Лекция 7

Матрици, детерминанти и система от линейни уравнения (преговор)

5.1. Матрици. Матрицата е правоъгълна таблица от числа. Тя представлява обобщение на понятието число и намира, подобно на векторите, изключително голямо приложение в науката. Обикновено матриците се изписват с главни букви, A, B, C и т.н., а техните елементи се изписват с малки букви и се номерират с долни индекси, първият от които показва номера на реда, а вторият – номера на колоната.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix}$$

Понякога е удобно размерностите на матриците да се изобразят като два долни индекса, които показват броя на редовете и колоните в матрицата. В този случай матрицата ще може да се отличава от даден неин елемент, например $c_{2,3}$, понеже е изписана с главна буква. А също така размерностите на матрицата се означават с големи букви (например $A_{M,N}$), докато индексите на елементите – с малки; трите матрици по-горе могат да се запишат като $A_{2,2}$, $B_{3,3}$ и $C_{2,3}$.

Матриците се събират и изваждат като се събират и изваждат съответните им елементи: за целта двете матрици трябва да са с еднакъв брой на редовете и еднакъв брой на колоните. При умножение на матрица с число, подобно на умножението на вектор с число, всички елементи на матрицата се умножават с това число. Очевидно, получената матрица има същите размерности. Нека имаме случая, когато елементите на матрицата са стойностите на определена (физико)химична величина. Тогава смяната на мерната единица ще доведе до умножението на елементите на матрица по числото, с което са пропорционали старата и новата мерна единица.

Две матрици могат да се умножат само ако първата матрица има брой на колоните равен на броя на редовете на втората. Това лесно може да се съобрази (вместо да се запомня) от следния запис

$$C_{K,L} = A_{K,M}\ B_{M,L}\ ,$$

където двете размерности в средата, трябва да са равни (в случая са равни на M) и съответно те "изчезват", като остават само тези в края.

Съответната формула за елементите на резултантната матрицата е

$$c_{k,l} = \sum_{m=1}^{M} a_{k,m} \cdot b_{m,l} \tag{7.1}$$

Образно представено това означава, че елемент в матрицата C, който стои на k-ти ред и l-та колона се получава чрез скаларното умножение на k-ти ред от матрицата A и l-та колона от матрицата B.

Операцията делене на матрици, A/B, не може да се формулира еднозначно, понеже е възможно да съществуват[1] много на брой матрици C, които умножени с B дават A. Но ако B е квадратна матрица и има обратна матрица B^{-1}, то $A*B^{-1}$ и $B^{-1}*A$ са своего рода деление на матрици.

За всяка квадратна матрица A може да се изчисли нейната детерминанта, която се отбелязва с |A|. Ако |A| ≠ 0, то матрицата A има обратна матрица, която се отбелязва с A^{-1}. Произведенията $A*A^{-1}$ и $A^{-1}*A$ дават единичната

[1] Например ако матриците A и B имат един и същ брой редове, K, то при L > K съществуват безкраен брой матрици C, за които $A_{K,L} = B_{K,K}*C_{K,L}$. При L = K може да съществува и то само една обратна матрица $C_{L,L}$, (ако rang[A] = L) а при L < K не съществува такава матрица C.

матрица, I, която има елементи, равни на единица на диагонала, а останалите са нули.

$$A*A^{-1} = I \text{ и } A^{-1}*A = I,$$

където

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

5.2. Детерминанти. На всяка правоъгълна матрица може да се съпостави едно число, наречено нейна детерминанта. Общият запис на детерминантата на правоъгълна матрица с размерност N е следният:

$$|A| = \sum_{p=1}^{N!} (-1)^{P(k_1,k_2,...k_N)} a_{1,k_1} a_{2,k_2} ... a_{N,k_N}$$

където (k_1, k_2, … k_N) е пермутацията на числата 1, 2, ... N, P(k_1, k_2, … k_N) е четността на пермутацията на числата k_1, k_2, … k_N: (-1) на степен четна пермутация е плюс единица, а на нечетна – минус единица. Приема се, че изходната пермутация (1, 2, ... N) е четна, а всяка една пермутация, която се получава от четна при смяна на позицията на две числа, е нечетна, а от нечетна при една смяна на две числа се получава четна пермутация.

Този запис, който е развитие по редове, може да се запише и като развитие по колони:

$$|A| = \sum_{p=1}^{N!} (-1)^{P(k_1,k_2,...k_N)} a_{k_1,1} a_{k_2,2} ... a_{k_N,N}$$

От двете формули могат да се получат редица свойства на детерминантите – вижте задачите към тази лекция, както и тяхното решение. Част от тези свойства са: (1) ако разменим елементите на два реда в матрицата, то детерминантата и сменя своя знак; (2) ако два реда в матрицата са еднакви, то детерминантата и е равна на нула; (3) ако един ред го представим като сума от два произволни реда, то детерминатата е равна на сума от две детерминанти на матрици, различаващи се с този ред, като в първата матрица стои единият ред, а в другата – другият; (4) ако умножим един ред на матрицата по число, то детерминантата се умножава по това число; (5) ако в матрицата прибавим към някой ред друг ред, умножен по число, то детерминантата и не се променя; (6) детерминтата на единична матрица е равна на единица; (7) ако детерминантата на матрицата **A** е различна от нула, то е изпълнено $\det(A) = 1/\det(A^{-1})$. Свойства от (1) до (5) се отнасят и за колоните на матрицата.

Ранг на една матрица е размерността на най-голямата правоъгълна матрица, съставена от нейните елементи, която има детерминанта, различна от нула. Тази правоъгълна матрица се получава като се задраскват цели редове и колони в изходната матрица. Изходната матрица може да бъде правоъгълна: тогава е ясно, че рангът и не може да е по-голям от най-малката и размерност. Очевидно е, че транспонирата матрица ще има същия ранг – припомнете си, че транспонирана матрица е матрица, в която редовете са разменени с колоните (или което е същото – колоните с редовете).

7.3. Решаване на системи от линейни уравнения.

Много често в науката се търсят стойностите на няколко величини, които задоволяват едновременно няколко уравнения. Досега сте учили по Линейна алгебра как се решава тази система, когато броят на уравненията отговаря на броя на величините, чиято стойност се търси. Обаче, по-често в науката броят на уравненията е по-голям от броя на неизвестните величини (параметри). В този случай се касае за намиране на стойностите на няколко величини, които най-добре удовлетворяват уравненията. Ако уравненията са линейни то задачата се записва по следния начин:

$$\left| \begin{array}{l} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + ... + a_{1,N} \cdot x_N = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + ... + a_{2,N} \cdot x_N = b_2 \\ ... \\ a_{N,M} \cdot x_1 + a_{N,2} \cdot x_2 + ... + a_{M,N} \cdot x_N = b_M \end{array} \right. \qquad (7.2)$$

Това на практика е едно матрично уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} & ... & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N,1} & a_{N,2} & ... & a_{M,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_M \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

Системата има само едно решение, ако рангът на матрицата A е равен на ранга на матрицата A|B (това е матрицата, която се получава като към A се добави (долепи) единствената колона на B) и този ранг е равен на N, което е броят на неизвестните. Очевидно е, че за да има едно точно решение то трябва N = M (но това не е достатъчно условие!).

Задачи

Задача 7.1. Съберете и извадете двете матрици A и B на ръка.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

Задача 7.2. Умножете матрицата B от предната задача на числото -2 на ръка.

Задача 7.3. Умножете на ръка A по B, както и B по A. Изпълнява ли се комутативното свойство?