Семинар 1

Случайна Величина

Задача 1.1. Като използвате дефиницията за математическо очакване на дискретна случайна величина докажете свойство 1:

$$\mathbf{M(C) = C}$$

Упътване: фактически константата ***C*** е дискретна случайна величина, която заема само една стойност $\mathbf{X_1 = C}$ с вероятност $\mathbf{p_1 = 1}$.

Решение: За дискретна случайна величина математическото очакване се изчислява по следния начин:

$$M(C) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k . X_k = p_1 . X_1 = 1 \cdot C = C$$

Задача 1.2. Като използвате дистрибутивното свойство на умножението и събирането [т.е. a(b+c) = ab + ac] и дефиницията за математическо очакване на дискретна случайна величина докажете свойства 2 и 3 за дискретна случайна величина.

Решение:

Свойство 2: За дискретната случайна величина **CX** математическото очакване се изчислява по следния начин:

$$M(CX) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k . CX_k = C \sum_{k=1}^{\infty} p_k . X_k = C \cdot M(X)$$

Свойство 3: дискретната случайна величина **X+У** математическото очакване се изчислява по следния начин:

$$M(X+Y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k .(X_k + Y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k . X_k + \sum_{k=1}^{\infty} p_k Y_k = \sum_{l=1}^{\infty} p_l . X_l + \sum_{m=1}^{\infty} p_m . Y_m = M(X) + M(Y)$$

Тук използвахме факта, че вероятностния ред на сумата, $\mathbf{p_k}$, е в един случай този на X - $\mathbf{p_l}$, а в друг – този на У - $\mathbf{p_m}$,

Задача 1.3. Като използвате линейността на определения интеграл и дефиницията за математическо очакване на непрекъсната случайна величина докажете свойства 2 и 3 за непрекъсната случайна величина. От статистиката е известно, че **p(Cx) = p(x)** и **p(x+y)** е **p(x)** за случайната величина **X** и **p(y)** за случайна величина **У**.

Свойство 2: За непрекъсната случайна величина **CX** математическото очакване се изчислява по следния начин:

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} p(Cx)d(Cx) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)Cdx = C\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = CM(X)$$

Тук използвахме факта, че **p(Cx) = p(x)**.

Свойство 3: За непрекъсната случайна величина **X+У** математическото очакване се изчислява по следния начин

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x+y)d(x+y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x+y)dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(x+y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(y)dy = M(X)+M(Y)$$

Тук използвахме факта, че **p(x+y)** е **p(x)** за случайната величина **X** и **p(y)** за случайна величина **У**.

Задача 1.4. Като използвате дефинициите за математическо очакване и дисперсия на случайна величина докажете свойства 5 и 6.

Свойство 5: По дефиниция дисперсията на случайна величина се дава с **D(X) = M[X-M(X)]^2** или като заместим **X** с ***C*** получаваме (като използваме и свойства 1 и 2)

$$\mathbf{D(C) = M[C-M(C)]^2 = M[C-C]^2 = M[0]^2 = M[0] = 0}$$

Свойство 6: Използвайки същата дефиниция за дисперсията на случайна величина се получава (като използваме и свойства 1 и 2):

$$\mathbf{D(CX) = M[CX-M(CX)]^2 = M[CX-CM(X)]^2 = M\{C^2[X-M(X)]^2\} =}$$
$$\mathbf{= C^2M[(X-M(X)]^2 = C^2D[X]}$$

Задача 1.5. Докажете формулите в (1.4) с помощта на свойства 1 - 7!

Решение за математическото очакване: използваме свойства 1 и 2 като първо изнасяме реципрочната стойност на корена от дисперсията пред математическото очакване, защото това просто е едно число. След това не забравяме също, че **M(X)** също е число, т.е. **M[M(X)]= M(X)**.

$$M(Y) = M[\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} M[X - M(X)] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} \{M(X) - M[M(X)]\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(X)}}[M(X) - M(X)] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}}[0] = 0$$

Решение за дисперсията: използваме свойства 5 и 6 като първо изнасяме **квадрат** от реципрочната стойност на корена от дисперсията пред дисперсията, защото това просто е едно число. След това не забравяме също, че **M(X)** също е число, т.е. **D[M(X)]= 0**.

$$D(Y) = D[\frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \frac{1}{D(X)} D[X - M(X)] = \frac{1}{D(X)} \{D(X) + D[M(X)]\} =$$

$$= \frac{1}{D(X)}[D(X) + 0] = \frac{D(X)}{D(X)} = 1$$

Задача 1.6 Вероятността случайната величина да заема стойности в интервала (-∞, +∞) е единица. Докажете това за нормалното разпределение - съответният интеграл няма решение, но двойният интеграл по-долу може да се реши със замяна на променливите **x** и **y** с радиални координати **r** и **q**.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = (\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy)^2$$

Решение: Вкарваме μ, корен от 2 и σ^2 в диференциала **dx**, а след това понеже подинтегралната функция е симетрична функция, разделяме този интеграл на две области, които обединяваме (понее са равни). При което получаваме значително по-просто изглеждащ интеграл.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})^2} d(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Този интеграл е нерешим в явен вид, но е равен на корен квадратен от следния двоен интеграл:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = (\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy)^2$$

Но двойният интеграл може да се реши чрез смяна на променливите **x = rcos(θ)** и **y = rsin(θ)**, при което се получава

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho^2 \cdot \theta\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty} \cdot \theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Т.е първоначалният интеграл е равен на:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = 1$$

Задача 1.7. Намерете математическото очакване и дисперсията на равномерното разпределение.

Решение: Разбиваме цялата област на интегриране на три интервала, в които плътността на вероятността на нормалното разпределение има различни значения - нула извън интервала **(a, b)** и константа в този интервал.

За математическото очакване се получава:

$$M(X)=\int_{-\propto}^{\propto} xp(x)dx=\int_{-\propto}^{a} x0\,dx+\int_{a}^{b} xCdx+\int_{b}^{\propto} x0dx=\int_{a}^{b} xCdx$$

Взимаме предвид, че в интервала **(a, b)** плътността е ***C* = (b - a)/2** (вижте този материал) и получаваме.

$$M(X)=\int_{a}^{b} xCdx=C\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=C(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2})=\frac{1}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2}=\frac{(b+a)}{2}$$

За дисперсията се получава:

$$D(X)=\int_{-\propto}^{\propto}(x-M(x))^2\,p(x)dx=$$

$$\int_{-\propto}^{a}(x-\mu))^2 0dx+\int_{a}^{b}(x-\mu)^2 Cdx+\int_{b}^{\propto}(x-\mu)^2 0dx$$

$$=\int_{a}^{b}(x-\mu)^2 Cdx=C\int_{a}^{b}(x-\mu)^2 d(x-\mu)=C\left.\frac{(x-\mu)^3}{3}\right|_a^b=$$

$$\frac{C}{3}[(b-\mu)^3-(a-\mu)^3]=\frac{C}{3}[(b-\frac{a+b}{2})^3-(a-\frac{a+b}{2})^3]$$

$$\frac{C}{3}[(\frac{2b}{2}-\frac{a+b}{2})^3-(\frac{2a}{2}-\frac{a+b}{2})^3]=\frac{C}{3\cdot 2^3}[(b-a)^3-(a-b)^3]=$$

$$\frac{C}{3\cdot 2^3}[2(b-a)^3]=\frac{1}{b-a}\frac{(b-a)^3}{3\cdot 2^2}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Задача 1.8. Докажете, че математическото очакване и дисперсията на нормалното разпределение са съответно μ и σ^2.

Решение: И при двата интеграла сменяме променливата **x** с **y = (x - μ)/σ**, при което се получава **x = (σy + μ)** и **dx = σdy**, както и интегралните граници остават същите ∞ **= (**∞ **- μ)/σ** и -∞ **= (-**∞ **- μ)/σ**.

За математическото очакване се получава:

$$M(X)=\int_{-\propto}^{\propto}xp(x)dx=\int_{-\propto}^{\propto}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}(\sigma y+\mu)e^{\frac{-y^2}{2}}d\sigma y=$$

$$\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}ye^{\frac{-y^2}{2}}d(\sigma y)+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}\mu e^{\frac{-y^2}{2}}d\sigma y=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}ye^{\frac{-y^2}{2}}dy+\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}\mu e^{\frac{-y^2}{2}}dy$$

Първият интеграл е интеграл от нечетна функция в симетрични граници и затова е равен на нула, а последният интеграл беше решен в Задача 1.6 (по-горе) и е равен на корен от пи.

$$M(X)=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}e^{\frac{-y^2}{2}}dy=\frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}e^{-(\frac{y}{\sqrt{2}})^2}d\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}e^{-u^2}du=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\mu$$

Вместо да решаваме последния интеграл може да го запишем в позната форма

$$M(X)=\mu\int_{-\propto}^{\propto}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy=\mu$$

откъдето се вижда, че това е интеграл от плътността на вероятността на стандартното разпределение (т.е. нормално разпределение с μ **= 1** и σ^2 **= 0**) и той е равен на единица.

За дисперсията се получава:

$$D(X)=\int_{-\propto}^{\propto}(x-\mu)^2p(x)dx=\int_{-\propto}^{\propto}(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}(\sigma y)^2e^{\frac{-y^2}{2}}d\sigma y=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\propto}^{\propto}y^2e^{\frac{-y^2}{2}}dy$$

Този интеграл може да го интегрираме по части, за целта вкарваме експоненциалната функция под диференциала

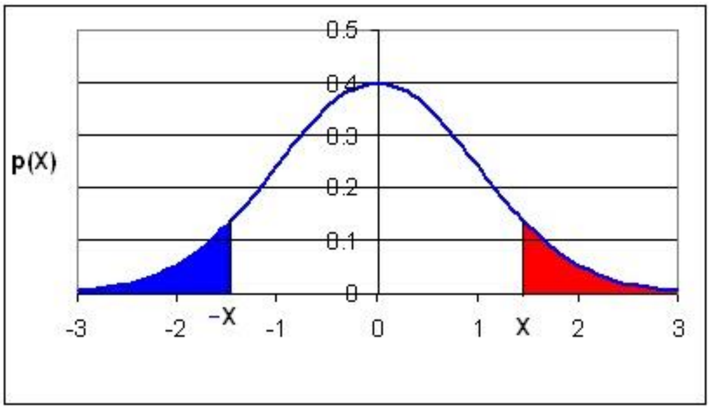
$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{\frac{-y^2}{2}}dy=-\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{y}{\sqrt{2}})^2}d(-\frac{y}{2})^2=$$

$$-\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d(e^{-(\frac{y}{\sqrt{2}})^2})=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}y(-e^{-(\frac{y}{\sqrt{2}})^2})\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{y}{\sqrt{2}})^2}dy=\sigma^2$$

Първият интеграл е нула, а последният интеграл е интеграл от плътността на вероятността на стандартното разпределение (т.е. нормално разпределение с μ **= 1** и σ^2 **= 0**) и е равен на единица.

Задача 1.9. За стандартното разпределение докажете, че **F'(X) = 2F(X) - 1**, където **F(X)** е интеграл в граници от **-**∞ до **X**, а **F'(X)** - интеграл в граници от **-X** до **+X**. Използвате симетричността на Гаусовата крива.

Решение:



По-горе е дадена плътността на вероятността на стандартното разпределение. Интегралът **F(X)**е равен на площта под кривата от **-**∞ до червено-оцветената площ, а площта под цялата крива е единица. Стандартното разпределение е симетрично относно нулата и затова червената площ е равна на синята площ на графиката. Червената площ е **1 - F(X)**, т.е. и синята площ е същата. Тогава **F'(X)** ще е площта под кривата между двете оцветени площи и тя ще е равна на **F(X) - (1 - F(X))** или **2F(X) - 1**.

Задача 1.10. За стандартното разпределение намерете от приложение 1 **F'(2.87)** и **F(2.87)**, където **F(2.87)** е интеграл в граници от **-∞** до **2.87**, а **F'(2.87)** - интеграл в граници от **-2.87** до **+2.87**. Използвайте, че **F'(X) = 2F(X) - 1**.

Решение: От приложение 1 намираме, че **F(2.87) = 0.99795**. Следователно **F'(2.87) = 2xF(2.87) - 1 = 2x0.99795 - 1 = 0.9959.**

Задача 1.11. За нормално разпределение с μ **= 3.44** и σ **= 0.39** намерете от приложение 1 **F(4.56)**, където **F(4.56)** е интеграл в граници от **-∞** до **4.56**.

Решение: Подобно на задача 3 сменяме променливата **x** с **y = (x -** μ**)/**σ, при което се получава **x = (**σ**y +** μ**)** и **dx =** σ**dy**, както и интегралните граници стават **2.87 = (4.56 -** μ**)/**σ **= (4.56 - 3.44)/0.39** и -∞**= (-∞ -** μ**)/**σ.

$$F(4.56)=\int_{-\infty}^{4.56}p(x)dx=\int_{-\infty}^{4.56}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{2.87}e^{\frac{-y^2}{2}}d\sigma y=$$

$$\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{2.87}e^{\frac{-y^2}{2}}d(\sigma y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{2.87}e^{\frac{-y^2}{2}}dy=0.99795$$

Последният интеграл е интеграл от плътността на стандартното разпределение и него го взехме от приложение 1.

Видяхме, че с помощта на таблицата на функцията на разпределение на стандартното разпределение, дадена в приложение 1, можем да намерим функцията на разпределение на нормално разпределение с произволни математическо очакване и дисперсия: за целта нормираме интегралната граница по формулата **y = (x -** μ**)/**σ.

Задача 1.12. За нормално разпределение с **m = 3.44** и **s = 0.39** намерете от приложение 1 интеграл в граници от **2.32** до **4.56**. Използвайте, че **F'(X) = 2F(X) - 1**.

Решение: Сменяме интегралните граници по формулата **y = (x - μ)/σ**, при което се получават следните нови интегрални граници (т.е. тези за стандартното разпределение) **2.87 = (4.56 - μ)/σ = (4.56 - 3.44)/0.39** и **-2.87 = (2.32 - 3.44)/0.39**. Това е интеграл от плътността на стандартното разпределение в симетрични граници и може да бъде намерен по формулата **F'(2.87) = 2xF(2.87) - 1 = 2x0.99795 - 1 = 0.9959**.(сравнете със задача 1.10)

Задача 1.13*. В теория на вероятностите две събиния са независими, ако вероятността да се случат и двете е равна на произведение на вероятностите да се случат събитията поотделно: P(X и Y) = P(X)P(Y). В статистиката плътността на разпределение на произведението на две независими събития се дава с p(xy) = p(x)p(y).Като използвате линейността на определения интеграл и дефиницията за математическо очакване на непрекъсната случайна величина докажете свойство 4 за непрекъсната случайна величина.

Решение:

Свойство 4: За непрекъсната случайна величина **XY** математическото очакване се изчислява по следния начин:

$$M(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)p(xy)d(xy)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)yp(y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yp(y)dy=M(X)M(Y)$$