Семинар 6

Класификация с линейна обучаваща машина

Задача 6.1. Припомнете си уравнението на права в равнината. Колко коефициента има в него?

Решение: Уравнението на права в двумерното пространство е:

$$ax + by + c = 0$$

В него има три коефициента: a, b и c.

Задача 6.2. Припомнете си уравнението на равнина в тримерното пространство. Колко коефициента има в него?

Решение: Уравнението на равнина е:

$$ax + by + cz + d = 0$$

В него има четири коефициента: a, b, c и d.

Задача 6.3. Нека образите да са двумерни, а след прибавяне на трета координата към тях с постоянна стойност, $x_3 = 1.0$, те стават тримерни. Използвайте уравнение (6.6) от лекция 6 и запишете уравнението на права в правоъгълната координатна система x_1Ox_2.

$$\vec{X} \cdot \vec{W} = 0 \qquad (6.6)$$

Решение: Уравнението на равнина е:

Скаларното произведение в лявата част на (6.6) се записва

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$$

Като положим $x_3 = 1.0$, получаваме

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3 = 0$$

Ако сравним с уравнението в задача 6.1 то виждаме, че това е уравнение на права в равнината, с $a = w_1$, $b = w_2$ и $c = w_3$, а вместо координатите x и y имаме двете координати x_1 и x_2. Тази права е сечение на разделящата повърхност с равнината, дефинирана с уравнението $x_3 = 1.0$; последната равнина е успоредна на осите Ox_1 и Ox_2.

Задача 6.4. Изчислете скаларното произведение между векторите (образите):

$$X_1 = (1.1, -1.0, 2.2) \text{ и } X_2 = (-2.0, -1.2, 2.0).$$

Решение:

$$X_1X_2 = 1.1x(-2.0) + (-1.0)x(-1.2) + 2.2x2.0 = -2.2 + 1.2 + 4.4 = 3.4$$

Задача 6.5. Изчислете големината на първия вектор от задача 6.4.

Решение: Големината на даден вектор е корен квадратен от вектора, умножен скаларно по себе си:

$X_1X_1 = 1.1x1.1 + (-1.0)x(-1.0) + 2.2x2.2 = 1.21 + 1.00 + 4.84 = 7.05$

Корен квадратен от 7.07 е 2.66, т.е. големината на първия вектор е 2.66.

Задача 6.6. Умножете четиримерния образ X = (1.2, -1.1, 0.1, 0.0) по -2.

Решение: Вектор се умножава по число, като умножим всяка от неговите координати по числото:

$$(-2)\ X = (-2)\ (1.2, -1.1, 0.1, 0.0) = (-2.4, 2.2, 0.2, 0.0)$$

Задача 6.7. Уравнението на равнина се извежда със скаларно произведение. Нека с **D** означим разстоянието[1] на равнината от началната точка на координатната система (0, 0, 0), с **n** - единичен нормален вектор[2] към равнината, а с **r** - вектор от началото към произволна точка на равнината. И

[1] Разстояние от точка до равнина е дължината на отсечката, която лежи на права, перпендикулярна към равнината и е между точката и точката на пресичане на правата с равнината.

[2] Разбира се свободен вектор – т.е. който има определени посока и големина, но не и точка на приложение.

точката и самият вектор **r** се дават с координати (x, y, z). Тогава е изпълнено:

$$\mathbf{nr} = D.$$

a) Напишете скаларното произведение **nr**.

Решение:

$$\mathbf{nr} = n_x x + n_y y + n_y y$$

b) Преобразувайте **nr** = D в уравнение на равнина – това, което сте записали в задача 6.2.

Решение:

$$\mathbf{nr} = n_x x + n_y y + n_y y = D$$

$$n_x x + n_y y + n_y y - D = 0$$

това е уравнение на равнина в тримерното пространство, с a = n_1, b = n_2, c = n_3 и d = -D.

c) Уравнението на права също се дава с **nr = D**, но **r** има само две координати - **r = (x, y)**. **Като** напишете скаларното произведение **nr** преобразувайте **nr** = **D** в уравнение на права.

Решение:

$$\mathbf{nr} = n_x x + n_y y = D$$

$$n_x x + n_y y - D = 0$$

това е уравнение на права в двумерното пространство, с a = n_1, b = n_2, и d = -D.

Практически задачи

Задача C1. Отворете файла **seminar06_llm**.xls. Разгледайте таблицата (sheet) "**Spectra**", в която са дадени девет двумерни образа от два класа. В таблицата "**LLM**" двумерните образи са превърнати в тримерни, разбъркани са, и е извършено обучение с начални стойности на координатите на тегловния вектор **W**, равни на 1.0 (регионът **D17:F17**). В таблицата "**WORK**" извършете обучение, като използвате начален вектор **W = (1.0, 1.0, 1.3)**.

Задача C2. В таблицата "**DataPlot**" е начертана разделящата права, която съответства на разделящата равнина, определена от вектора $\mathbf{W_4}$, (чийто координати са в региона **C16:E16**). Това е тегловният вектор, получен при обучението от таблицата "**LLM**". Тази права се получава по следния начин: Уравнението на обучаващата равнина е следното:

$$\sum_{k=1}^{3} x_K \cdot w_K = 0$$

където x_k са координатите в тримерното пространство (вместо x, y и z). Тъй като третата координата на всички образи бе направена равна на единица, т.е. $x_3 = 1$, то това уравнение е:

$$-x_2 \cdot w_2 = x_1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_3$$

или записано спрямо x_2:

$$x_2 = \frac{-(x_1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_3)}{w_2} \qquad (6\text{-I})$$

Което уравнение се изполва за изчисляване на стойностите в клетки **B21:B31**.

Копирайте координатите на получения от задача C1 тегловен вектор в клетки **C17:E17**, и в клетка **C21** напишете формулата **=-(A21*$C$17 + $E$17)/$D$17**, която ще приложи уравнение (6-I) за изчисления от вас в предната задача тегловен вектор. Разпънете тази формула от клетка **C21** до **C31** и добавете нова права във фигурата. Добавянето на нова права се извършва с менюто

Chart/Add Data. Ако имате проблеми изберете новите точки и горе в полето за формула напишете:

```
=SERIES(,DataPlotNew!$A$21:$A$31,DataPlotNew!$C$21:$C$31,3)
```

С десния клавиш на мишката извикайте локално меню и направете точките на права.

Задача С3. В таблицата (sheet) "**Spectra**" намерете центроидите на двата класа. Повторете изчисленията на задача С4 от семинар 4 в същата таблица на файла **seminar06_llm.xls** и нарисувайте разделящата права, която се получава по метода на центроидите. Добавете към графиката и разделящата права, която получихте в задача С2 по метода на линейната обучаваща машина. Сравнете двете прави, които в общия случай не съвпадат, но линейно разделят образи, които са линейно разделими.