МАТЕМАТИКАТА ВЪВ ФИЗИКОХИМИЯТА

Логаритъм

$\log_a P = x$ **т.е.** $a^x = a^{\log_a P} = P$

Основа на логаритъма.

Логаритъмът е степента (x), на която трябва да бъде повдигната основата (a), за да се получи числото P.

$\log_a 1 = 0$ **и** $\log_a a = 1$

Логаритми, използвани във физикохимията:

$\log_{10} P = \lg P$ **- десетичен логаритъм** (рядко се използва)

$\log_e P = \ln P$ **- натурален логаритъм** (най-често използван)

(e – Неперово число, e= 2,718281828459045 ...)

Някои свойства на логаритмите:

$$\log_a (P.Q) = \log_a P + \log_a Q$$

$$\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

$$\log_a P^n = n.\log_a P$$

Производна на функция

Нека функцията $f(x)$ е опеделена в интервала (a,b), а точките x и x_o принадлежат на този интервал, при това $x \neq x_o$. Числото $\Delta x = x - x_o$ се нарича нарастване на аргумента в точката x_o. Следователно числото:

$\Delta f = f(x) - f(x_o)$ или $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x_o)$

се нарича нарастване на функцията f в точката x_o.

Границата на отношението

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ се нарича производна на функцията f в точката x_o.

Скоростта на равномерно праволинейно движение е равна на:

$$\upsilon = \frac{S}{t}$$

Тогава функцията $S = S(t)$ дава изминатия път за време $t \geq 0$. Следователно нарастването:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$

показва изминатия път за време Δt от момента t до момента $t + \Delta t$, а отношението:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

показва *средната скорост на движение* в интервала $[t, t+\Delta t]$. Тогава границата:

$$\upsilon = \upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

се нарича *скорост на движение в момент* t.

Означения на първите производни (за функцията $y = f(x)$):

1) означение на Лайбниц: $\frac{dy}{dx}$

2) означение на Лагранж: $y' = f'(x)$ - означение, използвано в средния училищен курс.

ТАБЛИЦА НА ПРОИЗВОДНИТЕ

Функция	Производна	Функция	Производна
$y = A \qquad A = const$	$y' = 0$	$y = \sqrt{x} \qquad x > 0$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = u + v + w + \ldots$ $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x), \ldots$	$y' = u' + v' + w' + \ldots$	$y = \ln x \qquad x \neq 0$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = u.v$	$y' = u'.v + v'u$	$y = a^x \qquad a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = \frac{u}{v} \qquad v \neq 0$	$y' = \frac{u'.v - v'u}{v^2}$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = A.u$	$y' = A$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	$y = tgx \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \cot gx \qquad x \neq k\pi$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\frac{dy}{dx}$ ← безкрайно малко изменение на функцията y → $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

← безкрайно малко изменение на променливата x →

Частна производна

Частна производна на функция на много променливи е производна по една от променливите, докато останалите променливи се приемат за параметри. Всяка функция на много променливи притежава толкова частни производни, колкото са променливите ѝ.

За $u = u(x, y)$ частните производни са:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$$

Производната на функцията u по променливата x при постоянна променлива (параметър) y.

Производната на функцията u по променливата y при постоянна променлива (параметър) x.

Нека е дадена функцията $u(x, y) = 3x^2y^3$. Нейните частни производни са:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y = (3x^2)'.y^3 = 3.2.x.y^3 = 6xy^3$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = 3x^2.(y^3)' = 3x^2.3y^2 = 9x^2y^2$$

Пълен диференциал

Ако u е функция на *две* променливи, $u=f(x,y)$, то пълен диференциал на функцията u се нарича изразът:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Ако u е функция на *три* променливи, $u=f(x,y,z)$, то пълен диференциал на функцията u се нарича изразът:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Ойлерови трансформации на пълните диференциали

$$u = f(x, y)$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x dy \longrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\right]_x = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\right]_y$$

пълен диференциал

Ойлерова трансформация

Неопределен интеграл

Ако $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + i$

Всъщност f(x) е F'(x) – първата производна на функцията.

Чете се "неопределен интеграл от f(x)"

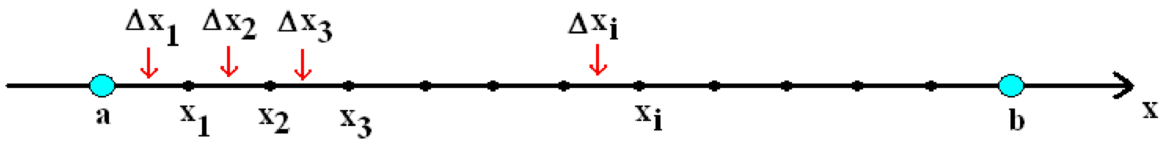
Знак на интеграла.

Интеграционна константа.

Подинтегрална функция.

Определен интеграл

Нека f е еднозначно определена функция в интервала $a \le x \le b$. Да предположим, че този интервал е разбит на N-подинтервала, а x_i е стойност на x в i-тия интервал, който е с дължина Δx_i.



$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots.. + f(x_N)\Delta x_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

Ако N→∞ и дължината на интервалите $\Delta x_i \to 0$ то горната сума представлява $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

Горна граница на интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

Долна граница на интеграла.

ТАБЛИЦА НА ОСНОВНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

Неопределен интеграл	**Определен интеграл**
$\int A dx = A\int dx = Ax + i$ (A=const)	$\int_{x1}^{x2} A dx = A\int_{x1}^{x2} dx = A.x \Big\vert_{x1}^{x2} = A(x_2 - x_1)$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + i$	$\int_{x1}^{x2} x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big\vert_{x1}^{x2} = \frac{1}{n+1}\left(x_2^{n+1} - x_1^{n+1}\right)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + i$	$\int_{x1}^{x2} \frac{dx}{x} = \ln x \Big\vert_{x1}^{x2} = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\frac{x_2}{x_1}$
$\int e^x dx = e^x + i$	$\int_{x1}^{x2} e^x dx = e^x \Big\vert_{x1}^{x2} = e^{x2} - e^{x1}$