Семинар 9

Активен експеримент при две нива на входните фактори

Регресионната зависимост се избира от вида

$$Y = a_0 + \Sigma a_i X_i + \Sigma a_{i,j} X_i X_j + \ ... \ + a_{1,2..N} X_1 X_2 ... X_N, \qquad (9.1)$$

където с **a** са означени регресионните коефициенти, а с X_i – факторите.

1. Пълен факторен експеримент. За всеки един от входните фактори X_i се избира интервал на вариране (X_{imax}, X_{imin}), чиито граници се наричат долно и горно ниво на фактора. Средата на интервала $X_{i0} = (X_{imax} + X_{imin})/2$ се нарича основно ниво на съответния фактор. Тъй като входните фактори имат различна размерност и различни интервали на вариране, то големината на коефициентите в **(9.1)** не може да даде относителното влияние на всеки един от параметрите върху целевата функция. Ето защо следващата стъпка е привеждането на стойностите на входните параметри в безразмерни числа Z_i по формулата:

$$Z_i = (X_i - X_{i0})/(X_{imax} - X_{i0}) \qquad (9.2)$$

Числата Z_i се наричат кодирани стойности на факторите. Ако се заместят стойностите на горно и долно ниво на съответните параметри в (9.2), за кодираната стойност на долно ниво ще се получи -1, а за тази на горно ниво - +1, т.е. $Z_{imin} = -1$ и $Z_{imax} = +1$.

Ако математичният модел има два входни параметъра съответното регресионно уравнение, което дава зависимостта на некодираната целева функция от кодираните фактори, е следното:

$$Y = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_{1,2} Z_1 Z_2 \qquad (9.3)$$

Вижда се, че всички коефициенти на регресия са с размерността на целевата функция. Кодираните стойности, при които ще се провеждат $\mathbf{2^2 = 4}$ експеримента, ще са следните:

Номер на експеримента	**Z_1**	**Z_2**
1	-1	-1
2	-1	+1
3	+1	-1
4	+1	+1

За всеки един от четирите набора на входните параметри се провеждат няколко паралелни измервания на целевата функция (*паралели*, *повторения*). Намират се техните средни стойности $\mathbf{Y^j}$, където **j** е номерът на експеримента. Например за два фактора, ако се провеждат пет повторения са необходими общо **4x5 = 20** измервания на целевата функция.

При три фактора, регресионно уравнение ще се дава с формулата:

$$Y = a_0 + a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3 + a_{1,2}Z_1Z_2 + a_{1,3}Z_1Z_3 + a_{2,3}Z_2Z_3 + a_{1,2,3}Z_1Z_2Z_3 \qquad \mathbf{(9.4)}$$

а кодираните стойности, при които ще се провеждат $\mathbf{2^3 = 8}$ експеримента, ще са следните:

Номер на експеримента	**Z_1**	**Z_2**	**Z_3**
1	**-1**	**-1**	**-1**
2	**-1**	**-1**	**+1**
3	**-1**	**+1**	**-1**
4	**-1**	**+1**	**+1**
5	**+1**	**-1**	**-1**
6	**+1**	**-1**	**+1**
7	**+1**	**+1**	**-1**
8	**+1**	**+1**	**+1**

Тази таблица (както и предишната) от кодирани стойности на входните параметри се нарича ***план-матрица*** на експеримента. Тя може да се запише по различни начини, но най-удобният е следният: за първия фактор първата половина стойности са **-1**, а втората половина **+1**. За втория фактор първата четвърт са **-1**, втората четвърт **+1**, третата **-1** и последната **+1**. За третия параметър първата осма са **-1**, и т.н. За последния фактор кодираните стойности се променят от експеримент на експеримент. Могат да съществуват различни начини на подредбата на кодирането на експериментите, но важно е да няма повторения в набора от входни фактори.

План-матрицата притежава свойства, които се използват за изчисляване на коефициентите на регресия. Тези свойства лесно могат да се проверят чрез използване на стойностите на Z_i от двете таблици по-горе. С Z_i^j се означават кодираните стойности на параметрите, където **i** е номерът на съответния фактор (номерът на стълба), а **j** - номерът на експеримента (реда). Сумите по-долу се сумират по **j** от **1** до **K**, където **K** е броят на независимите експерименти: $K = 2^N$.

1) Сумата от кодираните стойности на всеки един от факторите е нула, т.е. сумата на числата във всеки стълб е равна на нула.

$$\Sigma Z_i^j = 0$$

2) Сумата от квадратите на числата във всеки стълб е равна на броя на експериментите **K**; $K = 2^N$. Причината е, че $(Z_i^j)^2 = 1$.

$$\Sigma (Z_i^j)^2 = K$$

3) Всеки два стълба са ортогонални, т.е. сумата на произведението на числата на всеки два стълба е нула (символът ≠ означава различно).

$\Sigma\ Z_i^j Z_k^j = 0$, за $j \neq k$ и очевидно (вижте свойство 2) е равно на 1 за $j = k$;

4) Сумата от взаимното произведение на повече от два стълба е равно на нула, например това на три стълба.

$$\Sigma\ Z_i^j Z_k^j Z_l^j = 0,\ \text{за}\ j \neq k \neq l \neq j.$$

Чрез използването на свойства 1) - 4) могат да се получат формулите за *оценките* на коефициентите на регресията (9.4), които се означават с $b_0, b_1, \ldots b_{1,2,..N}$.

$$b_0 = \Sigma\ Y^j/K \qquad (9.5a)$$

$$b_i = \Sigma\ Y^j Z_i^j/K; \quad i = 1 \ldots N \qquad (9.5b)$$

$$b_{i,k} = \Sigma\ Y^j Z_i^j Z_k^j/K; \quad i,k = 1 \ldots N \qquad (9.5c)$$

$$b_{i,k,l} = \Sigma\ Y^j Z_i^j Z_k^j Z_l^j/K; \quad i,k = 1 \ldots N \qquad (9.5d)$$

Сумира се по номера на експеримента j от 1 до K, където K е броят на независимите експерименти: $K = 2^N$. С Y^j се означава средната стойност от измерените значения на целевата функция при стойности на входните параметри, дадени в ред номер j.

2. Статистическа обработка на резултатите. Тъй като измерените стойности на целевата функция са случайни величини и следователно случайни величини са и коефициентите (9.5), е необходим статистически анализ, за да се приемат резултатите.

Първо се проверява хипотезата за еднакви възпроизводимости на отделните експерименти, т.е. за еднородност (статистическа неотличимост) на съответните дисперсии. За всеки набор от входни параметри се провеждат няколко измервания на целевата функция, които се характеризират със своето стандартно отклонение. Ако $\mathbf{Y_m^j}$ е стойността на целевата функция при **m**-тото повторение на **j**-я експеримент и броят на повторенията е **M**, то средната стойност и стандартното отклонение на целевата функция при тези повторение се изчисляват с формулите (сумира по **m** се от **1** до **M**):

$$\bar{Y}^j = \Sigma\, Y_m^j/M \qquad \textbf{(9.6a)}$$

$$S_j^2 = \Sigma\, (Y_m^j - \bar{Y}^j)^2/(M-1) \qquad \textbf{(9.6b)}$$

Оценките на коефициентите на регресия се изчисляват по формули **(9.5)**, само ако между всички $\mathbf{S_j}$ няма статистическа разлика, т.е. възпроизводимостите на различните експерименти са еднакви. При еднакъв брой паралели M във всички експерименти хипотезата за равенство между $\mathbf{S_j}$ може да се провери с критерия на Фишер. За тази цел се изчислява отношението

$$F_{kr} = S_{max}^2/S_{min}^2,$$

където $\mathbf{S_{max}}$ е най-голямото стандартно отклонение, а $\mathbf{S_{min}}$ най-малкото от всички $\mathbf{S_j}$. Избира се ниво на значимост $\boldsymbol{\alpha}$ и от таблица на интегралните граници на F-разпределението за степените свобода $\mathbf{f_1 = M - 1}$ и $\mathbf{f_2 = M - 1}$ се намират интегралните граници $\mathbf{F(f_1,f_2,\ \alpha) = F(f_2,f_1,\ \alpha)}$ - в случая те са едни и същи, защото $\mathbf{f_1 = f_2}$. При $\mathbf{1/F(f_2,f_1,\ \alpha) < F_{кр} < F(f_1,f_2,\ \alpha)}$, възпроизводимостите на всички експерименти са еднакви. Ако не са изпълнени двете неравенства, възпроизводимостите не са еднакви. В този случай е необходимо провеждането на част от експериментите, за да се провери дали тази разлика във възпроизводимостите не се дължи на груби експериментални грешки или е физически присъща на съответните експерименти. Проверката за еднородност на дисперсиите на отделните експерименти може да се извърши с критерия на Кохрън или с критерия на Бартлет [1].

Следва проверката за статистическата значимост (статистическото отличие от нула) на регресионните коефициенти. За тази цел се извършва тяхното интервално оценяване, чрез теста на Стюдънт. Ако нулата принадлежи на даден оценяващ интервал, то съответният регресионен коефициент е статистически неотличим от нула и той се приема за равен на нула в уравнението (9.3), съответно (9.4). В противен случай той е статистически значим и в уравнение (9.3), съответно (9.4) присъства неговата експериментална стойност.

Когато броят на повторенията на всички експерименти са равни помежду си и съответните им възпроизводимости са еднакви, интервалната оценка на коефициентите $\mathbf{a_i}$ (съответно $\mathbf{a_{i,k}}$ и $\mathbf{a_{1,2,3}}$) се дава с уравнението

$$-t(f,\alpha).\sqrt{\frac{S^2}{K^I}} \le a_i \le t(f,\alpha).\sqrt{\frac{S^2}{K^I}} \tag{9.7}$$

където **t(f, α)** е интегралната граница на t-разпределението при ниво на значимост **α** и степени свобода$\mathbf{f = K(M - 1)}$; **K** е броят на експериментите, M е броят на повторенията на всеки един експеримент, а K' = KM е броят на всички опити. Стандартното отклонение **S** е оценка за дисперсията на отделните експерименти (само при еднаквата им възпроизводимост) и е равно на:

$$S^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{S_j{}^2}{K} \tag{9.8}$$

Тъй като във всички формули (9.5) присъстват членовете $\mathbf{Y^j}$ в числителя и **N** в знаменателя, а изразите от вида $\mathbf{Z_i}$ или $\mathbf{Z_iZ_k}$ или $\mathbf{Z_iZ_kZ_l}$ са равни на +1 или -1 и като се имат предвид свойствата на дисперсията, интервалната оценка (9.7) се отнася за всички коефициенти на регресия - $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{a_{i,l}}$ и $\mathbf{a_{1,2,3}}$ и т.н.

Адекватността на модела (9.4) се проверява с критерия на Фишер. За тази цел се изчислява стандартното отклонение (на адекватност) $\mathbf{S_{ad}}$, което е равно на:

$$S_{ad} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{K}(Y^j - \overline{Y}^j)^2}{K - L - 1}}$$

където $\overline{\mathbf{Y}}^j$ е средната стойност на целевата функция от всичките повторения на даден експеримент, а $\mathbf{Y}^j$ е стойността на целевата функция, която се получава при заместване на кодираните стойности Z_i^j, $j = 1 \ldots 2^N$, на входните фактори в уравнението на регресия. **L** е броят на статистически значимите коефициенти на регресия. Изчислява се критерия $\mathbf{F_{кр}}$ по формулата:

$$F_{кр} = S_{ad}^2/S^2,$$

където **S** е стандартното отклонение (9.8) на експериментите. За степени свобода $\mathbf{f_{ad}= K - L - 1}$ и $\mathbf{f = K(M - 1)}$ и избрано ниво на значимост $\boldsymbol{\alpha}$ се намира интегралната граница $F(\mathbf{f_{ad}}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ на F-разпределението. Ако $\mathbf{F_{кр}} < F(\mathbf{f_{ad}}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$, моделът е адекватен, а при $\mathbf{F_{кр}} > F(\mathbf{f_{ad}}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ е неадекватен.

Литература

1. Футеков Л., Пенчев П., "Теория на експеримента", Пловдив, Изд. ПУ, 1992, 1998.

Въпроси и задачи

Задача 9.1. При три входни фактора колко независими експерименти ще има? А при четири?

Решение: При три входни фактора броят на независимите експерименти е 2^3 = 8. При четири е 2^4 = 16.

Задача 9.2. Припомнете си от аналитичната геометрия какъв род криви се описват с уравнението, което отговаря на пълен факторен експеримент с два фактора.

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{1,2}X_1X_2$$

Отговор: Ако коефициентът $a_{1,2}$ е различен от нула, това е параболоичен хиперболоид, чийто повърхност представлява една седловидна крива. Ако коефициентът $a_{1,2}$ е развен на нула, това е уравнение на равнина в тримерното пространство.

Задача 9.3*. Интервалната оценка на всички коефициенти се дава с една и съща формула – вижте (9.7) и (9.8). Това на практика означава, че те като случайни величини имат една и съща дисперсия. Защо това е така?

Упътване: Използвайте свойствата на дисперсията, т. 6 и 7 от частта „**1.3. Свойства на числовите характеристики на случайните величини**" в първа лекция.

Решение: Коефициентите се изчисляват по формули (9.5), дадени по-горе. Използваме свойството на дисперсията:

7. Дисперсията на сума от ***независими*** случайни величини е равна на сума от техните дисперсии. $$D(X \pm У \pm \dots \pm Z) = D(X) + D(У) + \dots + D(Z)$$

Ако приложим това свойство към b_0, получаваме:

$$D(b_0) = D(\Sigma\, Y^j/K) = \Sigma\, D(Y^j/K) = [\Sigma D(Y^j)] / K^2$$

Обърнете внимание, че резултатите от независимите експерименти Y^j **са** независими случайни величини!

Ако приложим това свойство към b_i, получаваме:

$$D(b_i) = D(\Sigma Y^j Z_i^j/K) = \Sigma D(Y^j Z_i^j/K) = \Sigma D(Y^j) {Z_i^j}^2/ K^2 = [\Sigma D(Y^j)] / K^2$$

Не забравяме, че числата Z_i^j са или +1 или -1 и излизат извън дисперсията като квадрати ${Z_i^j}^2$, които са +1.

Ако приложим това свойство към $b_{i,k}$, получаваме:

$$D(b_i) = D(\Sigma Y^j Z_i^j Z_k^j/K) = \Sigma D(Y^j Z_i^j) {Z_i^j}^2 {Z_k^j}^2/K^2 = [\Sigma D(Y^j)] / K^2$$

Не забравяме, че числата Z_i^j (и Z_k^j, който са същите) са или +1 или -1 и излизат извън дисперсията като квадрати ${Z_i^j}^2$ и ${Z_k^j}^2$, които са +1.

Аналогични преобразования могат да се направят и за коефициентите $b_{i,k,l}$ и т.н. Получихме, че дисперсията на всички коефициенти е една и съща и равна на:

$$[\Sigma D(Y^j)] / K^2$$

Задача 9.4. Като използвате свойства 1) – 4) на план матрицата на активния експеримент на две нива с три фактора докажете формули (9.5).

Решение: Разписано за конкретен експеримент с номер j уравнение (9.4) е следното:

$$Y^j = a_0 + a_1 Z_1^j + a_2 Z_2^j + a_3 Z_3^j + a_{1,2} Z_1^j Z_2^j + a_{1,3} Z_1^j Z_3^j + a_{2,3} Z_2^j Z_3^j + a_{1,2,3} Z_1^j Z_2^j Z_3^j$$

За коефициента a_0: Ако го сумираме по номера на независимия експеримент j и сумата разделим на броя на независимите експерименти, K, ще получим

в лявата част на уравнението: $\Sigma\ Y^j / K$

за първия член: $\Sigma\ a_0 / K = a_0 K / K = a_0$

за следващия член: $\Sigma\ a_1\ Z_1^j / K = (\Sigma\ Z_1^j)\ a_1/K = 0$

за по-следващия член: $\Sigma\ a_2\ Z_2^j / K = (\Sigma\ Z_2^j)\ a_2/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ a_3\ Z_3^j / K = (\Sigma\ Z_3^j)\ a_3/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ a_{1,3}z_1^j z_3^j\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j z_3^j)\ a_{1,3}/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ a_{2,3}z_1^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma\ z_2^j z_3^j)\ a_{2,3}/K = 0$

за последния член: $\Sigma\ a_{1,2,3}z_1^j z_2^j z_3^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_2^j z_3^j)\ a_{1,2,3}/K = 0$

Сумите, които са нули са означени с червено: че са нули следва от свойствата на план-матрицата, които са дадени в началото на този материал.

Така сумата доби вида $\Sigma Y^j/K = a_0$, което е формула **(9.5a)** за коефициента a_0.

За коефициента a_1: Ако умножим уравнение (9.4) по z_1^j го сумираме по номера на независимия експеримент j и сумата разделим на броя на независимите експерименти, K, ще получим

в лявата част на уравнението: $\Sigma\ z_1^j\ Y^j\ /\ K$

за първия член: $\Sigma\ z_1^j\ a_0\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j)\ a_0\ /\ K = 0$

за следващия член: $\Sigma\ a_1\ z_1^j z_1^j\ /\ K = (\Sigma 1)\ a_1/K = K\ a_1/K = a_1$

за по-следващия член: $\Sigma\ a_2\ z_1^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j z_2^j)\ a_2/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ a_3\ z_3^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_3^j)\ a_3/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j a_{1,2}z_1^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_1^j z_2^j)\ a_{1,2}/K = (\Sigma 1 x z_2^j)\ a_{1,2}/K = (\Sigma z_2^j)\ a_{1,2}/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j a_{1,3}z_1^j z_3^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_1^j z_3^j)\ a_{1,3}/K = (\Sigma 1 x z_3^j)\ a_{1,3}/K = (\Sigma z_3^j)\ a_{1,3}/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j a_{2,3}z_2^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_2^j z_3^j)\ a_{2,3}/K = 0$

за последния член:

$\Sigma\ z_1^j a_{1,2,3}z_1^j z_2^j z_3^j/K = \Sigma z_1^j z_1^j z_2^j z_3^j a_{1,2,3}/K = (\Sigma 1 x z_2^j z_3^j) a_{1,2,3}/K = (\Sigma z_2^j z_3^j) a_{1,2,3}/K = 0$

Сумите, които са нули са означени с червено: това следва от свойствата на план-матрицата, които са дадени в началото на този материал. Не забравяме, че $z_1^j z_1^j$ е квадратът на z_1^j, който е единица!

Така сумата доби вида $\Sigma\ z_1^j Y^j/K = a_1$, което е формула **(9.5b)** за коефициента a_1. Аналогично се получават формулите за коефициентите a_2 и a_3, просто вместо умножение с z_1^j се умножава с z_2^j или z_3^j.

За коефициента a_{12}: Ако умножим уравнение (9.4) по $z_1^j z_2^j$ го сумираме по номера на независимия експеримент j и сумата разделим на броя на независимите експерименти, K, ще получим

в лявата част на уравнението: $\Sigma\ z_1^j z_2^j Y^j\ /\ K$

за първия член: $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_0\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j z_2^j)\ a_0\ /\ K = 0$

за следващия член: $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_1^j a_1/K = (\Sigma\ z_2^j)\ a_1/K = 0$

за по-следващия член: $\Sigma\ a_2 z_1^j z_2^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j)\ a_2/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_3 z_3^j\ /\ K = (\Sigma z_1^j z_2^j z_3^j)\ a_3/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_{1,2} z_1^j z_2^j\ /\ K = \Sigma\ a_{12} z_1^j z_1^j z_2^j z_2^j\ /\ K = (\Sigma 1x1) a_{1,2}/K = K a_{1,2}/K = a_{1,2}$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_{1,3} z_1^j z_3^j/K = \Sigma\ a_{1,3} z_1^j z_1^j z_2^j z_3^j/K = (\Sigma z_2^j z_3^j)\ a_{1,3}/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_{2,3} z_2^j z_3^j/K = \Sigma\ a_{2,3} z_2^j z_2^j z_1^j z_3^j/K = (\Sigma z_1^j z_3^j)\ a_{2,3}/K = 0$

за последния член:

$$\Sigma z_1^j z_2^j a_{1,2,3} z_1^j z_2^j z_3^j/K = \Sigma a_{1,2,3} z_1^j z_1^j z_2^j z_2^j z_3^j/K = (\Sigma 1x1x z_3^j) a_{1,2,3}/K = (\Sigma z_3^j) a_{1,2,3}/K = 0$$

Сумите, които са нули са означени с червено: това следва от свойствата на план-матрицата, които са дадени в началото на този материал. Не забравяме, че $z_1^j z_1^j$ е квадратът на z_1^j, който е единица: същото се отнася и за $z_2^j z_2^j$!

Така сумата доби вида $\Sigma\ z_1^j z_2^j\ Y^j\ /\ K = a_{12}$, което е формула **(9.5c)** за коефициента $a_{1,2}$. Аналогично се получават формулите за коефициентите $a_{1,3}$ и $a_{2,3}$, просто вместо умножение с $z_1^j z_2^j$ се умножава с $z_1^j z_3^j$ или $z_2^j z_3^j$.

За коефициента $a_{1,2,3}$: Ако умножим уравнение (9.4) по $z_1^j z_2^j z_3^j$ го сумираме по номера на независимия експеримент j и сумата разделим на броя на независимите експерименти, K, ще получим

в лявата част на уравнението: $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j Y^j\ /\ K$

за първия член: $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j a_0\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j)\ a_0\ /\ K = 0$

за следващия член: $\Sigma\ z_1^j z_2^j a_1 z_1^j/K = (\Sigma\ z_2^j z_3^j)\ a_1/K = 0$

за по-следващия член: $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j a_2 z_2^j\ /\ K = (\Sigma\ z_1^j z_3^j)\ a_2/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j a_3 z_3^j\ /\ K = \Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j z_3^j\ a_3/\ K = (\Sigma z_1^j z_2^j)\ a_3/K = 0$

и т.н. :

$\Sigma z_1^j z_2^j z_3^j a_{1,2} z_1^j z_2^j/K = \Sigma\ z_1^j z_1^j z_2^j z_2^j\ a_{12} z_3^j/K = (\Sigma 1x1) a_{1,2} z_3^j/K = (\Sigma z_3^j)\ a_{1,2}/K = 0$

и т.н. :

$\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j a_{1,3} z_1^j z_3^j/K = \Sigma\ z_1^j z_1^j z_3^j z_3^j z_2 a_{1,3}/K = (\Sigma z_2^j)\ a_{1,3}/K = 0$

и т.н. : $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j a_{2,3} z_2^j z_3^j/K = \Sigma\ z_2^j z_2^j z_3^j z_3^j z_1^j a_{2,3}/K = (\Sigma z_1^j)\ a_{2,3}/K = 0$

за последния член:

$\Sigma z_1^j z_2^j z_3^j a_{1,2,3} z_1^j z_2^j z_3^j/K = \Sigma a_{1,2,3} z_1^j z_1^j z_2^j z_2^j z_3^j z_3^j/K = (\Sigma 1x1x1) a_{1,2,3}/K = Ka_{1,2,3}/K = a_{1,2,3}$

Сумите, които са нули са означени с червено: това следва от свойствата на план-матрицата, които са дадени в началото на този материал. Не забравяме, че $z_1^j z_1^j$ е квадратът на z_1^j, който е единица: същото се отнася и за $z_2^j z_2^j$ и $z_3^j z_3^j$!

Така сумата доби вида $\Sigma\ z_1^j z_2^j z_3^j\ Y^j\ /\ K = a_{1,2,3}$, което е формула **(9.5d)** за коефициента $a_{1,2,3}$. Аналогично се получават формулите за коефициента $a_{1,2,3,4}$, когато имаме четири входни фактора: просто вместо умножение с $z_1^j z_2^j z_3^j$ се умножава с $z_1^j z_2^j z_3^j z_4^j$.

Задача 9.5. План матрицата съдържа схемата на провеждане на <u>неповтарящи се</u> експерименти, т.е. експерименти при които няма повторение на стойностите на входните фактори. Често тя се записва по различни начини. Един от тях е следният: a) първият фактор има стойности -1 и +1, които се редуват, b) при втория фактор те се редуват по двойки, c) при третия по четворки, и т.н. въобще при к-тия фактор n-торките които се редуват са с дължина 2^{k-1} . Проверете това като сравните двете план матрици – тази за два фактора и тази за три. След това, без да гледате план матриците се опитайте да ги разпишете.

Отговор: В задача С9.1 ще попълните същата план-матрица, която ако не е вярна ще бъде коригирана от асистента.

Практически задачи

Задача С9.1. Даден технологичен процес за извличане на веществото **B** зависи от концентрацията C_A на веществото **A**, температурата **T** и времето **t**. Химик, възпитаник на ХФ на ПУ трябва да проведе активен факторен експеримент на две нива на факторите, който да определи как зависи добива на веществото B от тези три фактора. Той избира те да са в интервалите

$$20\ \% \le C_A \le 60\ \%;\quad 40\ ^\circ C \le T \le 60\ ^\circ C;\quad 20\ min \le t \le 50\ min.$$

Попълнете следната таблица.

	План матрица безразмерни стойности			Входни параметри Реални стойности		
№ на експер.	Z_1 -	Z_2 -	Z_3 -	X_1 %	X_2 °C	X_3 min
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Задача С9.2. За технологичния процес от задача С9.1. химикът избира да има три повторения (реплики) на всеки един от 8^{те} независими експеримента. <u>Тези общо 24 експеримента не трябва да се провеждат последователно, а в случаен ред</u>. Представете си, че рано сутринта, когато температурата на околната среда е ниска сме провели трите реплики, които отговарят на $Z_1 = -1$, $Z_2 = -1$ и $Z_3 = -1$. Някъде към обед (когато е топло) сме провели трите реплики, които отговарят на $Z_1 = -1$, $Z_2 = -1$ и $Z_3 = +1$, а следобед (още по-топло) отново три реплики за $Z_1 = -1$, $Z_2 = +1$ и $Z_3 = +1$. Ако изследваният процес зависи от температурата (а в химията всичко зависи от температурата!), то ще въведем влияние на този случаен фактор (околната температура) и моделът ще „отчете“, че при високи нива на факторите z_2 и z_3 имаме определено изменение в целевата функция У.

a) Напишете в разбъркан ред числата от 1 до 24. Разпишете тази поредица в следната таблица в колоните $У_1$, $У_2$ и $У_3$, ред по ред, отгоре надолу. Преди това попълнете колоните, в зависимост от кодираните стойности на параметрите, които сте избрали в задача С9.1.

	Входни параметри Реални стойности			Ред на провеждане на репликите		
№ на експер	X_1 %	X_2 °C	X_3 min	y^1	y^2	y^3
1	20	40	20			
2	60	40	20			
3	20	60	20			
4	60	60	20			
5	20	40	50			
6	60	40	50			
7	20	60	50			
8	60	60	50			

b) При провеждане на експериментите са получени следните стойности на целевата функция:

	Входни параметри Реални стойности			Стойности на целевата функция		
№ на експер	X_1 %	X_2 °C	X_3 min	y_j^1 %	y_j^2 %	y_j^3 %
1	20	40	20	41.9	41.4	41.6
2	60	40	20	22.2	22.1	22.5
3	20	60	20	39.6	39.4	39.2
4	60	60	20	66.9	66.7	66.5
5	20	40	50	32.6	32.6	32.2
6	60	40	50	62.8	62.6	62.3
7	20	60	50	30.2	30.6	30.5
8	60	60	50	88.6	88.1	88.3

Отворете файла **sem09_model.xls**. Разгледайте таблицата (sheet) “**READY**”, в която

- са дадени горните числови данни;

- намерени са средните стойности на целевата функция от трите реплики, както и стандартното отклонение;

- изчислени са произведенията във формули (9.5);

- изчислени са коефициентите на модела по формули (9.5).

Разгледайте внимателно изчисленията и се опитайте да ги свържете с формулите в учебния материал.

c) Отворете таблицата (sheet) "`WORK`" на файла `sem09_model.xls` и повторете изчисленията.

d) Отворете таблицата (sheet) "`FUNC`" на файла `sem09_model.xls` и повторете изчисленията от т. b), но използвайте функцията `SUMPRODUCT()`. Обърнете внимание как е изчислен коефициентът b1,2,3 в клетка C23. Използвана е функцията във вида `=SUMPRODUCT(K2:K9,E2:E9,F2:F9,G2:G9)/8`.

e) В таблицата (sheet) " `WORK` " на файла `sem09_model.xls` са предсказани три експеримента – стойностите на техните входни фактори са в региона `B11:D13`, план матрицата – в региона `E11:G13`, а предсказаната целева функция – в региона `T11:T13`. В таблицата (sheet) "`FUNC`" изчислете целевата функция за следните входни фактори:

№ на експер	X_1 %	X_2 °C	X_3 min
1	30	50	10
2	50	42	25
3	10	70	15

Отговор:

№ на експер	X_1 %	X_2 °C	X_3 min	Ycalc
1	30	50	10	41.19
2	50	42	25	34.81
3	10	70	15	27.98