

Семинар 7

Матрици, детерминанти и система от линейни уравнения

(преговор)

Задача 7.1. Съберете и извадете двете матрици A и B на ръка.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

Решение: Матрици се събират и изваждат като се събират и изваждат съответните елементи

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 1+(-2) \\ 3+7 & 4+(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 1-(-2) \\ 3-7 & 4-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 7.2. Умножете матрицата B от предната задача на числото 2 на ръка.

Решение: Матрица се умножава по число като всеки неин елемент се умножава по това число.

$$(-2)B = (-2) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)5 & (-2)(-2) \\ (-2)7 & (-2)(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -14 & 16 \end{pmatrix}$$

Задача 7.3. Умножете на ръка A по B , както и B по A . Изпълнява ли се комутативното свойство?

Решение: Съгласно формула (7.1) от лекция 7

$$c_{k,l} = \sum_{m=1}^M a_{k,m} \cdot b_{m,l} \quad (7.1)$$

матриците се умножават по правилото „ред по стълб“, което на практика означава, че елементът който стои в k -ти ред и j -ти стълб се получава при скаларното произведение на k -ти ред от лявата матрица и j -ти стълб от дясната матрица.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times (-2) + 2 \times (-8) \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times (-2) + 4 \times (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ 43 & -38 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + (-2) \times 3 & 5 \times 2 + (-2) \times 4 \\ 7 \times 1 + (-8) \times 3 & 7 \times 2 + (-8) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -17 & -18 \end{pmatrix}$$

Виждаме, че комутативното свойство не се изпълнява в общия случай при матриците, т.е. $AB \neq BA$.

Практически задачи

Задача С7.1. Отворете файла `seminar07_matrices.xls`. Разгледайте таблицата (sheet) "Multiplication", в която са умножени две матрици А и В (размерностите им са дадени като долни индекси).

$$C_{2,2} = A_{2,3} * B_{3,2}$$

а) Разгледайте резултата и проследете следващите действия с програмата Excel.

Умножението на матриците А и В е извършено по следния начин:

1. Решаваме да разположим резултатната матрица С в региона `B10:C11`.
2. В клетка `B10` написваме формулата `=ММУЛТ(В1:D2,В5:С7)` и натискаме клавиша `<Enter>`. (`B1:D2` е регионът на матрицата А, а `B5:C7` е регионът на матрицата В)
3. Избираме (осветяваме) с мишката или клавишите региона `B10:C11` (в който ще се разполага матрицата С) и натискаме `<F2>`, след което комбинацията от три клавиша (едновременно!) `<Ctrl>-<Shift>-<Enter>`.

б) Умножете обратно матриците А и В, $D_{3,3} = B_{3,2} * A_{2,3}$. Разположете D в региона `G10:I12` като за целта:

1. В клетка `G10` се изписва формулата `=ММУЛТ(В5:С7,В1:D2)` и натискаме клавиша `<Enter>`.

2. Избираме региона $G10:I12$ (в който ще се разполага матрицата C) и натискаме $\langle F2 \rangle$, след което комбинацията от три клавиша (едновременно!) $\langle \text{Ctrl} \rangle - \langle \text{Shift} \rangle - \langle \text{Enter} \rangle$.

3. Забелете, че размерностите на C и D са различни!

Отговор

$D =$

9	-8	15
-17	31	-21
22	-21	36

Допълнение: Регионите на матриците могат да се избират с мишката. Например действие 1 от точка b) може да се извърши по следния начин: В клетка $G10$ се изписва формулата $=\text{MMULT}()$. След това с мишката избираме региона на матрицата B ($B5:C7$), написваме запетайка или символа който ни подсказва програмата, понеже е възможно разделителният символ да е настроен по различен начин, напр. $;$ и след това избираме региона на матрицата A с мишката, и натискаме $\langle \text{Enter} \rangle$. Забележете, че не е необходимо да напишем затварящата скоба (когато липсва една затваряща скоба, програмата Excel затваря тази скоба автоматично)!

Задача C7.2. Отворете файла `seminar07_matrices.xls`. Разгледайте таблицата (sheet) "Invert" в която са умножени две матрици, A и B .

а) Ще намерим обратната матрица на C , C^{-1} , която ще разположим в региона $B15:C16$. За целта извършете следните действия с програмата Excel:

1. В клетка $B15$ написваме формулата $=\text{MINVERSE}(B10:C11)$ и натискаме клавиша $\langle \text{Enter} \rangle$. ($B10:C11$ е регионът на матрицата C)

3. Избираме региона $B15:C16$ (в който ще се разполага матрицата C^{-1}) и натискаме $\langle F2 \rangle$, след което комбинацията от три клавиша (едновременно!)

⟨Ctrl⟩-⟨Shift⟩-⟨Enter⟩. Умножете матрицата C по обратна матрица C^{-1} . Разположете резултата в региона в25:c26. Трябва да получите единичната матрица.

Отговор:

$$C^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.077586207 & -0.00862069 \\ \hline -0.001231527 & 0.016009852 \\ \hline \end{array}$$

б) Намерете обратната матрица на D , D^{-1} , която разположете в региона в19:d21. Забелете изключително големите стойности на нейните елементи! Подобни резултати ни подсказват, че детерминантата на D е близка или равна на нула.

с) Намерете в клетки g16, g18 и g20 детерминантите на матриците c , c^{-1} и d с командите

$$= \text{MDETERM}(B10:C11), = \text{MDETERM}(B15:C16) \text{ и } = \text{MDETERM}(G10:I12).$$

След това изчислете $|c| * |c^{-1}|$: трябва да получите $|c| * |c^{-1}| = 1$.

Отговор: 812, 0.001231527 и 4.69069×10^{-13} .

Допълнение: От една правоъгълна матрица A се получават две квадратни матрици $A^T * A$ и $A * A^T$, от които тази с по-голям брой редове и стълбове винаги има детерминанта нула. Ако рангът на правоъгълната матрица е равен на $\min(N, M)$, където N и M са съответно броят на редовете и колоните, то квадратната матрица с по-малките размерности може да има детерминанта, различна от нула, т.е. може да има обратна матрица, докато матрицата с по-големите размерности винаги има детерминанта, равна на нула. За ранг на произведение от матрици вижте задача 14.2. от семинар 14.

d) В същият файл в таблицата "General Inverse" намерете следните матриците като използвате следните команди и разполагате резултатите в следните региони.

Матрица	Команда	Регион
A^T	=TRANSPOSE(B1:C3)	B5:D6
$A^T * A$	=MMULT(B5:D6,B1:C3)	B11:C12
$(A^T * A)^{-1}$	=MINVERSE(B11:C12)	B14:C15