тези уравнения, е за възникването на единно електромагнитно поле. Променливите полета са свързани помежду си т.е. променливото магнитно поле поражда променливо електрично поле, което от своя страна създава променливо магнитно поле и т.н. Електричното и магнитното поле могат да съществуват самостоятелно само, ако те не се променят с времето.

В основата на създадената единна теория на електромагнитното поле лежат така наречените уравнения на Максуел, които играят в електродинамиката (науката за електричните и магнитните явления) роля, аналогична на тази, която играят в класическата механика принципите на Нютон.

Системата уравнения на Максуел, с която може да се опише електромагнитното поле, се състои от четири основни уравнения, изразяващи закономерностите за циркулацията на интензитета на електричното и на магнитното поле и за потока на индукцията на електричното и на магнитното поле. Към тези уравнения се прибавят още три допълнителни уравнения, отразяващи свойствата на средата, в която се разпространява електромагнитното поле.

X.2.1. Първо уравнение на Максуел

Първото уравнение на Максуел изразява закона на Максуел-Фарадей за електромагнитната индукция и възбуждането на вихрово електрично поле (подробно разгледани в IX.1). Индуцираното електродвижещо напрежение (ЕДН) е:

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t},$$

където Φ_m е потокът на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$.

Първото уравнение на Максуел се записва в интегрална форма, като индуцираното ЕДН ε_i се изразява чрез циркулацията на интензитета на електричното поле $\vec{E}$ по затворен контур L съгласно уравнение (IX.4):

$$\boxed{\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}}. \qquad (X.14)$$

Уравнение (X.14) показва, че циркулацията на вектора на интензитета на електричното поле по произволен затворен контур е равна на взетата със знак минус скорост на изменение на магнитния поток през произволна повърхност, обхваната от контур L.

Физичен смисъл: Променливото вихрово магнитно поле създава в произволна точка на пространството вихрово електрично поле, независимо от наличието или отсъствието на проводници.

За да се получи уравнение (X.14) в диференциална форма, потокът на вектора на магнитната индукция Φ_m се изразява чрез уравнение (VII.17a) и се получава:

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}(t).d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}.$$

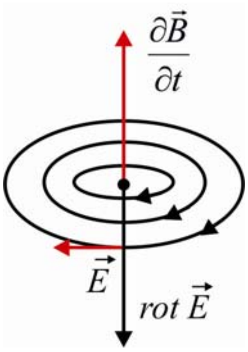
Използва се теоремата на Стокс според която циркулацията на вектора на интензитета на електричното поле $\vec{E}$ по затворен контур L е равна на потока на вектора $rot\vec{E}$ през повърхност S, ограничена от контура:

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}.d\vec{S}.$$

Приравняват се последните две уравнения:

$$\int_S rot\vec{E}.d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

и се получава първото уравнение на Максуел в диференциална форма:



$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \qquad (X.15)$$

Знакът минус в уравнение (X.15) показва, че векторите $\vec{E}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ са свързани в индиректна посока, т.е. $rot\vec{E} \uparrow\downarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

X.2.2. Второ уравнение на Максуел

Второто уравнение на Максуел в интегрална форма изразява теоремата на Гаус за диелектрична среда с индукция $\vec{D}$ (подробно разгледана в II.2.):

$$\boxed{\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = q}. \qquad (X.16)$$

Уравнение (X.16) показва, че потокът на вектора на индукцията на електричното поле през произволна затворена повърхност S е равен на свободните електрични заряди q, намиращи се в обема на затворената повърхност.

Физичен смисъл: Това уравнение е израз на факта, че съществуват източници на електричното поле и това са електричните заряди q.

Уравнение (X.16) е вярно и за променливо електрично поле.

За да се получи уравнение (X.16) в диференциална форма се използва теоремата на Остроградски – Гаус, според която потокът на вектора на електричната индукция $\vec{D}$ през затворената повърхност S е равен на интеграл от $div\vec{D}$ по обема V, ограничен от повърхността S:

$$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = \int_V div\vec{D}.dV .$$

Приравняват се последните две уравнения и се получава:

$$\int_V div\vec{D}.dV = q .$$

Зарядът q в обема V, се изразява чрез обемната плътността ρ от I.3.6. и се получава:

$$\int_V div\vec{D}.dV = \int_V \rho.dV .$$

От това уравнение се получава второто уравнение на Максуел в диференциална форма:

$$\boxed{div\vec{D} = \rho}. \qquad (X.17)$$

В случай на вакуум, когато няма свързани заряди ($\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$; $\vec{P} = 0$), второто уравнение на Максуел в диференциална форма се записва по следния начин:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

където ε_0 е диелектрична проницаемост на вакуума.

X.2.3. Трето уравнение на Максуел

Третото уравнение на Максуел изразява уравнението за пълния ток (подробно разгледано в VII.2.):

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \int_S \vec{j}.d\vec{S},$$

където $\vec{H}$ е векторът на интензитета на магнитното поле, а $\vec{j}$ е пълният ток, въведен от Максуел и подробно разгледан в X.1.: $\vec{j} = \vec{j}_{пров.} + \vec{j}_{прем.}$.

С отчитане на двата тока, съставящи пълния ток, може да се запише:

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = I_{пров.} + I_{прем.},$$

където токът на проводимост е:

$$I_{пров.} = \int_S \vec{j}_{пров.}.d\vec{S} = I,$$

а токът на преместване е:

$$I_{прем.} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}.d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t},$$

като Φ_e е потокът на вектора на електричната индукция $\vec{D}$.

Третото уравнение на Максуел в интегрална форма е:

$$\boxed{\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = I + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}}. \qquad (X.18)$$

Уравнение (X.18) показва, че циркулацията на вектора на интензитета на магнитното поле по произволен затворен контур L е равна на алгебричната сума от тока на проводимост и тока на преместване през повърхността, обхваната от контур L.

Ако токът на проводимост е нула ($I = 0$), се получава:

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}. \qquad (X.19)$$

Физичен смисъл: Променливото електрично поле създава в произволна точка на пространството вихрово магнитно поле.

За да се получи уравнение (X.18) в диференциална форма, то се записва така:

$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).d\vec{S}.$$

Използва се теоремата на Стокс, според която циркулацията на вектора на интензитета на магнитното поле $\vec{H}$ по затворен контур L е равна на потока на вектора $rot\vec{H}$ през повърхност S, ограничена от контура:

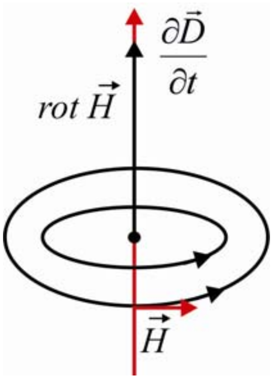
$$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \int_S rot\vec{H}.d\vec{S}.$$

Приравняват се последните две уравнения и се получава:

$$\int_S rot\vec{H}.d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).d\vec{S} .$$

От последното уравнение се получава третото уравнение на Максуел в диференциална форма:

$$\boxed{rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}. \qquad (X.20)$$



Ако плътността на тока на проводимост е нула ($\vec{j} = 0$), то от третото уравнение на Максуел в диференциална форма следва, че:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Това уравнение показва, че векторите $\vec{H}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ са свързани в директна посока, т.е. $rot\vec{H} \uparrow\uparrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

X.2.4. Четвърто уравнение на Максуел

Четвъртото уравнение на Максуел в интегрална форма изразява закона за магнитния поток през затворена повърхност, подробно разгледан в част VII.2.:

$$\boxed{\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0}. \qquad (X.21)$$

Уравнение (X.21) показва, че потокът на вектора на индукцията на магнитното поле през произволна затворена повърхност S е нула.

Физичен смисъл: Това уравнение е израз на факта, че не са открити отделни магнитни заряди, а само магнитни диполи. Магнитните силови линии са затворени.

За да се получи уравнение (X.21) в диференциална форма се използва теоремата на Остроградски – Гаус, според която потокът на вектора на магнитната индукция $\vec{B}$ през затворената повърхност S е равен на интеграл от $div\vec{B}$ по обема V, ограничен от повърхността S:

$$\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = \int_V div\vec{B}.dV$$

След приравняване с уравнение (X.21) се получава:

$$\int_V div\vec{B}.dV = 0 .$$

От последното уравнение се получава четвъртото уравнение на Максуел в диференциална форма:

$$\boxed{div\vec{B} = 0}. \tag{X.22}$$

X.2.5. Допълнителни уравнения

Към основните четири уравнения на Максуел се добавят още три уравнения, наречени материални, тъй като те отчитат свойствата на материалната среда, в която се разпространява електромагнитното поле.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{X.23}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{X.24}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{X.25}$$

където ε_r е относителна диелектрична проницаемост на средата; μ_r – относителна магнитна проницаемост на средата, σ - спицифична електропроводимост на средата.

Чрез уравненията (X.23, X.24, X.25) може от четирите уравнения на Максуел да се изключат векторите $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{j}$ и да се получат четири уравнения за векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

X.2.6. Анализ на системата уравнения на Максуел

Разгледаните уравнения на Максуел могат да се запишат като система уравнения в две форми:

Интегрална форма	Диференциална форма
$\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = q$	$div\vec{D} = \rho$
$\oint_L \vec{H}.d\vec{l} = I + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$	$div\vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ $\vec{j} = \sigma \vec{E}$	

а) еднозначност

За да се покаже, че системата уравнения на Максуел е еднозначна, ще се сравнят първото и четвъртото уравнение, както и второто и третото уравнение на Максуел.

1 - Сравнение на първо и четвърто уравнение

Към уравнение (X.15) се прилага дивергенция, а уравнение (X.22) се диференцира по времето.

Първо уравнение: $div rot\vec{E} = -div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Тъй като $div rot\vec{E} = 0$, то $div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Четвърто уравнение: $\frac{\partial}{\partial t} div\vec{B} = 0 \Rightarrow div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Следствията и от двете уравнения са еднакви.

2 - Сравнение на второ и трето уравнение

Към уравнение (X.20) се прилага дивергенция, а уравнение (X.17) се диференцира по времето.

Трето уравнение: $div rot\vec{H} = div\vec{j} + div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Тъй като $div rot\vec{H} = 0$, то $\frac{\partial}{\partial t} div\vec{D} = -div\vec{j}$.

Второ уравнение: $\frac{\partial}{\partial t} div\vec{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Следствията от двете уравнения водят до:

$$div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Това е законът за запазване на заряда и е изпълнен винаги.

Следователно, системата от четири основни уравнения на Максуел не е свръхопределена, тъй като първото и четвъртото уравнение, както и второто и третото уравнение имат еднакви диференциални следствия. Следователно, системата е съвместима и пълна, т.е. тя е еднозначна.

б) несиметричност

Системата уравнения на Максуел е несиметрична спрямо електричното и магнитното поле поради наличието на електрични заряди (неподвижни и подвижни) и липсата на магнитни заряди. Във вакуум, т. е. в пространство без електрични заряди ($\rho = 0$) и без токове на проводимост ($\vec{j} = 0$), уравненията са напълно симетрични. За вакуум уравненията на Максуел в диференциална и интегрална форма се записват по следния начин:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_L \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

$$div\vec{D} = 0 \qquad \oint_S \vec{D}.d\vec{S} = 0$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_L \vec{H}.d\vec{l} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad \oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

в) физичен смисъл

Уравненията на Максуел показват, че изменящото се с времето вихрово магнитно поле индуцира в пространството изменящо се с времето вихрово електрично поле и изменящото се с времето вихрово електрично поле индуцира в пространството изменящо се с времето вихрово магнитно поле.

Следователно, изменящите се с времето електрично и магнитно полета съществуват винаги заедно и са неразривно свързани. Това е ново физично поле – електромагнитно поле. За да се дефинира това поле, на всяка точка от пространството се съпоставят два вектора $\vec{E}(\vec{r},t)$ и $\vec{H}(\vec{r},t)$.

г) граници на валидност

Уравненията на Максуел са в сила при следните условия:

- Материалните среди (тела), в които действат електромагнитни полета са неподвижни.
- Величините ε, μ, σ, характеризиращи материалните свойства на средата, не зависят от времето и от векторите на полето. Те могат да зависят само от координатите.
- В пространството, където действат електромагнитните полета няма постоянни магнити и феромагнитни.

Теорията на Максуел е макроскопична теория, тъй като разглежда електромагнитното поле, създадено от макроскопични заряди и токове. Тя не разкрива вътрешните механизми на явленията, които възникват в средата. Тази теория получава по-нататъшното си развитие в квантовата електродинамика.

Съществуването на електромагнитните вълни е предсказано теоретично от Максуел през 1863 г. Той прави предположение, че светлината също е електромагнитна вълна, т. е. към електромагнитните явления се включват и оптичните. По-късното развитие на оптиката доказва това и тези уравнения се използват за изучаване на разпространението на светлината. Уравненията на Максуел в непроводяща среда (вакуум) в оптиката се свеждат до две вълнови уравнения за компонентите на $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на електромагнитното поле. Решенията на вълновите уравнения описват разпространението на бягаща плоска вълна с определена скорост.