

ВАЛЕНТИН ПОПОВ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНИКА

УЧЕБНО ПОМАГАЛО

СОФИЯ 2009

Учебното помагало е съставено по програмата на дисциплината "Класическа механика" за специалности физика и инженерна физика (степен на обучение бакалавър) на Физическия факултет на Софийския университет. За курса е предвиден хорариум от 60 часа лекции и 30 часа семинарни занятия в рамките на един семестър. Главите по механика на непрекъснатите среди се четат на специалност физика в рамките на разширения курс по същата дисциплина.

Съдържание

I. ОСНОВИ НА КЛАСИЧЕСКАТА МЕХАНИКА	6
1. Основни понятия на механиката на материални точки	6
2. Основи на кинематиката на материална точка	7
3. Динамика на материална точка. Принцип на Галилей	8
4. Динамика на система от материални точки. Уравнения на движението. Закон за запазване на импулса. Център на масата.....	10
5. Закони за запазване на момента на импулса и на енергията на система от материални точки. Интеграл на движението	12
6. Трансформация на скоростта и ускорението при преход към неинерциална отправна система. Уравнение на движението.....	14
II. УРАВНЕНИЯ НА ЛАГРАНЖ	17
7. Динамика на несвободни системи. Видове връзки. Уравнения на движението	17
8. Уравнения на Лагранж от I род	18
9. Принцип на Даламбер. Кинетична енергия в обобщени координати	19
10. Обобщени сили. Уравнения на Лагранж от втори род	21
11. Принцип на Хамилтон и уравненията на Лагранж от втори род.....	25
12. Интеграл на движението. Закон за запазване на обобщения импулс.....	26
13. Закон за запазване на обобщената енергия	28
14. Теорема на Нютон.....	29
III. ИНТЕГРИРАНЕ НА УРАВНЕНИЯТА НА ДВИЖЕНИЕТО	32
15. Едномерно движение. Интегриране на уравнението на движение. Анализ на движението. Период на финитното движение	32
16. Движение на материална точка в централно поле. Закон за движението и уравнение на траекторията.....	33
17. Характер на движението в централно поле. Условие за падане върху центъра на полето.	35
18. Кеплерова задача. Уравнение на траекторията. Анализ на решението.....	37
19. Кеплерова задача. Закон за движението при движение по елипса. Вектор на Рунге-Ленц	38
IV. УДАРИ НА ЧАСТИЦИ	41
20. Задача за двете тела.....	41
21. Разпад на частица на две частици.....	42

22. Удари на частици.....	44
23. Разсейване на частици.....	46
24. Формула на Ръдърфорд.....	48
V. ТРЕПТЕНИЯ	51
25. Собствени трептения на система с една степен на свобода	51
26. Принудени трептения на система с една степен на свобода	52
27. Собствени трептения на система с s степени на свобода: собствени честоти.....	54
28. Собствени трептения на система с s степени на свобода: собствени вектори. Нормални трептения.....	56
VI. ДВИЖЕНИЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО.....	58
29. Кинематика на твърдо тяло.....	58
30. Кинетична енергия на твърдо тяло	59
31. Момент на импулса на твърдо тяло. Уравнения на движението на твърдо тяло.....	61
32. Ъгли на Ойлер. Лагранжиан и уравнения на Лагранж за ъглите на Ойлер	62
33. Движение на свободно симетрично тяло. Регулярна прецесия.....	64
34. Движение на тяло със закрепен център на масите. Уравнения на Ойлер.....	66
VII. КАНОНИЧНИ УРАВНЕНИЯ	68
35. Канонични променливи. Уравнения на Хамилтон	68
36. Скобки на Поасон. Необходимо и достатъчно условие за пръв интеграл. Свойства на скобите на Поасон	70
37. Тъждество на Якоби. Теорема на Поасон	72
38. Принципът на Хамилтон и уравненията на Хамилтон	73
39. Действието като функция на координатите и времето	74
40. Принцип на Мопертюи	75
41. Канонични трансформации. Условие за каноничност.....	77
42. Трансформации на Лежандър. Производящи функции. Частни случаи на канонични трансформации.....	78
43. Инвариантност на скобите на Поасон при канонични трансформации.....	81
44. Теорема на Лиувил	82
45. Уравнение на Хамилтон-Якоби. Теорема на Якоби	84
46. Разделяне на променливите в уравнението на Хамилтон-Якоби.....	86
47. Движението на частица като вълнов процес.....	88
VIII. МЕХАНИКА НА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ СРЕДИ	90
48. Основни понятия на механиката на непрекъснатите среди.....	90

49. Деформация на малка частица. Тензор на деформациите	92
50. Геометричен смисъл на тензора на деформациите	95
51. Уравнение за непрекъснатост	96
52. Уравнение за изменение на импулса на малка частица	98
53. Уравнение за изменение на момента на импулса на малка частица	100
54. Уравнение за изменение на механичната енергия на малка частица	101
55. Първи закон на термодинамиката	102
56. Уравнение за изменение на пълната енергия на малка частица	103
57. Втори закон на термодинамиката. Основни уравнения на механиката на непрекъснатите среди	105
IX. МЕХАНИКА НА ИДЕАЛЕН И ВИСКОЗЕН ФЛУИДИ	107
58. Уравнения на движението на идеален флуид. Уравнение на Ойлер. Потоци на импулса и пълната енергия	107
59. Статика на идеален флуид	108
60. Стационарно течение на идеален флуид. Интеграл на Бернули	110
61. Теорема на Томсън за запазване на циркулацията на скоростта. Потенциално течение. Интеграл на Коши	111
62. Уравнения на движението на вискозен флуид. Уравнение на Навие-Стокс	113
X. МЕХАНИКА НА ИДЕАЛНО ЕЛАСТИЧНО ТЯЛО	116
63. Основни уравнения на идеално еластично тяло. Закон на Хук. Тензор на еластичността	116
64. Деформация на изотропно тяло. Модули на Ламе. Уравнение на Ламе	118
65. Уравнение за равновесие на изотропни тела. Хомогенни деформации	119
66. Еластични вълни в изотропни среди	121
Литература	123

I. ОСНОВИ НА КЛАСИЧЕСКАТА МЕХАНИКА

1. Основни понятия на механиката на материални точки

Механиката е наука за преместването на материалните обекти в пространството и времето. Под теоретична механика ще разбираме класическата механика на макроскопични обекти, движещи се със скорости, малки в сравнение със скоростта на светлината.

Макроскопичните обекти ще изобразяваме абстрактно като материални точки, твърди тела и непрекъснати среди.

Най-простият обект на механиката е материалната точка. Всички основни закони на механиката могат да се формулират като закони за движение на материална точка. Като обобщение на тези закони се получават законите за движение на твърди тела и непрекъснати среди.

Движението на материалната точка е пространственото и преместване с течение на времето. Пространството се счита тримерно евклидово. За да разясним това, припомним, че положението на материалната точка M се определя спрямо т.нар. отправна система от радиус-векторът и \mathbf{r} , който в декартова координатна система се задава така

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3.$$

Тук x_1, x_2, x_3 са координатите на материалната точка, а $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ са единичните вектори на координатната система. Евклидовост на пространството означава, че разстоянието между две точки в пространството, в даден момент време, не зависи от отправната система, откъдето

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}'.$$

За две отправни системи S и S' и точки O' (начало на S') и M това означава, че

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'.$$

Времето се счита евклидова права. Това означава, че времевият интервал в дадена точка от пространството не зависи от отправната система, т.е.

$$\Delta t = \Delta t'.$$

Тъй като в класическата механика се допуска възможността за мигновено разпространение на взаимодействията, часовниците на всички отправни системи могат да се синхронизират.

Тогава, горното равенство позволява да се въведе момента време като параметър на движението, не зависещ от отправната система.

При движението си материалната точка описва крива, наречена траектория, която се задава математически с

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

или

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t).$$

Елементът на дължината на траекторията е

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а изменението $d\mathbf{r}$ на радиус-вектора е

$$d\mathbf{r} = ds\boldsymbol{\tau},$$

където $\boldsymbol{\tau}$ е единичният тангенциален вектор в дадената точка на траекторията.

2. Основи на кинематиката на материална точка

Скоростта на материална точка се дефинира като

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Спрямо декартова координатна система $\mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$ и следователно

$$\mathbf{v} = \frac{dx_1}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{dx_2}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{dx_3}{dt}\mathbf{i}_3 = \dot{x}_1\mathbf{i}_1 + \dot{x}_2\mathbf{i}_2 + \dot{x}_3\mathbf{i}_3 = v_1\mathbf{i}_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3,$$

където точката над x_i означава пълна производна по времето, а v_i са декартовите компоненти на скоростта. От друга страна, предвид $d\mathbf{r} = ds\boldsymbol{\tau}$, получаваме

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} = v\boldsymbol{\tau},$$

където v е големината на \mathbf{v} . Следователно, \mathbf{v} е насочена по тангентата в дадената точка на траекторията и има големина $v = \dot{s} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Ускорението на материалната точка се дефинира като

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Спрямо декартова координатна система

$$\mathbf{a} = \ddot{x}_1\mathbf{i}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{i}_2 + \ddot{x}_3\mathbf{i}_3 = \dot{v}_1\mathbf{i}_1 + \dot{v}_2\mathbf{i}_2 + \dot{v}_3\mathbf{i}_3 = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3.$$

От друга страна

$$\mathbf{a} = \frac{d(s\boldsymbol{\tau})}{dt} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + s\dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

Тук $\dot{\boldsymbol{\tau}} = (d\boldsymbol{\tau}/ds)\dot{s}$. От $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$, следва $\boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\tau} = 0$, т.е. $d\boldsymbol{\tau}$ е перпендикулярен на $\boldsymbol{\tau}$. От

геометрически съображения следва, че $d\boldsymbol{\tau}$ лежи в равнината на допирателната окръжност в дадената точка от траекторията и е насочен към центъра на тази окръжност. Тази посока

определя главната нормала към траекторията с единичен вектор \mathbf{n} . От казаното става ясно, че

\mathbf{n} може да се изрази чрез $d\boldsymbol{\tau}$ по формулата $\mathbf{n} = R d\boldsymbol{\tau} / ds$, където $R = 1 / |d\boldsymbol{\tau} / ds| = 1 / |d^2\mathbf{r} / ds^2|$ е радиусът на допирателната окръжност. Този резултат позволява да напишем ускорението на материалната точка във вида

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n},$$

където $a_\tau = \ddot{s}$ е тангенциалното ускорение, а $a_n = \dot{s}^2 / R$ е нормалното ускорение на точката.

Често е удобно да се използват криволинейни координати на материалната точка, напр. цилиндрични, сферични и т.н., които ще означаваме с q_1, q_2, q_3 . Да предположим, че съществува взаимно-еднозначно съответствие между тях и декартовите координати $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$. От тази функция определяме базисните вектори на криволинейната координатна система

$$\mathbf{e}_j = \frac{1}{H_j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j},$$

където $H_j = |\partial \mathbf{r} / \partial q_j|$ са коефициентите на Ламе. Тогава изменението на радиус-вектора е

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3,$$

откъдето скоростта на материалната точка $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ има компоненти $v_j = H_j \dot{q}_j$.

Лесно може да се покаже, че ускорението $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ има компоненти

$$a_j = \frac{1}{H_j} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right].$$

Изборът на криволинейните координати се определя от симетрията на конкретната задача.

3. Динамика на материална точка. Принцип на Галилей

Динамиката на материална точка се подчинява на законите на Нютон.

Първият закон на Нютон гласи: всяко тяло запазва състоянието си на покой или равномерно праволинейно движение, ако не изпитва въздействието на други тела. Отправни системи, в които е в сила първият закон, се наричат инерциални. Системи, движещи се равномерно праволинейно спрямо инерциална отправна система, са също инерциални. Само в инерциални отправни системи е в сила вторият закон на Нютон.

Вторият закон на Нютон гласи: ускорението, което едно тяло получава под действие на дадена сила, е пропорционално на силата и става по посока на силата. Коефициентът на пропорционалност е масата на тялото. Ускоренията, получавани от дадено тяло под действие на различни сили, са независими. Следователно, ускорението, което дадено тяло получава

под действие на няколко сили, е векторна сума на ускоренията, получавани под действие на всяка сила поотделно. Аналогично, пълната сила, с която няколко тела действат върху дадено тяло, е векторна сума на силите, с които тези тела действат поотделно на даденото тяло. Следователно, можем да запишем математически втория закон на Нютон във вида

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

където m е масата на тялото, \mathbf{a} е ускорението му, а \mathbf{F} е векторната сума на всички сили, действащи върху тялото. Предполагаме, че \mathbf{F} зависи изобщо казано от радиус-вектора \mathbf{r} и скоростта \mathbf{v} на тялото, както и от времето t . Това уравнение се нарича *уравнение на движението* на материалната точка.

В механиката се използват главно *потенциални, жирокопични и дисипативни сили*. Потенциалната сила се определя от потенциала на полето $U(\mathbf{r}, t)$ (електростатично, електромагнитно и т.н.): $\mathbf{F}^p = -\nabla U$. Жирокопичната сила е хомогенна линейна функция на скоростта и е перпендикулярна на нея; пример за такава сила е частта от силата на Лоренц, която заряд e изпитва в магнитно поле \mathbf{B} : $\mathbf{F}^g = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Понякога е удобно една потенциална и една жирокопична сила да се обединят в обобщено-потенциална сила $U = U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$; пример за такава сила е пълната сила на Лоренц, която заряд изпитва в електрично и магнитно поле. Дисипативните сили се определят от триенето на тялото с околната среда. При движение на тялото с малка скорост, тези сили са пропорционални на скоростта и се задават с $\mathbf{F}^d = -k\mathbf{v}$. Освен тези сили, има и сили, които се дължат на други тела и не са известни функции на радиус-вектора, скоростта и времето. Тези сили ограничават движението на тялото и се наричат *сили на реакция*. Последователното им третиране е възможно само в лагранжевата механика, която ще разгледаме в следващата глава.

Уравнението на движението е обикновено диференциално уравнение от втори ред спрямо радиус-вектора. Общото му решение зависи от шест неопределени константи. Те се определят от началните условия - радиус-вектора \mathbf{r}_0 и скоростта \mathbf{v}_0 в началния момент t_0 . Следователно, решението на уравнението на движението има вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0, t).$$

То се нарича закон за движението.

Да разгледаме две инерциални системи S и S' . Нека втората се движи спрямо първата със скорост \mathbf{V} . Връзката между радиус-векторите на тяло в двете системи се дава от т.нар. *трансформация на Галилей*

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t.$$

Чрез диференциране на това равенство, получаваме съотношения, даващи трансформацията на скоростта и ускорението на тялото

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

и

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} .$$

Освен това, чрез опити Галилей получава, че силата остава неизменна при преход от S към S'

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} .$$

Последните две съотношения показват, че уравнението на движението запазва формата си при преход от една инерциална отправна система към друга такава. Казваме, че уравнението на движението е инвариантно спрямо трансформацията на Галилей. Това твърдение изразява *принципа на относителността на Галилей*. Този принцип твърди по-общо, че законите на механиката са еднакви във всички инерциални отправни системи.

4. Динамика на система от материални точки. Уравнения на движението. Закон за запазване на импулса. Център на масата

Динамиката на система от N материални точки с маси m_i и взаимодействащи с външни тела и помежду си се подчинява на уравненията на движението

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} ,$$

$i = 1, 2, \dots, N$; \mathbf{F}_i е силата върху i -тата материална точка от страна на външните тела, а \mathbf{F}_{ik} е силата върху i -тата материална точка от страна на k -тата материална точка. Самодействието се изключва и затова $\mathbf{F}_{ii} = 0$. Силите се предполагат известни функции на радиус-векторите $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$, скоростите $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$ и времето t . На вътрешните сили има наложени ограничения, произтичащи от третия закон на Нютон. Той гласи: две тела си взаимодействат помежду си с равни по големина и противоположни по посока сили, действащи по правата, минаваща през двете точки, т.е.

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki} .$$

Уравненията на движението на системата представляват система от N обикновени диференциални уравнения от втори ред спрямо радиус-векторите. Решенията им се наричат интеграли на движението. Различават първи и втори интеграли. Първи интеграл е всяка функция f на радиус-векторите, скоростите и времето, оставаща неизменна при движението на системата, т.е. $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = const$. Втори интеграл е всяка функция f на радиус-векторите и

времето, оставаща неизменна с времето, т.е. $f(\mathbf{r}, t) = const$. Познаването на интеграли на движението позволява да се намали броя на неизвестните функции на динамичната задача.

Първите интеграли на движението често са свързани с импулса, момента на импулса и енергията на системата. Ето защо ще се спрем на законите за изменение на тези величини.

Импулс на система от материални точки наричаме векторната величина

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i,$$

където $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ е импулсът на i -тата точка. Изменението на \mathbf{P} е

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik}.$$

Да разбием члена с \mathbf{F}_{ik} на сумата от два члена и да разменим индексите i и k във втория член.

Предвид факта, че сумата не зависи от реда на сумирането, и третия закон на Нютон имаме

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki}) = 0.$$

Тогава получаваме, че изменението на импулса на системата се дължи само на външните сили

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F},$$

където $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ е сумата на всички външни сили, действащи върху системата.

В отсъствие на външни сили (т.е. за затворена система), $\dot{\mathbf{P}} = 0$, т.е. импулсът на системата се запазва: $\mathbf{P} = const$. Съгласно въведената терминология, \mathbf{P} е първи интеграл на движението на системата.

Да въведем радиус-вектора на центъра на масата на система от материални точки с израза

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^N m_i.$$

Тогава $\mathbf{P} = m \dot{\mathbf{R}}$, където $m = \sum m_i$ е пълната маса на системата, и следователно

$$\dot{\mathbf{P}} = m \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F},$$

т.е. центърът на масата се движи като материална точка под действие на сумата на външните сили и движението му не зависи от вътрешните сили. В отсъствие на външни сили (затворена система), $\dot{\mathbf{P}} = m \ddot{\mathbf{R}} = 0$, т.е. $\mathbf{P} = m \dot{\mathbf{R}} = const$ и следователно центърът на масата се движи равномерно праволинейно.

5. Закони за запазване на момента на импулса и на енергията на система от материални точки. Интеграл на движението

Момент на импулса на система от материални точки наричаме векторната величина

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_N \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i,$$

където $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ е моментът на импулса на i -тата точка. Изменението на \mathbf{M} е

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}.$$

Тук $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i = 0$ като векторно произведение на колинеарни вектори. Да разбием члена с $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}$ на сумата от два члена и да разменим индексите i и k във втория член. Предвид факта, че сумата не зависи от реда на сумирането и използвайки третия закон на Нютон, намираме

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik} = 0.$$

Тогава получаваме, че изменението на импулса на системата се дължи само на външните сили

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K},$$

където $\mathbf{K} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ е моментът на външните сили, действащи върху системата.

В отсъствие на момент на външните сили, $\dot{\mathbf{M}} = 0$, т.е. моментът на импулса на системата се запазва: $\mathbf{M} = \text{const}$. С други думи, \mathbf{M} е първи интеграл на движението на системата.

За да намерим закона за изменение на енергията на системата, да умножим уравнението на движението на i -тата материална точка по \mathbf{v}_i и да го сумираме по i

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i.$$

В лявата страна на това уравнение

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i \equiv \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right).$$

Да въведем кинетичната енергия T на системата с равенството

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2.$$

Тогава изменението на кинетичната енергия се дава с равенството

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i.$$

Да разгледаме случая на потенциални сили $\mathbf{F}_i^p = -\nabla_i U_i(\mathbf{r}_i, t)$ и $\mathbf{F}_{ik}^p = -\nabla_i U_{ik}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$.

Имаме

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^p \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (-\nabla_i U_i) \cdot \mathbf{v}_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N U_i + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N U_i$$

и

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik}^p \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik}^p \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ik}^p \cdot \mathbf{v}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (-\nabla_i U_{ik}) \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (-\nabla_k U_{ki}) \cdot \mathbf{v}_k.$$

Предвид $U_{ki} = U_{ik}$ и

$$\nabla_i U_{ik} \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_k U_{ki} \cdot \mathbf{v}_k = \nabla_{ik} U_{ik} \cdot \mathbf{v}_i - \nabla_{ik} U_{ik} \cdot \mathbf{v}_k = \nabla_{ik} U_{ik} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) = \frac{d}{dt} U_{ik},$$

където ∇_{ik} е градиент спрямо компонентите на $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, можем да напишем

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{ik}^p \cdot \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N U_{ik}.$$

Следователно

$$\dot{T} = -\dot{U} + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Величината $U = \sum_{i=1}^N U_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N U_{ik}$ е пълната потенциална енергия на системата.

Въвеждайки пълната механична енергия $E = T + U$, получаваме

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

В случая на независеща от времето потенциална енергия, т.е. $\partial U / \partial t = 0$ (т.нар. консервативна система), получаваме $\dot{E} = 0$, т.е. пълната енергия се запазва. С други думи, E е първи интеграл на движението.

Да разгледаме случая на жирокопични сили (напр. частта от силата на Лоренц $\mathbf{F}_i^g = e\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}$). Те действат перпендикулярно на скоростта на материалните точки и следователно не изменят енергията им.

Да разгледаме случая на дисипативни сили, задавани с $\mathbf{F}_i^d = -k_i \mathbf{v}_i$. Имаме

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (-k_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^N k_i v_i^2.$$

Да въведем дисипативната функция на Релей D с равенството

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i v_i^2.$$

Тогава изменението на механичната енергия на система, в която действат потенциални, жирокопични и дисипативни сили, се дава с

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} - 2D.$$

Пълната енергия се запазва при независеща явно от времето потенциална енергия и отсъствие на дисипативни сили, т.е. за *консервативна система*.

6. Трансформация на скоростта и ускорението при преход към неинерциална отправна система. Уравнение на движението

Законите на Нютон са в сила само в инерциални отправни системи (ИОС). В практиката обаче се срещат и неинерциални отправни системи (НОС). Затова е необходимо да се намери уравнението на движението на материална точка и в НОС. За целта трябва да се намерят законите за трансформация на координатите, скоростта и ускорението при преход от ИОС към НОС и да се заместят в уравнението на движението спрямо ИОС. При това масата и времето са инвариантни при този преход, а силите са известни функции на координатите и скоростта на материалната точка, както и на времето.

Да намерим закона за трансформация на скоростта при преход от ИОС към НОС. Преди всичко радиус-векторите на точката в ИОС и НОС, \mathbf{r} и \mathbf{r}' , са свързани с равенството

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}',$$

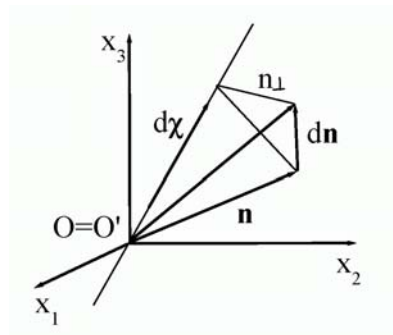
където $\mathbf{r}_{O'}$ е радиус-вектора на началото на НОС O' спрямо ИОС. След диференциране на това равенство по времето, намираме

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt},$$

където лявата страна е скоростта на точката спрямо ИОС (т.нар. абсолютна скорост).

Първият член в дясната страна е скоростта на постъпателно движение на O' спрямо ИОС. За да намерим втория член, използваме разлагането на \mathbf{r}' в НОС $\mathbf{r}' = x'_1 \mathbf{i}'_1 + x'_2 \mathbf{i}'_2 + x'_3 \mathbf{i}'_3$. Тъй като с времето се изменят както x'_i , така и \mathbf{i}'_i , то получаваме

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'_1}{dt} \mathbf{i}'_1 + \frac{dx'_2}{dt} \mathbf{i}'_2 + \frac{dx'_3}{dt} \mathbf{i}'_3 + x'_1 \frac{d\mathbf{i}'_1}{dt} + x'_2 \frac{d\mathbf{i}'_2}{dt} + x'_3 \frac{d\mathbf{i}'_3}{dt}.$$



Първите три члена в дясната страна дават скоростта на точката спрямо НОС (т.нар. относителна скорост), която ще означим с $d'\mathbf{r}'/dt$ (примът на d означава диференциране при неизменни \mathbf{i}'_i). Последните три члена дават скоростта, свързана с въртене на НОС спрямо ИОС. За да намерим тази скорост, да разгледаме по-подробно един от векторите \mathbf{i}'_i като за удобство

го означим с \mathbf{n} . Тъй като се интересуваме само от въртенето на НОС спрямо ИОС, поместваме O' в началото на ИОС. Нека $d\mathbf{n}$ е изменението на \mathbf{n} за време dt . Това изменение може да се разглежда като резултат от завъртане на \mathbf{n} на безкрайно малък ъгъл $d\chi$ около някаква ос през общото начало на двете отправни системи (теорема на Ойлер). Прободната точка на тази ос с перпендикулярна на нея равнина, съдържаща $d\mathbf{n}$, образува равнобедрен триъгълник с началото и края на $d\mathbf{n}$ с бедра n_{\perp} . Имаме $dn = d\chi n_{\perp}$. Да въведем вектор $d\chi$ с големина $d\chi$ и посока по оста на въртене. Очевидно $d\mathbf{n} = d\chi \times \mathbf{n}$ и $|d\chi \times \mathbf{n}| = d\chi \sin(d\chi, \mathbf{n}) = d\chi n_{\perp}$. Тогава, след разделяне това векторно равенство на dt , намираме

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d\chi}{dt} \times \mathbf{n} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}.$$

Векторната величина $\boldsymbol{\omega} = d\chi/dt$ е ъгловата скорост на въртене на НОС спрямо ИОС. Предвид това равенство, намираме

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Окончателно получаваме закона за трансформация на скоростта във вида

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'.$$

Така, скоростта на точката спрямо ИОС е сума от скоростите, свързани с постъпателното и въртеливото движение на НОС (преносна скорост), и относителната скорост.

Законът за трансформация на ускорението намираме чрез диференциране на това равенство по времето

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}.$$

С използване на формулата за $d\mathbf{r}'/dt$, както и аналогична формула за $d\mathbf{v}'/dt$, намираме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \left(\frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right) \\ &= \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'.$$

Следователно, абсолютното ускорение \mathbf{a} е сума от ускорението, дължащо се на постъпателното и въртеливото движение на НОС (преносно ускорение \mathbf{a}^h), кориолисовото ускорение $\mathbf{a}^c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ и относителното ускорение \mathbf{a}' .

Уравнението на движението на материалната точка в НОС получаваме със заместване на горния израз в уравнението на движението спрямо ИОС

$$m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}^h + \mathbf{a}^c + \mathbf{a}') = \mathbf{F}$$

или

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}^h - m\mathbf{a}^c .$$

И така, в НОС материалната точка получава ускорение както под действие на силата \mathbf{F} , така и в резултат от движението на НОС спрямо ИОС. Последното може да се интерпретира като резултат от действие на инерчни сили. Тези сили не се дължат на тела, затова нямат противодействащи и не се подчиняват на третия закон на Нютон. Тази интерпретация позволява да напишем уравнението на движението във вида

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}^h + \mathbf{F}^c ,$$

където $\mathbf{F}^h = -m\mathbf{a}^h$ и $\mathbf{F}^c = -m\mathbf{a}^c$ се наричат преносна и кориолисова инерчни сили.

Както вече видяхме, уравнението на движението е инвариантно спрямо трансформациите на Галилей при преход от една ИОС към друга ИОС, и в този смисъл то е абсолютно. Изводите по-горе показват, че при работа в НОС, винаги е необходимо да се знае движението на НОС спрямо някаква ИОС.

II. УРАВНЕНИЯ НА ЛАГРАНЖ

7. Динамика на несвободни системи. Видове връзки. Уравнения на движението

При формулирането на уравненията на движението на система от материални точки във вида

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

предположиме, че силите са известни функции на радиус-векторите и скоростите на материалните точки, и времето. Тогава решаването на уравненията на движението се свежда до интегриране на системата от N обикновени диференциални уравнения от втори ред.

В много случаи обаче на движението на системата има наложени ограничения, т.нар. връзки. Такава система се нарича несвободна. Самите ограничения могат да се изразят с алгебрични уравнения, свързващи радиус-векторите и времето, т.нар. уравнения на връзките,

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

където $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$, а n е броят на връзките. Уравненията на връзките могат да съдържат и скоростите на материалните точки. Ако уравненията на връзките могат да се сведат до вид, несъдържащ скоростите, такива връзки се наричат холономни (или интегрируеми). Ако това е невъзможно, връзките се наричат нехолономни (или неинтегрируеми). Връзките се разделят на удържащи - те се задават с равенства, и неудържащи - задават се с неравенства. Връзките се разделят още на стационарни (или склерономни) - уравненията на връзките не съдържат явна зависимост от времето, и нестационарни (или реономни) - уравненията на връзките съдържат явна зависимост от времето. Система, на която не са наложени връзки, се нарича свободна.

Да разгледаме система от материални точки, на движението на която има наложени холономни връзки. Връзките влияят на движението на материалните точки, което е еквивалентно на появата на допълнителни сили, т.нар. сили на реакция на връзките \mathbf{R}_i . Тогава уравненията на движението на системата с наложени връзки могат да се запишат във вида

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Тези уравнения трябва да се решат при ограничения, зададени от уравненията на връзките

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

Съвкупността от двете системи уравнения съдържа $3N + n$ уравнения за $3N$ неизвестни координати и $3N$ неизвестни компоненти на реакциите на връзките. Очевидно е, че такава система уравнения е неопределена в общия случай. Ефективен метод за решаване на тази система уравнения е предложен от Лагранж.

8. Уравнения на Лагранж от I род

Да разгледаме система от N материални точки с наложени n холономни връзки. Динамиката на такава система се определя от уравненията на движението и уравненията на връзките

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i=1,2,\dots,N$$

$$f_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,n.$$

Да въведем понятието виртуално преместване на една система като произволно безкрайно малко преместване на материалните точки $\delta \mathbf{r}_i$, което се съгласува с връзките, наложени на системата в даден момент t . Виртуалното преместване се отличава от реалното преместване $d\mathbf{r}_i$, което се извършва за време dt . Величините $\delta \mathbf{r}_i$ се наричат още вариации на \mathbf{r}_i .

Виртуалната работа на силите на реакция на връзките е $\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$. Връзките ще наричаме идеални, ако виртуалната им работа е нула, т.е.

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Това условие означава, че силите на реакция на връзките са нормални на ограничаващите повърхности и линии (такива повърхности и линии наричаме гладки), както и, когато движението се извършва по повърхности и линии без хлъзгане, защото тогава за точката на допирание $\delta \mathbf{r}_i = 0$. Това условие не се изпълнява обаче за хлъзгане с триене и такива случаи се изключват от нашето разглеждане.

При виртуални премествания в даден момент t функциите f_α не трябва да се изменят, т.е.

$$\delta f_\alpha = \sum_{i=1}^N \nabla_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,n.$$

Системата от уравнения $\delta A_R = 0$ и $\delta f_\alpha = 0$ решаваме по метода на неопределените множители на Лагранж. Той се състои в умножаване на уравненията $\delta f_\alpha = 0$ с неопределени множители λ_α , сумиране по α и изваждане на уравнението $\delta A_R = 0$. Така получаваме

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{R}_i - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

От всички вариации на координатите, n са зависими, а $3N - n$ са независими. Лагранж предложил да се изберат равни на нула n те множителя при вариациите на n от координатите. Тогава вариациите на останалите координати са независими и, за да се удовлетвори обръщането на нула на тяхната линейна комбинация, е необходимо множителите на независимите вариации да са също равни на нула. С други думи, множителите на всички вариации са нула, т.е.

$$\mathbf{R}_i - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha} = 0.$$

Тези уравнения позволяват да се определят силите на реакция на връзките чрез множителите на Лагранж. С това, уравненията на движението добиват вида

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \nabla_i f_{\alpha}, \quad i=1,2,\dots,N$$

$$f_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,n.$$

Съвкупността от тези две системи уравнения описва динамиката на система с наложени идеални холономни връзки. Тези уравнения се нарича уравнения на Лагранж от I род или уравнения на Лагранж с реакции на връзките. Те са $3N + n$ уравнения за $3N$ неизвестни координати на материалните точки и n множителя на Лагранж. След решаване на тази система, силите на реакция на връзките се определят с помощта на множителите на Лагранж.

9. Принцип на Даламбер. Кинетична енергия в обобщени координати

Да разгледаме система от N материални точки с наложени n холономни идеални връзки. Уравненията на Лагранж от I род позволяват да се намери закона за движение на материалните точки и силите на реакция на връзките. Често обаче е необходимо намирането само на закона за движение, но не и на силите на реакция на връзките. За решаване на такава задача, да разгледаме първо система от материални точки в равновесие. Тогава $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$ и виртуалната работа е също равна на нула: $(\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$. Сумирайки това равенство по i и отчитайки, че връзките са идеални, т.е. $\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, намираме

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Това уравнение често се нарича принцип на виртуалната работа. То удовлетворява изискването да не съдържа силите на реакция, но се отнася до система в равновесие. Даламбер предлага обобщение на този принцип за случая на движение, забелязвайки, че

уравненията на движението $m\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$ могат да се запишат като $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - m\mathbf{a}_i = 0$ и да се интерпретират като уравнения за равновесие под действие на реални сили и фиктивна сили $-m\mathbf{a}_i$. Тогава принципът на виртуалните работи може да се напише във вида

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Полученото равенство често наричат принцип на Даламбер. С получаването на това равенство постигнахме изключване на силите на реакция. То обаче не позволява множителите на $\delta \mathbf{r}_i$ да се напишат равни на нула, защото $\delta \mathbf{r}_i$ не са независими. Това може да се постигне чрез преминаване към независими обобщени координати q_j , за които δq_j ще са независими. Тогава приравняването на нула на множителите на δq_j в принципа на Даламбер ще даде уравненията на движението.

Преходът от \mathbf{r}_i към q_j се извършва чрез съотношенията

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, t),$$

където $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Предполага се, че \mathbf{r}_i са еднозначни функции на q_j и обръщат в нула тъждествено уравненията на връзките. Заместваме тези съотношения в принципа на Даламбер

$$0 = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j.$$

Преобразуваме първия член в скобите

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Използваме израза за пълната производна по времето на \mathbf{r}_i

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t},$$

за да намерим производните

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Тогава

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

и

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

където

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

е кинетичната енергия на системата. В обобщени координати тя е изобщо казано квадратна функция от \dot{q}_j .

ДОПЪЛНЕНИЕ

Структура на кинетичната енергия в обобщени координати

- общ случай:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q,t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s a_j(q,t) \dot{q}_j + a(q,t) = T(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

- случай на стационарни връзки (т.е. $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k = T(q, \dot{q}).$$

10. Обобщени сили. Уравнения на Лагранж от втори род

Да разгледаме отново система от N материални точки с наложени n холономни идеални връзки. Принципа на Даламбер преработихме до вида

$$\sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0,$$

където първият член с скобите изразихме чрез кинетичната енергия на системата така

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Вторият член в скобите, който е виртуалната работа на силите \mathbf{F}_i , представяме като виртуална работа на т.нар. обобщени сили Q_j

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j,$$

където

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

С това можем да запишем принципа на Даламбер във вида

$$\sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

Тъй като q_j са независими, то δq_j са също независими и следователно множителите на δq_j трябва да са нула тъждествено

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Тези уравнения се наричат уравненията на Лагранж от II род или уравнения на Лагранж в независими обобщени координати, или просто уравнения на Лагранж.

Да разгледаме случая на наличие на потенциални сили $\mathbf{F}_i = -\nabla_i U$, където $U = U(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$) е потенциалната енергия на системата. Имаме

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \nabla_i U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

където $U = U(q, t)$ и $q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Тогава уравненията на Лагранж добиват вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Да разгледаме случая на наличие на обобщено-потенциални сили, които се задават с обобщена потенциална енергия $U = U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, зависеща от радиус-векторите и линейна по скоростите на материалните точки. Такава е силата на Лоренц, действаща на заряд в електромагнитно поле. Такава сила се представя във вида $\mathbf{F}_i = -\nabla_i U + \frac{d}{dt} \nabla_{v_i} U$. Очевидно е, че потенциалните сили са частен случай на обобщено-потенциалните сили при $U = U(\mathbf{r}, t)$.

Имаме

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left(-\nabla_i U + \frac{d}{dt} \nabla_{v_i} U \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left[-\nabla_i U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \nabla_{v_i} U \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{d}{dt} \left(\nabla_{v_i} U \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

където $U = U(q, \dot{q}, t)$. Тогава уравненията на Лагранж са

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

където $L = T - U$ е т.нар. функция на Лагранж или лагранжиан на системата.

Да разгледаме случая на наличие на дисипативни сили. Уравненията на Лагранж са

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d,$$

където Q_j^d са обобщени дисипативни сили. Ако дисипативните сили са пропорционални на скоростта $\mathbf{F}_i^d = -k_i \mathbf{v}_i$, тогава

$$Q_j^d = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N k_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N k_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j},$$

където $D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ е дисипативната функция на Релей. В обобщени координати, тя е изобщо квадратна функция на \dot{q}_j . Уравненията на Лагранж за обобщено-потенциални и дисипативни сили добиват вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}.$$

ДОПЪЛНЕНИЕ

А. Обобщено-потенциални сили, линейни по скоростта

- общ вид:

$$U(q, \dot{q}, t) = U_0(q, t) + \sum_{k=1}^s \dot{q}_k A_k(q, t),$$

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial U_0}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s \dot{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial q_j} + \dot{A}_j.$$

Предвид $\dot{A}_j = \partial A_j / \partial t + \sum_{k=1}^s \dot{q}_k \partial A_j / \partial q_k$, можем да напишем

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial U_0}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^s \dot{q}_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial A_j}{\partial t}.$$

- пример - заряд e в електромагнитно поле със скаларен потенциал φ и векторен потенциал \mathbf{A} :

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = e\varphi - e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A},$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} U = -e\nabla \varphi + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{A} - e\dot{\mathbf{A}}.$$

От $\dot{\mathbf{A}} = \partial \mathbf{A} / \partial t + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, имаме

$$\mathbf{F} = -e\nabla\varphi + e\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\mathbf{A} - e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A} = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + e\dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}).$$

Въвеждаме интензитета на електричното поле $\mathbf{E} = -e\nabla\varphi - e\partial\mathbf{A}/\partial t$ и магнитната индукция

$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ и получаваме силата върху заряд в електромагнитно поле във вида

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}).$$

Б. Лагранжиан и уравнения на Лагранж на свободна материална точка под действие на потенциални сили

- декартови координати x_1, x_2, x_3 :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0,$$

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \equiv F_1, \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv F_2, \quad m\ddot{x}_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} \equiv F_3.$$

Следователно, уравненията на Лагранж се свеждат до втория закон на Нютон $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$.

- цилиндрични координати ρ, φ, z :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

- сферични координати r, θ, φ :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - U,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$m[\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)] = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad m\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = -\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

В. Структура на дисипативната функция в обобщени координати

- общ случай:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} =$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s b_{jk}(q,t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^s b_j(q,t) \dot{q}_j + b(q,t) = D(q, \dot{q}, t)$$

- случай на стационарни връзки (т.е. $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$):

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \sum_{i=1}^N k_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \equiv \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s b_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k = D(q, \dot{q}) .$$

11. Принцип на Хамилтон и уравненията на Лагранж от втори род

Изведохме уравненията на Лагранж от II род като разгледахме моментното състояние на системата от материални точки и виртуални изменения на това състояние. Тези уравнения могат да се получат обаче и от други принципи, в които се разглежда движението на системата за краен интервал време и виртуални изменения на движението в този интервал време. Такива принципи се наричат интегрални.

Преди всичко, движението на системата в даден момент се определя от стойностите на координатите q_1, q_2, \dots, q_s . Тези координати могат да се разглеждат като координати на точка в s -мерното конфигурационно пространство на системата. С течение на времето тази точка описва някаква крива - траекторията на движение на системата.

Да формулираме интегралния принцип на Хамилтон (или принцип на най-малкото действие) за система с наложени холономни идеални връзки и действащи обобщено-потенциални сили: истинското движение на системата между фиксирани начално и крайно положения съответно $q(t_1)$ и $q(t_2)$, които тя заема в моменти t_1 и t_2 , е такава, че интегралът

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

има екстремум (минимум или максимум). S се нарича интеграл на действието или просто действие.

Съгласно принципа на Хамилтон, истинското движение е такава, че вариацията на S при фиксирани начално и крайно положения $q(t_1)$ и $q(t_2)$ е нула

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 .$$

Ще покажем, че уравненията на Лагранж от II род са следствие от принципа на Хамилтон. Наистина, от горното равенство имаме

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0.$$

Използваме, че $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$, интегрираме втория член по части и получаваме

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right] dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j dt = 0.$$

Първият член е нула, защото $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Вследствие на независимостта на δq_j получаваме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Да обобщим принципа на Хамилтон за система с наложени холономни идеални връзки и действащи обобщено-потенциални сили и дисипативни сили така

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L + A^d) dt = 0.$$

Тук $A^d = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \mathbf{r}_i$; следователно $\delta A^d = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^d \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j^d \delta q_j$. Тогава получаваме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d.$$

Принципът на Хамилтон може да се обобщи и за нехолономни връзки.

12. Интеграли на движението. Закон за запазване на обобщения импулс

Уравненията на Лагранж от II род са s обикновени диференциални уравнения от втори ред за s неизвестни обобщени координати. Общото решение зависи от $2s$ константи, които могат да се определят от началните координати и скорости. Както и преди, и тук можем да дефинираме първи интеграл на движение като всяка функция на координатите, скоростите и времето, която остава неизменна при движението на системата. Втори интеграл е всяка функция на координатите и времето, която остава неизменна при движението на системата. Познаването на първи и втори интеграли позволява опростяването на задачата. Както и преди, съществуването на определени първи интеграли може да бъде изявено веднага.

Такива първи интеграли следват от законите за запазване на обобщения импулс и обобщената енергия.

Обобщен импулс наричаме величината

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j=1,2,\dots,s.$$

На всяка обобщена координата q_j отговаря обобщен импулс p_j . Например, за една материална точка, в декартови координати, $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{x}_\alpha = m\dot{x}_\alpha$ отговарят на трите декартови компоненти на импулса. Заместването на p_α в уравненията на Лагранж води до уравненията на движението в декартови координати $\dot{p}_\alpha = F_\alpha$. В криволинейни координати q_j , обобщеният импулс p_j може да няма размерност на импулс. Например, в цилиндрични координати $p_\varphi = M_z$, където M_z е z компонентата на момента на импулса.

Ако L не съдържа някоя координата q_j , то тази координата се нарича циклична. За система с наложени холономни идеални връзки и действащи обобщено-потенциални и дисипативни сили, уравнението на Лагранж за тази координата има вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^d$$

или

$$\frac{dp_j}{dt} = Q_j^d.$$

Ако $Q_j^d = 0$, то $dp_j / dt = 0$ и следователно

$$p_j = const$$

Това равенство изразява закона за запазване на обобщения импулс. Съгласно този закон, ако в система с обобщено-потенциални сили и без дисипативни сили координатата q_j е циклична, то съответният обобщен импулс се запазва. Импулсът p_j е пръв интеграл.

Наличието му позволява да се изключи обобщената скорост \dot{q}_j от уравненията на Лагранж.

Наличието на циклична координата означава, че при премествания, описвани от тази координата, уравненията на Лагранж остават неизменни, т.е. са инвариантни. От друга страна, обобщеният импулс, отговарящ на цикличната координата, се запазва. Следователно, запазването на даден обобщен импулс може да се свърже с инвариантността на механичните свойства спрямо трансформации на системата, отговарящи на циклична координата. В най-общ вид, това твърдение се нарича теорема на Ньотер.

ДОПЪЛНЕНИЕ

Обобщен импулс на свободна материална точка под действие на потенциални сили

- цилиндрични координати

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U ,$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} , \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi} , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

- сферични координати

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - U ,$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} , \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}$$

13. Закон за запазване на обобщената енергия

Да разгледаме система с холономни идеални връзки и обобщено-потенциални и дисипативни сили, която има s степени на свобода. Да намерим пълната производна на лагранжиана по времето

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} .$$

Използваме уравненията на Лагранж от II род, за да преобразуваме дясната страна

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - Q_j^d \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} .$$

Следователно

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j .$$

Ако $\partial L / \partial t = 0$ и всички $Q_j^d = 0$, то

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0 .$$

Да въведем обобщената енергия на системата с равенството

$$H = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L .$$

Тогава по-горното равенство може да се запише като $dH / dt = 0$ или

$$H = const .$$

Това равенство изразява закона за запазване на обобщената енергия. Съгласно този закон, ако в системата не действат дисипативни сили и лагранжианът не зависи явно от времето (т.е. $\partial L / \partial t = 0$), то обобщената енергия на такава система се запазва. Такава система се нарича обобщено-консервативна. Обобщената енергия H е пръв интеграл на движението.

Отбелязваме, че условието $\partial L / \partial t = \partial T / \partial t - \partial U / \partial t = 0$ може да се изпълнява и при $\partial T / \partial t \neq 0$ и $\partial U / \partial t \neq 0$, като запазващата се обобщена енергия е изобщо отлична от пълната енергия E на системата.

Да разгледаме частния случай на запазване на обобщената енергия, но при наличие само на стационарни потенциални сили ($\partial U / \partial t = 0$) и стационарни връзки ($\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$; при това условие $\partial T / \partial t = 0$, а самата кинетична енергия е квадратична функция на \dot{q}_j). Ясно е, че $\partial L / \partial t = 0$ се изпълнява заедно с $\partial T / \partial t = 0$ и $\partial U / \partial t = 0$. Освен това, $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$ и $H = \sum_{j=1}^s (\partial T / \partial \dot{q}_j) \dot{q}_j - L$. По теоремата на Ойлер за хомогенните функции имаме

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T.$$

Следователно,

$$H = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U = E,$$

т.е. запазващата се обобщена енергия съвпада с пълната енергия на системата и такава система е консервативна. В по-общия случай на стационарни обобщено-потенциални сили, линейни по скоростта, $U(q, \dot{q}) = U_0(q) + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j A_j(q)$, може аналогично да се покаже, че $H = T + U_0 = E$, т.е. такава система също е консервативна.

Отбелязваме, че липсата на явна зависимостта на L от t означава инвариантност на лагранжиана и уравненията на Лагранж спрямо транскации във времето. Следователно, запазването на обобщената енергия е свързано с тази инвариантност. Този резултат е следствие от по-общата теорема на Нютон за съответствие между инвариантността на механичните свойства на системата и законите за запазване.

14. Теорема на Нютон

Както вече видяхме, съществува връзка между инвариантността на лагранжиана и уравненията на движението при трансформация на координатите и времето и законите за запазване. Такава връзка е установена за действието и формулирана като теорема на Нютон. Тя се свежда до твърдението, че *на всяка непрекъсната обратима трансформация на*

координатите, при която действието остава инвариантно, съответства първ интеграл на движението на уравненията на Лагранж от втори род.

Нека е дадена непрекъсната обратима трансформация $q'_j = q'_j(q, t, \varepsilon)$ ($j=1, 2, \dots, s$), зависеща от безкрайно малък параметър ε ; при това, ако $\varepsilon = 0$, то трансформацията е тъждествена. Вариацията на координатите е

$$\delta q'_j = \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon.$$

Тогава вариацията на действието по реалната траектория между фиксирани моменти t_0 и t е

$$\delta S = \varepsilon \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0}^t.$$

Тази вариация трябва да се анулира, тъй като действието е инвариантно. Тогава

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_t$$

Тъй като t_0 и t са произволни, оттук следва първи интеграл на уравненията на Лагранж

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = const.$$

С това теоремата е доказана.

Да намерим първите интегрални на затворена консервативна система от материални точки с лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

Този лагранжиан (а следователно и действието) е инвариантен спрямо произволна безкрайно малка трансляция на системата (в това се проявява хомогенността на пространството). За

транслация по оста x_1 , имаме $x'_1 = x_1 + \varepsilon$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$ и отговарящият на тази

трансформация интеграл на движението е съответната компонента на импулса на системата

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_{1i}} \left(\frac{\partial x'_{1i}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_{1i} = P_1.$$

Лагранжианът е инвариантен и спрямо произволно безкрайно малко завъртане ε на системата (в това се проявява изотропността на пространството). За завъртане около оста x_3 , имаме

$x'_1 = x_1 - \varepsilon x_2$, $x'_2 = x_2 + \varepsilon x_1$, $x'_3 = x_3$ и отговарящият интеграл на движението е съответната

компонента на момента на импулса на системата ($\partial x'_{1i} / \partial \varepsilon = -x_{2i}$, $\partial x'_{2i} / \partial \varepsilon = x_{1i}$)

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{1i}} \left(\frac{\partial x'_{1i}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{2i}} \left(\frac{\partial x'_{2i}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] = \sum_{i=1}^N m_i (x_{1i} \dot{x}_{2i} - x_{2i} \dot{x}_{1i}) = M_3.$$

Накрая, лагранжианът, като независещ явно от времето, е инвариантен спрямо произволно безкрайно малко преместване във времето $t' = t + \varepsilon$ (в това се проявява хомогенността на времето). Тази инвариантност изисква стационарни връзки и стационарни потенциални сили. Както ще видим по-нататък, вариацията на действието по истинската траектория между фиксирани положения се дава с $\delta S = E \delta t - E_0 \delta t_0$. Оттук, $\delta S = (E - E_0) \varepsilon = 0$ води до $E = E_0$. С това получихме, че съответният интеграл на движението е пълната енергия на системата.

III. ИНТЕГРИРАНЕ НА УРАВНЕНИЯТА НА ДВИЖЕНИЕТО

15. Едномерно движение. Интегриране на уравнението на движение. Анализ на движението. Период на финитното движение

Едномерно наричаме движение на система с една степен на свобода. Най-общият вид на лагранжиана на такава система, намираща се в постоянни външни условия, е

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q).$$

В частност, ако $a(q)$ е константа, която ще означим с m , а q преименуваме на x , то

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x).$$

Съответното уравнение на движението се интегрира в общ вид. Затова няма нужда да пишем самото уравнение на движението, а е достатъчно да изходим от първия интеграл, изразяващ закона за запазване на енергията,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x).$$

Това обикновено диференциално уравнение от първи ред се интегрира чрез разделяне на променливите. Имаме

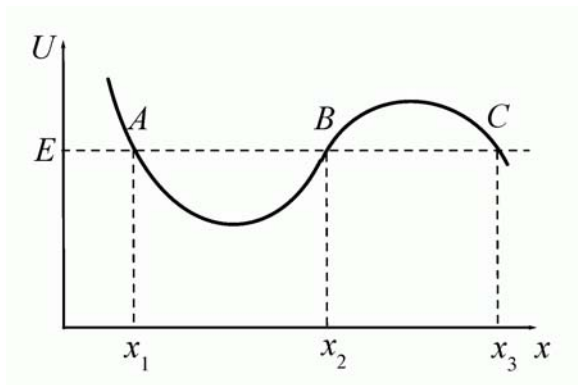
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))},$$

откъдето

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C.$$

Това уравнение дава закона за движение на системата в неявен вид. Роля на двете константи на интегрирането изгряят E и C .

Да проведем анализ на полученото решение. Тъй като $T = (1/2)m\dot{x}^2 > 0$, то при



движение на системата $E > U(x)$. Например, за потенциала U , показан на фигурата, правата $E = U(x)$ пресича функцията $U(x)$ в три точки A , B и C с координати x_1 , x_2 и x_3 . От $E > U(x)$ следва, че движението е възможно само между точките x_1 и

x_2 , и надясно от точка x_3 . Точките, за които $E = U(x)$, определят границите на движение. Те са точки на спиране, защото в тях $\dot{x} = 0$. Ако областта на движение е ограничена от две такива точки, то движението става в ограничена област от пространството. Такова движение се нарича финитно. Ако областта на движение е ограничена само от едната страна или не е ограничена, то движението е инфинитно и системата отива в безкрайност.

Едномерното финитно движение е осцилаторно - системата извършва периодично повтарящо се движение между двете граници (в потенциалната яма AB границите са точките x_1 и x_2). От общото свойство на обратимост на движението следва, че времето за движение от x_1 до x_2 е равно на времето за движение от x_2 до x_1 . Затова периодът на осцилациите T , т.е. времето за движение от x_1 и x_2 и обратно, е равен на удвоеното време за изминаване на отсечката x_1x_2

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

16. Движение на материална точка в централно поле. Закон за движението и уравнение на траекторията

Да разгледаме движение на частица в силово поле, в което върху нея действа сила, зависеща по големина само от разстоянието до неподвижна точка, наречена център на силата, и имаща направление на правата, минаваща през частицата и центъра на силата. Такова поле се нарича централно. Централната сила е потенциална. Наистина, централната сила може да се запише във вида $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, където $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, а \mathbf{r} е радиус-векторът на частицата спрямо центъра на силата. Тогава елементарната работа на силата е $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = F(r)dr$ и следователно $dA = -dU(r)$, където $U(r)$ е потенциалната енергия на частицата в силовото поле. Алтернативно, може да се покаже, че $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, откъдето също следва потенциалност на централната сила.

При движение в централно поле се запазва моментът на импулса спрямо центъра на полето. Наистина, от инвариантността на механичните свойства спрямо завъртане около всяка ос през центъра на силата, следва запазване на проекцията на момента на импулса върху тази ос, а с това и запазване и на самия момент на импулса, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$. Оттук следва, че \mathbf{r} и \mathbf{p} лежат в една и съща равнина, перпендикулярна на \mathbf{M} . С други думи, движението на частицата се извършва в равнина, минаваща през центъра на силата.

Въвеждаме полярни координати r и φ и записваме лагранжиана на частицата във вида

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Лагранжианът не съдържа в явен вид координатата φ , т.е. тя е циклична и съответният обобщен импулс се запазва

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}.$$

Обобщеният импулс p_φ съвпада с момента на импулса $M = M_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})_z$, което се показва с директно пресмятане на M в полярни координати. Запазването на момента на импулса позволява проста геометрична интерпретация. Наистина $(1/2)r^2 d\varphi$ е площта $d\sigma$ на сектора, описан от радиус-вектора за време dt . Скоростта на изменение на тази площ е площната скорост $\dot{\sigma} = (1/2)r^2\dot{\varphi}$. Сравняването на този израз с израза за момента на импулса дава $M = 2m\dot{\sigma}$. Следователно, в случая на централно поле законът за запазване на момента на импулса може да се изкаже и като закон за запазване на площната скорост. Самата площна скорост често се нарича интеграл на площите.

Пълното решение на задачата за движение на частица в централно поле може да се получи като се изходи от законите за запазване на енергията и на момента на импулса, без да се прибегва до самите уравнения на движението. Наистина, от $M = mr^2\dot{\varphi}$ следва $\dot{\varphi} = M/mr^2$ и законът за запазване на енергията може да се доведе до вида

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{mr^2} + U(r).$$

Оттук

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}$$

или интегрирайки чрез разделяне на променливите

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C_1.$$

След определяне на $r = r(t)$ от горното равенство, от $\dot{\varphi} = M/mr^2$, чрез интегриране по времето, намираме

$$\varphi = \int \frac{M}{mr^2} dt + C_2$$

Отбелязваме, че от $\dot{\varphi} > 0$ следва, че φ е строго монотонна функция. Двете уравнения дават закона за движение на частица в централно поле. Той съдържа четири константи: E, M, C_1, C_2 .

Уравнението на траекторията намираме чрез елиминирание на времето от закона за движението

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + C_1.$$

Интегрирането на изразите за закона за движението и уравнението на траекторията изискват конкретния вид на централното поле.

17. Характер на движението в централно поле. Условие за падане върху центъра на полето.

Да разгледаме отново движение на частица в силово поле, в което тя има потенциална енергия $U(r)$. Видяхме, че законът за движението и уравнението на траекторията могат да се намерят в интегрален вид, а пределянето им в явен вид зависи от конкретното централно поле. Някои заключения за характера на движението на частицата могат обаче да се направят независимо от вида на централно поле. За целта записваме енергията на частицата като $E = mr^2 / 2 + U_{eff}(r)$, където

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

Следователно, радиалната част на движението може да се разглежда като едномерно движение с ефективна потенциална енергия $U_{eff}(r)$. Величината $M^2 / 2mr^2$ се нарича центробежна енергия.

Границите на областта на движение се определят като корени на уравнението

$$E = U_{eff}(r).$$

За тези корени $\dot{r} = 0$, но те не са точки на спиране на движението, защото $\dot{\varphi} \neq 0$, а точки на обръщане на движението, в които \dot{r} сменя знак, а r преминава от нарастване към намаляване и обратно. Ако областта на изменение на r е ограничена само от условието $r \geq r_{min}$, то движението е инфинитно - траекторията идва от безкрайност и отива в безкрайност. Ако областта на изменениена r е определена от $r_{max} \geq r \geq r_{min}$, то движението е финитно - траекторията лежи в пръстен, ограничен от две окръжности с радиуси r_{min} и r_{max} .

Да намерим условието за затвореност на траекторията. За времето на изменение на r от r_{min} до r_{max} , радиус-векторът се обръща на ъгъл

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}.$$

Тогава условието за затвореност може да се запише като

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n},$$

където m и n са цели числа. В общия случай това условие не се изпълнява. Има само две полета, за които траекторията на финитното движение е затворена, като за тях $\Delta\varphi = 0$. Това са полета, в които $U \propto 1/r$ (гравитационно и електростатично полета) и $U \propto r^2$ (пространствен осцилатор).

Както споменахме, в точките на обръщане \dot{r} сменя знак. Ако отчитаме φ спрямо радиус-вектора на точка на обръщане, то частите на траекторията от двете страни на точката на обръщане при еднакви стойности на r ще се отличават със знака на φ . Следователно, траекторията е симетрична спрямо правите през центъра на полето и точките на обръщане. Това се отнася както за финитно, така и за инфинитно движение.

Наличието на центробежна енергия $M^2/2mr^2$, обръщаща се в безкрайност при $r \rightarrow 0$, обикновено прави невъзможно проникването на частиците до центъра на полето. "Падане" на частицата върху центъра на полето е възможно само, ако потенциалната енергия се стреми достатъчно бързо към $-\infty$ при $r \rightarrow 0$. От

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2 E > r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m}$$

следва, че r може да взема достатъчно малки стойности само при условието

$$-\frac{M^2}{2m} > r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0}.$$

С други думи, $U(r)$ трябва да се стреми към $-\infty$ при $r \rightarrow 0$ или като $-\alpha/r^2$ с $\alpha > M^2/2m$, или като $-1/r^n$ с $n > 2$.

18. Кеплерова задача. Уравнение на траекторията. Анализ на решението

Най-важен случай на централно поле са полета, в които частицата има потенциална енергия, обратно пропорционална на r и съответните сили са обратно пропорционални на r^2 . Към тях се отнасят гравитационното и електростатичното полета. Първите са полета на привличане, а вторите могат да бъдат полета на привличане или отблъскване.

Да разгледаме първо поле на привличане, в което $U(r) = -\alpha/r$ с $\alpha > 0$. Ефективната потенциална енергия е

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

При $r \rightarrow 0$, $U_{\text{eff}} \rightarrow \infty$; при $r \rightarrow \infty$, $U_{\text{eff}} \rightarrow 0$; при $r = M^2/\alpha m$, U_{eff} има минимум, равен на $-\alpha^2 m/2M^2 < 0$. При $E \geq 0$ движението е инфинитно, а при $E < 0$ движението е финитно.

Уравнението на траекторията намираме от формулата

$$\varphi = \pm \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + C$$

или

$$\varphi = \mp \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{2m\alpha}{M^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} + C.$$

След полагане

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}},$$

интегралът в дясната страна може да се преобразува до табличен интеграл

$$\varphi = \mp \int \frac{d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}} + C.$$

Използвайки, че $\int d\eta/\sqrt{1-\eta^2} = \arcsin \eta = \pi/2 - \arccos \eta$, и полагайки $C' = C \mp \pi/2$, намираме

$$\varphi = \pm \arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) + C'.$$

При $C' = 0$ уравнението на траекторията (орбитата) на частицата получаваме във вида

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Това е уравнение на конично сечение с фокус в началото на координатната система; p и ε се наричат параметър и эксцентрицитет на орбитата. Изборът $C' = 0$ отговаря на $\varphi = 0$ за най-близката до центъра на полето/фокуса точка на траекторията, т.нар. перихелий. Очевидно, перихелият е точка на обръщане и траекторията е симетрична спрямо правата през него и центъра на полето/фокуса, т.е. спрямо оста x .

При $E < 0$ имаме $\varepsilon < 1$, т.е. орбитата е елипса и движението е финитно. От аналитичната геометрия е известно, че голямата и малката полуоси на елипсата са

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Периодът на движение по елипса е удобно да се намери от закона за запазване на момента на импулса във вида "интеграл на площите" $M = 2m\dot{\sigma}$. След интегриране от 0 до периода T , получаваме $MT = 2m\sigma$, където площта на елипсата е $\sigma = \pi ab$. Следователно

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{ma^3}{\alpha}.$$

При $E \geq 0$ имаме $\varepsilon \geq 1$ и движението е инфинитно. При $E > 0$, $\varepsilon > 1$ и орбитата е хипербола: при това движение частицата има крайна скорост на безкрайност. При $E = 0$ имаме $\varepsilon = 1$ и орбитата е парабола: това движение се извършва от частица, която е била в покой на безкрайност.

Аналогично се разглежда и случаят на поле на отблъскване. Тогава движение е възможно само при $E > 0$ и $\varepsilon > 1$; то е инфинитно и се извършва по хипербола с уравнение

$$r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Отбелязваме, че на случаите на привличане и отблъскване отговарят две различни клонки на хиперболата.

19. Кеплерова задача. Закон за движението при движение по елипса. Вектор на Рунге-Ленц

Да разгледаме отново поле на привличане, в което частицата има потенциална енергия $U(r) = -\alpha/r$ с $\alpha > 0$, и да намерим закона за движение на частицата по елиптична орбита. За целта използваме формулата

$$t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + C.$$

Полагаме $C = 0$ и умножаваме двете страни на горното равенство с $\sqrt{mr^2/2|E|}$

$$t = \pm \int \frac{\sqrt{\frac{m}{2|E|}} r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}}.$$

Удобно е да въведем полуосите на елипсата $a = \alpha/2|E|$ и $b = M/\sqrt{2m|E|}$

$$t = \pm \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - b^2}}.$$

Накрая, предвид $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$, имаме

$$t = \pm \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (r - a)^2}}.$$

Тук полагаме $r - a = -a\varepsilon \cos \xi$ и получаваме

$$t = \pm \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi).$$

Знакът пред t избираме така, че t да нараства заедно с ξ , т.е. знак плюс. Изборът $C=0$ отговаря на частица в перихелия при $t=0$. Следователно, законът за движение в параметричен вид е

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \varepsilon \cos \xi), \\ t &= \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \varepsilon \sin \xi). \end{aligned}$$

Тук ξ се изменя от 0 до 2π , тъй като от $T = 2\pi\sqrt{ma^3/\alpha}$, виждаме, че такова изменение отговаря на пълно завъртане на частицата по траекторията.

При движение в поле, за което $U(r) = -\alpha/r$, съществува интеграл на движението, специфичен за това поле, т.нар. вектор на Рунге-Ленц. Лесно се проверява, че

$$\mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha}{r} \mathbf{r} = \text{const}.$$

Наистина, пълната производна по времето на лявата страна на този израз е

$$\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha}{r} \mathbf{v} - \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$$

или, замествайки с $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$,

$$m\mathbf{r}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha}{r} \mathbf{v} - \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}).$$

Накрая използваме уравнението на движението $m\dot{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$ и получаваме, че горният израз се обръща в нула тъждествено. Запазващият се вектор е насочен от фокуса към перихелия и има големина $\alpha\varepsilon$. Появата на този допълнителен интеграл на движението е свързана с т.нар. израждане на движението.

IV. УДАРИ НА ЧАСТИЦИ

20. Задача за двете тела

В предишна глава разгледахме движението на тяло в полето на силов център, който считаме за неподвижен. Това е допустимо само ако масата на този център превъзхожда многократно масата на частицата. В случая на сравними маси на частицата и центъра на силата е необходимо да се разгледа движението и на двете взаимодействащи частици, без да се предполага, че едната от тях е неподвижна.

И така, да разгледаме движението на две частици с маси m_1 и m_2 и взаимодействащи по закона на централни сили. В отсъствие на външни сили лагранжианът на такава система има вид

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|),$$

където \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 са радиус-векторите на частиците, $U(r)$ е потенциалната енергия на взаимодействието им, $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ е разстоянието между частиците. Да преминем към нови обобщени координати

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

където \mathbf{r} е радиус-векторът на взаимното положение на частиците, а \mathbf{R} е радиус-векторът на центъра на масата на частиците. Имаме

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2},$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2}.$$

Заместваме радиус-векторите и скоростите в лагранжиана и получаваме

$$L = \frac{m_1}{2} \left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 - U(r) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r).$$

Следователно лагранжианът може да се запише във вида

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r),$$

където $m = m_1 + m_2$ е общата маса на двете частици, а $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ е приведената маса на частиците. Лагранжианът не зависи от \mathbf{R} и следователно тази координата е циклична и

$$\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{R}} = \text{const}.$$

Следователно центърът на масата на двете частици се движи равномерно праволинейно. Уравнението на движението за относителното движение на частиците се извежда от съкратения лагранжиан

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r).$$

Той се отличава от лагранжиана на частица в поле $U(r)$ по това, че вместо масата на частицата, в него стои приведената маса. Следователно задачата за намиране на $\mathbf{r}(t)$ се решава като задача за движение в поле на неподвижен център, но за фиктивна частица с маса, равна на приведената маса на частиците. След решаване на тази задача, радиус-векторите \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 на частиците се определят от горните формули.

Спрямо отправна система, свързана с центъра на масата, радиус-векторите \mathbf{r}_{10} и \mathbf{r}_{20} на частиците са

$$\mathbf{r}_{10} = \frac{m_2}{m} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{20} = -\frac{m_1}{m} \mathbf{r},$$

т.е. двете частици се движат в една и съща равнина по подобни орбити: $r_{10}/r_{20} = m_2/m_1$, като във всеки момент се намират на срещуположни страни спрямо центъра на масата.

21. Разпад на частица на две частици

Законите за запазване на енергията и импулса позволяват да се направят заключения за свойствата на различни механични процеси. При това е съществено, че тези свойства съвсем не зависят от конкретния вид на взаимодействието между частиците, участващи в процеса.

Да започнем с процеса, представляващ самопроизволен (т.е. без външно въздействие) разпад на частица на две частици, движещи се след разпада независимо една от друга. Най-просто този процес изглежда в системата на центъра на масата (т.нар. ц-система), в която очевидно първичната частица е била в покой, а получените две частици се разлитат в противоположни посоки с равни по големина импулси \mathbf{p}_0 . Този импулс се определя от закона за запазване на енергията

$$E = E_1 + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_2 + \frac{p_0^2}{2m_2},$$

където E , E_1 и E_2 са вътрешните енергии на първичната частица и на двете получени частици. Енергията на разпада е

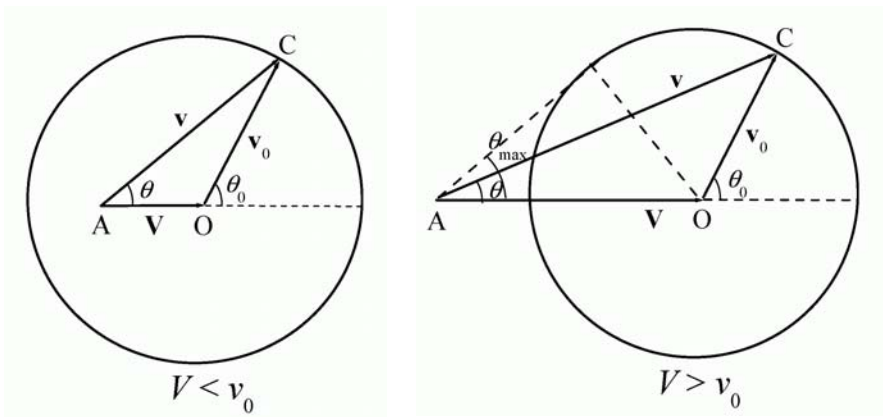
$$\varepsilon = E - E_1 - E_2 = \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} = \frac{p_0^2}{2\mu}.$$

Оттук се определя p_0 .

Да преминем към отправна система, с която първичната частица се е движила със скорост \mathbf{V} преди разпада. Такава система наричат обикновено лабораторна система (или л-система). Да разгледаме една от разпадните частици. Нека \mathbf{v} е скоростта и в л-системата, а \mathbf{v}_0 е скоростта и в ц-системата. Очевидно $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ и следователно

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2,$$

където θ е ъгълът на излитане спрямо посоката на \mathbf{V} . Това уравнение определя скоростта на разпадната частица като функция на ъгъла на излитане. Тя може да се представи графично с диаграмата на фигурата. Скоростта \mathbf{v} се дава с вектор от т. А до т. С на окръжност с радиус v_0 , а \mathbf{V} е вектор от т. А до центъра О на същата окръжност.



При $V < v_0$ частицата може да излети под произволен ъгъл. При $V > v_0$ тя може да излети само напред под ъгъл $\theta < \theta_{\max}$, където $\sin \theta_{\max} = v_0/V$. Връзката между ъглите на излитане θ и θ_0 в л-системата и ц-системата е очевидна от фигурите и се дава с

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + V}$$

или

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}.$$

При $V > v_0$ този израз дава две решения.

Във физичните приложения имаме работа с разпад не на една, а на много еднакви частици. Тогава възниква въпросът за намиране на разпределението на разпадните частици по посоки, енергии и т.н. При това ще предполагаме, че първичните частици са ориентирани хаотично в пространството, т.е. изотропно. Тогава, в ц-системата разпадните частици от един и същи вид ще имат еднаква енергия, а разпределението им по посоки на разлитане е изотропно. Това означава, че частта на частиците, излитащи в елемента на телесния ъгъл $d\Omega_0$

е пропорционална на този елемент, т.е. е равна на $d\Omega_0/4\pi$. Оттук, предвид $d\Omega_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$, получаваме разпределението по ъгли θ_0 като

$$(1/2)\sin \theta_0 d\theta_0.$$

Разпределението в л-системата намираме чрез преобразуване на този израз. Да определим, например, разпределението на разпадните частици по кинетични енергии в л-системата. Вдигайки на квадрат двете страни на $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$, намираме $v^2 = V^2 + v_0^2 + 2Vv_0 \cos \theta$, откъдето $(1/2)\sin \theta_0 d\theta_0$. Въвеждайки кинетичната енергия $T = mv^2/2$ (m е масата на коя да е от разпадните частици), намираме търсеното разпределение

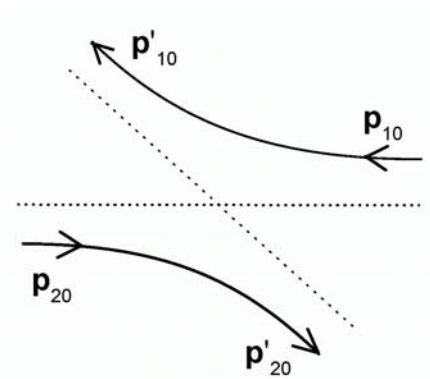
$$\frac{dT}{2mv_0V}.$$

Кинетичната енергия може да взема стойности от минимална стойност $T_{\min} = m(v_0 - V)^2/2$ до максимална стойност $T_{\max} = m(v_0 + V)^2/2$; получената формула показва, че в този интервал разпределението по кинетични енергии е хомогенно.

22. Удари на частици

Ще разглеждаме само еластични удари между частици. Ударът наричаме еластичен, ако не се съпровожда с изменение на вътрешното им състояние. Съответно, при прилагането на законите за запазване на енергията, вътрешната им енергия не се отчита.

Най-просто ударът изглежда в отправна система, в която центърът на масата на двете



частици е в покой (ц-система). Величините, отнесени към ц-системата ще означаваме с индекс "0". Скоростите преди удара \mathbf{v}_{10} и \mathbf{v}_{20} са свързани с $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ чрез (вж. задача за двете тела)

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}.$$

От законите за запазване на енергията и импулса

$$\frac{\mathbf{p}_{10}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_{20}^2}{2m_2} = \frac{\mathbf{p}'_{10}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_{20}^2}{2m_2}, \quad \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = \mathbf{p}'_{10} + \mathbf{p}'_{20} = \mathbf{0},$$

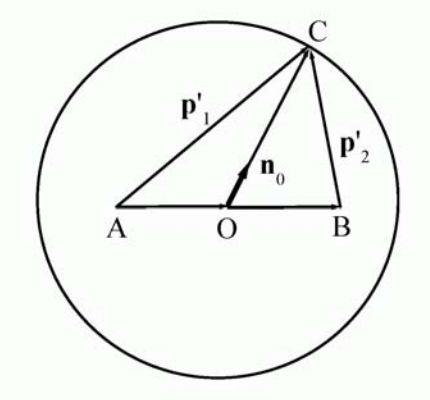
следва, че импулсите на двете частици след удара са равни по големина и противоположни по посока и запазват големината си (вж. фигурата). Следователно, резултатът от удара се свежда до завъртане на скоростите на двете частици като заедно с това се завърта и \mathbf{v} до $\mathbf{v}\mathbf{n}_0$, където \mathbf{n}_0 е единичният вектор на скоростта на първата частица след удара. Тогава

$$\mathbf{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \nu \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \nu \mathbf{n}_0.$$

Скоростите на частиците в лабораторната система (л-система) след удара са

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \nu \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \nu \mathbf{n}_0 + \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

С това се изчерпват сведенията, които можем да получим за удара, изхождайки само от законите за запазване на импулса и енергията. Що се отнася до посоката на \mathbf{n}_0 , тя зависи от закона на взаимодействие и взаимното разположение на частиците преди удара.



Удобно е да илюстрираме получените резултати графично (фиг.). При това е удобно да преинемем от скорости към импулси. Имаме

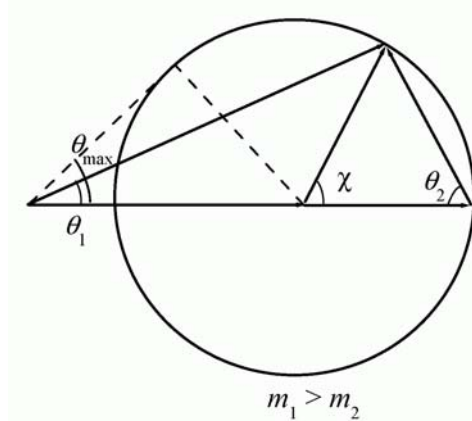
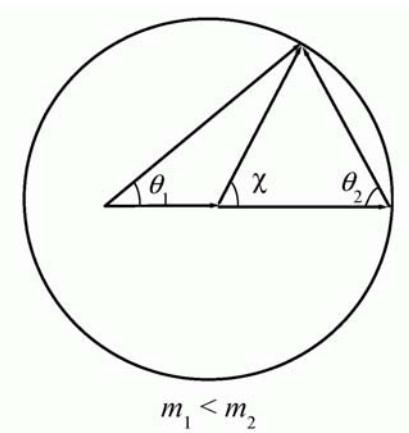
$$\mathbf{p}'_1 = \mu \nu \mathbf{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}'_2 = -\mu \nu \mathbf{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2).$$

Да построим окръжност с радиус $\mu \nu$ и начертаем вектора \mathbf{n}_0 (от центъра към т. С). Тогава $\mathbf{p}'_1 = \overline{AC}$ и $\mathbf{p}'_2 = \overline{BC}$ имаме

$$m_1 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / (m_1 + m_2) = \overline{AO}, \quad m_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / (m_1 + m_2) = \overline{OB}.$$

При дадени \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 , т. А и т. В са неизменни, а т. С може да има произволно положение върху окръжността.

Да разгледаме по-подробно случая, когато една от частиците (напр. втората частица) е била в покой в л-системата преди удара. Тогава $OB = m_2 p_1 / (m_1 + m_2) = \mu \nu$ съвпада с радиуса на



окръжността, а $AB = p_1$ - импулса на първата частица преди удара. На фигурите вляво са показани: χ - ъгъл на завъртане на първата частица в ц-системата, θ_1 и θ_2 - ъгли на завъртане на първата и

втората частици след удара спрямо посоката на първата частица преди удара. От тези фигури се вижда, че θ_1 и θ_2 могат да се изразят чрез χ по формулите

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

Сумата $\theta_1 + \theta_2$ е ъгълът на разлитане след удара; очевидно, че при $m_1 < m_2$, $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$, а при $m_1 > m_2$, $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$. Големината на скоростите на двете частици след удара са

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}.$$

От фигурите е ясно, че при $m_1 < m_2$, скоростта v_1' може да има произволна посока; при $m_1 > m_2$, скоростта v_1' има посока, ограничена от ъгъл θ_{\max} , където $\sin \theta_{\max} = m_2 / m_1$.

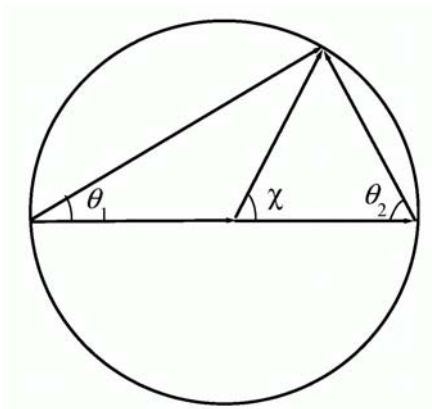
Да разгледаме случая, когато преди удара втората частица е била в покой в л-системата, а след удара двете частици се движат по една права (т.нар. челен удар), т.е. $\chi = \pi$ (в ц-системата преди удара двете частици се движат една срещу друга, а след удара те се отдалечават една от друга); имаме

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Очевидно е, че при $m_1 < m_2$, v_1' и v_2' са противоположни, а при $m_1 > m_2$, v_1' и v_2' еднопосочни. При това големината на v_2' е най-голямата възможна; максималната кинетична енергия, която може да се получи от първоначално покояща се частица следователно е

$$E_{2\max}' = \frac{m_2 v_{2\max}'^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} E_1,$$

където $E_1 = m_1 v_1^2 / 2$ е енергията на налитащата частица.



Да разгледаме случая, когато преди удара втората частица е била в покой в л-системата, и нека двете частици са с еднакви маси. Тогава т. А лежи на окръжността (фиг.) и следователно

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2},$$

$$v_1' = v \cos \frac{\chi}{2}, \quad v_2' = v \sin \frac{\chi}{2}.$$

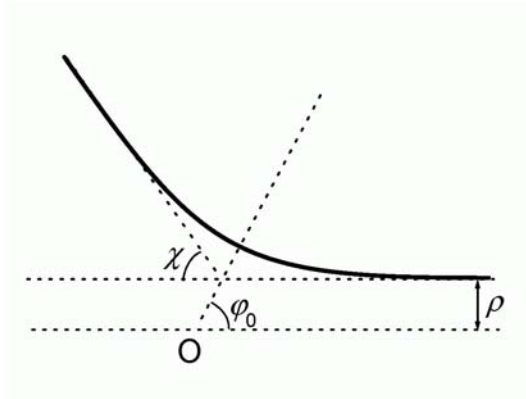
Отбелязваме, че частиците се разлитат под прав ъгъл.

23. Разсейване на частици

Видяхме, че пълното определяне на резултата от удара на две частици изисква намирането на ъгъла χ , който дава изменението на посоката на относителната скорост на едната частица спрямо другата. Тази скорост съвпада със скоростта на движение на частица с

маса μ в полето $U(r)$ на неподвижен силов център, разположен в центъра на масата на двете частици. Ето защо, намирането на ъгъла χ се свежда до решаване на задачата за движение на частица в полето на неподвижен център.

Решаването на тази задача беше разгледано в предишна лекция. Беше показано, че траекторията е симетрична спрямо правата през най-близката до силовия център O точка и



самия силов център (вж. фиг.). Това означава, че асимптотите на орбитата ще пресичат тази права под равни ъгли. Да означим тези ъгли с φ_0 ; тогава ъгълът χ на отклонение на частицата при прелитане покрай силовия център е

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|,$$

а ъгълът φ_0 се определя от интеграла

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}},$$

където r_{\min} е корен на израза под квадратния корен. При инфинитно движение, с което ще се занимаваме, удобно е вместо константите E и M да се въведат други - скоростта v_{∞} на частицата на безкрайност и прицелното разстояние ρ . Предвид $E = \mu v_{\infty}^2 / 2$ и $M = \mu \rho v_{\infty}$, получаваме

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{\mu v_{\infty}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Тази формула, заедно с формулата за χ , определя зависимостта $\chi(\rho)$.

Във физични приложения обикновено имаме работа не с единичен процес на отклонение на частица, а на т.нар. разсейване на цял сноп от еднакви частици, падащи върху разсейващ център с еднакви скорости v_{∞} . Различните частици на снопа имат различно прицелно разстояние и съответно се разсейват под различни ъгли χ . Да означим с dN броят на частиците, разсейвани в единица време на ъгли в интервала $[\chi, \chi + d\chi]$. За да характеризираме процеса на разсейване, разделяме dN на плътността на потока n на падащия сноп и въвеждаме отношението

$$d\sigma = \frac{dN}{n}.$$

Тази величина има размерност на площ и се нарича ефективно сечение на разсейването. Тя се определя изцяло от вида на разсейващия център и е важна характеристика на процеса на разсейване.

Ще считаме, че връзката $\chi(\rho)$ е взаимно еднозначна; тогава в интервала $[\chi, \chi + d\chi]$ се разсейват само тези частици, които летят с прицелно разстояние $[\rho(\chi), \rho(\chi) + d\rho(\chi)]$. Броят на такива частици е равен на площта на пръстена с радиуси ρ и $\rho + d\rho$, умножена на n : $dN = 2\pi\rho d\rho n$. Затова, ефективното сечение на разсейването е

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi.$$

Абсолютната стойност е написана, защото производната може да е отрицателна, както често се случва. Да въведем елемента на телесния ъгъл между конуси с ъгли на разтвора χ и $\chi + d\chi$: $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$; тогава

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega.$$

Връщайки се към фактичката задача за разсейване на сноп частици не на неподвижен център, а на други, първоначално покоящи се частици, можем да кажем, че формулата по-горе дава ефективното сечение в зависимост от ъгъла на разсейване в системата на центъра на масата. За намиране на ефективното сечение в зависимост от ъгъла на разсейване θ в лабораторната система, трябва да изразим χ чрез θ . При това се получават изрази както за сечението на разсейването на падащия сноп, така и за частиците, които първоначално са били в покой.

24. Формула на Ръдърфорд

Едно от важните приложения на получените формули за движение в централно поле е разсейването на заредени частици в електростатично поле на зареден център $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$ за привличане и $\alpha < 0$ за отблъскване). За ъгъла между радиус-вектора в безкрайност и този на най-близката до центъра на силата точка (перихелия) имаме

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}.$$

Въвеждаме скоростта v_{∞} и прицелното разстояние ρ чрез изразите

$$E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}, \quad M = \mu \rho v_\infty$$

и преобразуваме израза φ_0 до вида

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r} dr}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Резултатът от интегрирането вече е известен

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

където

$$p = \frac{M^2}{\mu \alpha} = \frac{\mu \rho^2 v_\infty^2}{\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu \alpha^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 \rho}{\alpha}\right)^2}.$$

На безкрайност, $\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi = 0$ и следователно

$$\cos \varphi_0 = \mp \frac{1}{\varepsilon} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 \rho}{\alpha}\right)^2}} \quad \text{или} \quad \rho^2 = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \operatorname{tg} \varphi_0\right)^2$$

Предвид $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ и $\operatorname{tg}(\pi - \chi)/2 = \operatorname{ctg}(\chi/2)$, получаваме

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}\right)^2.$$

Диференцираме това равенство по χ

$$2\rho d\rho = \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 2 \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} d \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = -\left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \frac{d\chi}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}.$$

Тогава за диференциалното сечение на разсейването получаваме

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi$$

или

$$d\sigma = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Това съотношение се нарича формула на Ръдърфорд. Отбелязваме, че разсейването не зависи от знака на α и следователно е в сила както за привличане, така и за отблъскване. Освен това разсейването е анизотропно - сечението е по-голямо при по-малки ъгли.

Получената формула е в сила за разсейване на заредени частици от неподвижен силов център. Имайки предвид, че разсейването се дължи на други заредени частици, то можем да кажем, че тази формула е в сила в системата на центъра на масата. За да намерим сечението на разсейване в лабораторната система (т.е. във всяка друга система), трябва да използваме връзката между ъглите на отклонение на налитания заряд в системата на центъра на масата χ и в лабораторната система θ_1 (или θ_2).

V. ТРЕПТЕНИЯ

25. Собствени трептения на система с една степен на свобода

Да разгледаме система с наложени стационарни холономни идеални връзки, в която действат стационарни потенциални сили и дисипативни сили, пропорционални на скоростта. Нека системата има една степен на свобода, която се описва с обобщена координата q . От стационарността на наложените връзки следва, че връзката между радиус-векторите на частиците и обобщената координата не съдържа времето в явен вид. Тогава кинетичната енергия $T = T(q, \dot{q})$ и дисипативната функция $D = D(q, \dot{q})$ са квадратични форми по \dot{q}

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad D = \frac{1}{2}b(q)\dot{q}^2,$$

а потенциалната енергия е $U = U(q)$. Предполагаме, че системата има поне едно положение на равновесие q_0 . Необходимото и достатъчно условие за това се дава от принципа на виртуалната работа: за система в равновесие виртуалната работа на силите е нула. От $\delta A = Q\delta q = 0$, следва $Q = 0$. Имаме $Q = Q^p + Q^d = -\partial U / \partial q - \partial D / \partial \dot{q} = -\partial U / \partial q - b(q)\dot{q} = 0$. В равновесие $(\dot{q})_0 = 0$, откъдето следва $(\partial U / \partial q)_0 = 0$. По-нататък ще разглеждаме само положения на устойчиво равновесие, условието за които е

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right)_0 > 0.$$

Да разложим T , D и U в ред по степените на $\xi = q - q_0$ и $\dot{\xi} = \dot{q} - \dot{q}_0 = \dot{q}$ до втора степен включително

$$T = \frac{1}{2}a\xi^2, \quad D = \frac{1}{2}b\dot{\xi}^2, \quad U = \frac{1}{2}c\xi^2,$$

където $a \equiv a(q_0)$, $b \equiv b(q_0)$, $c = (\partial^2 U / \partial q^2)_0$. С помощта на тези изрази получаваме приближеното (или линеаризирано) уравнение на Лагранж в околност на положението на равновесие

$$a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = 0.$$

Система, чието движение се описва от такова уравнение, се нарича линеен осцилатор. Решенията на това уравнение се наричат собствени трептения на линейния осцилатор.

Търсим решение на горното уравнение във вида $\xi \propto \exp(\lambda t)$. Заместваме ξ в уравнението и получаваме характеристичното уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \text{ или } \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

където $\mu = b/2a$ и $\omega_0^2 = c/a$. Решенията на това уравнение са

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega \text{ с } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Общото решение е линейна комбинация на двете частни решения $\exp(\lambda_1 t)$ и $\exp(\lambda_2 t)$

$$\xi = \operatorname{Re}\{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\}.$$

Да направим анализ на това решение:

При $\mu < \omega_0$, имаме $\xi = e^{-\mu t} \operatorname{Re}\{C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\} = A e^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha)$. Това решение описва затихващи хармонични трептения на системата; ω се нарича собствена честота на трептенията, а μ се нарича коефициент на затихване на трептенията. За характеризиране на затихващи трептения, вместо μ , често се въвежда безразмерната величина $\theta = \mu T$, където $T = 2\pi/\omega$ е периодът на трептенията; θ се нарича логаритмичен декремент на затихването. Очевидно е, че за един период T амплитудата на трептенията $A e^{-\mu t}$ ще намалее $e^{\mu T}$ пъти, т.е. логаритъмът на амплитудата ще намалее θ пъти. Накрая, при отсъствие на дисипативни сили, енергията на системата е $E = (a\dot{\xi}^2 + c\xi^2)/2 = a(\dot{\xi}^2 + \omega_0^2 \xi^2)/2 = a\omega_0^2 A^2/2 = \text{const}$.

При $\mu > \omega_0$, имаме $\xi = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}$, където $\mu_{1,2} = -\lambda_{1,2}$, а $C_{1,2}$ са реални. Това решение описва апериодично движение на системата.

26. Принудени трептения на система с една степен на свобода

Да разгледаме система с наложени идеални стационарни холономни връзки, в която действат стационарни потенциални сили и дисипативни сили, пропорционални на скоростта. Да предположим, че върху системата действат и нестационарни сили. За простота ще предположим, че тези сили зависят от времето като $f_0 \cos \Omega t$ с кръгова честота Ω . За системи с една степен на свобода, линейризираното уравнение на Лагранж е

$$a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = f_0 \cos \Omega t.$$

Записваме това уравнение като

$$a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi = f_0 \exp i\Omega t \text{ или } \ddot{\xi} + 2\mu\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{f_0}{a} \exp i\Omega t.$$

Общото уравнение на това уравнение е сума от общото решение на хомогенното уравнение и едно частно решение на нехомогенното уравнение. Търсим това частно решение във вида $\xi_1 = C \exp i(\Omega t + \varphi)$ с реално C . Заместваме ξ_1 в горното уравнение и получаваме

$$(-\Omega^2 + 2i\mu\Omega + \omega_0^2)C \exp i(\Omega t + \varphi) = \frac{f_0}{a} \exp i\Omega t,$$

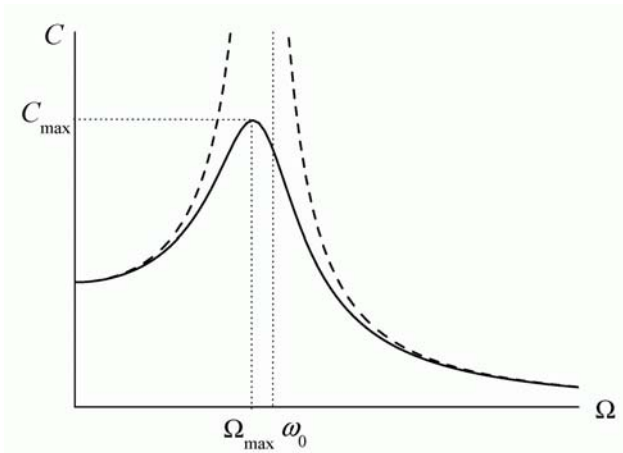
откъдето

$$C \exp i\varphi = \frac{f_0/a}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\mu\Omega} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\mu\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2} f_0/a$$

или

$$C \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2} f_0/a, \quad C \sin \varphi = \frac{-2\mu\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2} f_0/a.$$

Окончателно намираме



$$C = \frac{f_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\mu\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

(виж. фиг.). Следователно, общото решение на нехомогенното уравнение е

$$\xi = Ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \alpha) + C(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)).$$

Това решение показва, че наред със собствените трептения, системата извършва и т.нар. принудени трептения, чиято амплитуда

и фаза спрямо собствените трептения зависят от честотата Ω на принуждаващата сила. Ясно

е, че амплитудата на собствените трептения ще намалява бързо с времето и затова е достатъчно да разгледаме само члена, описващ принудените трептения.

Да разгледаме амплитудата $C(\Omega)$

(т.нар. резонансна крива): при $\Omega = 0$,

$$C = f_0/a\omega_0^2; \quad \text{при } \Omega = \omega_0, \quad C = f_0/2\mu a\omega_0; \quad \text{при}$$

$\Omega \rightarrow \infty, C \rightarrow 0$; $C(\Omega)$ има максимум C_{\max} при Ω_{\max} , която се определя от $dC/d\Omega = 0$.

$$\text{Получаваме } C_{\max} = (f_0/2\mu a)/\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \quad \text{при } \Omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\mu^2}.$$

Да разгледаме фазата $\varphi(\Omega)$: при $\Omega = 0, \varphi = 0$; при $\Omega = \omega_0, \varphi = -\pi/2$; при $\Omega \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -\pi$.

Очевидно е, че в случая на слабо затихване μ , при $\Omega = \Omega_{\max}$ става рязко нарастване на амплитудата на принудените трептения. Това явление се нарича резонанс. За характеризиране на осцилатора по отношение на резонансните му свойства обикновено въвеждат т.нар. качествен фактор $Q = \omega_0/2\mu$. Предвид това, че при слабо затихване

логаритмичният декремент на затихването е $\theta = \mu T = 2\pi\mu/\omega \approx 2\pi\mu/\omega_0$, намираме връзката $Q = \pi/\theta$. С използване на получените по-горе формули може да се покаже, че $Q = C(\omega_0)/C(0)$.

Качественият фактор е свързан с ширината на резонансната крива. Наистина, да намерим $\Omega_{1,2}$, за които $C^2/C_{\max}^2 = 1/2$. Имаме

$$\frac{C^2}{C_{\max}^2} = \frac{4\mu^2(\omega_0^2 - \mu^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2} = \frac{1}{2}$$

или

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2\Omega^2 - 8\mu^2(\omega_0^2 - \mu^2) = 0.$$

Това уравнение преписваме като

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2(\Omega^2 - \omega_0^2) - 4\mu^2(\omega_0^2 - 2\mu^2) = 0.$$

Решението на това уравнение е

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)_{1,2} = -2\mu^2 \pm \sqrt{4\mu^4 + 4\mu^2(\omega_0^2 - 2\mu^2)} \approx -2\mu^2 \pm 2\mu\omega_0.$$

Следователно,

$$\Omega_1^2 - \Omega_2^2 = 4\mu\omega_0.$$

Тук $(\Omega_1 - \Omega_2)(\Omega_1 + \Omega_2) = \Delta\Omega 2\bar{\Omega}$, където $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ е ширината на резонансната крива, а $\bar{\Omega} = (\Omega_1 + \Omega_2)/2 \approx \Omega_{\max} \approx \omega_0$. Тогава

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{\max}} = \frac{2\mu\omega_0}{\Omega_{\max}^2} \approx \frac{2\mu}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Следователно, относителната ширина на резонансната крива е обратнопропорционална на качествения фактор.

27. Собствени трептения на система с s степени на свобода:

собствени честоти

Да разгледаме система с наложени идеални стационарни холономни връзки, в която действат стационарни потенциални сили и дисипативни сили, пропорционални на скоростта.

Нека системата има s степени на свобода, описвани от обобщените координати q_1, q_2, \dots, q_s .

Нека $q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}_0$ е положение на устойчиво равновесие на системата, т.е

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad \text{и} \quad \sum_{j,k=1}^s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 \xi_j \xi_k$$

е положително дефинитна форма на отклоненията $\xi_j = q_j - q_{j0}$ от равновесие. Разлагаме кинетичната енергия, дисипативната функция и потенциалната енергия в ред по степените на ξ_j и $\dot{\xi}_j$. С точност до втора степен включително получаваме

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k, \quad D = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s b_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s c_{jk} \xi_j \xi_k,$$

където $a_{jk} \equiv a_{jk}(q_0)$, $b_{jk} \equiv b_{jk}(q_0)$, $c_{jk} = \left(\partial^2 U / \partial q_j \partial q_k \right)_0$ са реални симетрични матрици. Изразите за T , D , и U са положително дефинитни квадратични форми. Използваме тези формули, за да получим приближените (или линеаризирани) уравнения на Лагранж в околност на q_0

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{\xi}_k + b_{jk} \dot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k) = 0, \quad j=1,2,\dots,s,$$

представляващи система от s линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти.

Да разгледаме случая на система без дисипативни сили. Тогава линеаризираните уравнения на Лагранж са

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{\xi}_k + c_{jk} \xi_k) = 0, \quad j=1,2,\dots,s.$$

Търсим решение във вида $\xi_k = C_k \exp i\omega t$ с комплексни амплитуди C_k . Заместваем ξ_k в уравненията на Лагранж и получаваме системата от s линейни хомогенни алгебрични уравнения за C_k

$$\sum_{k=1}^s (-\omega^2 a_{jk} + c_{jk}) C_k = 0, \quad j=1,2,\dots,s.$$

Тази система уравнения има нетривиално решение за C_k при анулиране на детерминантата от коефициентите, т.е. при

$$|-\omega^2 a_{jk} + c_{jk}| = 0.$$

В развит вид тази детерминанта е алгебрично уравнение от s -та степен спрямо ω^2 , което се нарича характеристично (или секулярно) уравнение. То има корени ω_α^2 , $\alpha=1,2,\dots,s$.

Решенията ω_α^2 са реални и положителни, т.е. ω_α са реални. Това следва от чисто физически съображения. Наистина, наличието на имагинерна част у ω_α би означавало експоненциално нарастващ или намаляващ множител; но това би довело до изменение с времето на пълната енергия на системата, в противоречие със закона за запазване на енергията. В положителността на ω_α^2 можем да се убедим и по математичен път. Наистина, да умножим системата линейни уравнения с C_j^* и сумираме по j . Получаваме

$\sum(-\omega^2 a_{jk} + c_{jk})C_j^* C_k = 0$, откъдето $\omega^2 = \sum c_{jk} C_j^* C_k / \sum a_{jk} C_j^* C_k$. С използване на $c_{jk} = c_{kj}$,

намираме, че квадратичните форми в числителя и знаменателя са реални:

$$\left(\sum c_{jk} C_j^* C_k\right)^* = \sum c_{jk} C_j C_k^* = \sum c_{kj} C_k C_j^* = \sum c_{jk} C_k C_j^*,$$

и, че тези форми са суми от две положително дефинитни форми

$$\sum c_{jk} C_j^* C_k = \sum c_{jk} (\alpha_j - i\beta_j)(\alpha_k + i\beta_k) = \sum c_{jk} (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k).$$

Следователно $\omega_\alpha^2 > 0$.

28. Собствени трептения на система с s степени на свобода: собствени вектори. Нормални трептения

И така, за система с наложени идеални стационарни холономни връзки, в която действат стационарни потенциални сили и дисипативни сили, пропорционални на скоростта, и която има s степени на свобода, описвани от обобщените координати q_1, q_2, \dots, q_s , сведохме решаването на уравненията на Лагранж до система от s линейни хомогенни алгебрични уравнения. Да предположим, че сме намерили ω_α^2 , $\alpha = 1, 2, \dots, s$, като решения на характеристичното уравнение. Да разгледаме случая, когато всички ω_α^2 са различни. Тъй като търсим нетривиално решение за амплитудите C_k , то измежду решенията C_k^α трябва да има отлични от нула. Без ограничение на общността можем да считаме, че $C_s^\alpha \neq 0$. Тогава пренасяме членовете $(-\omega_\alpha^2 a_{js} + c_{js})C_s^\alpha$ в дясната страна на системата алгебрични уравнения и получаваме съгласно правилото за решаване на линейни уравнение (правило на Крамер)

$$C_k^\alpha = \frac{\Delta_{ks}^\alpha}{\Delta_{ss}^\alpha} C_s^\alpha.$$

Тук Δ_{ks}^α и Δ_{ss}^α са адюнгираните количества на елементите ks и ss на матрицата от коефициенти на C_k . Тъй като C_s^α са неопределени, то въвеждайки означението $C_\alpha = C_s^\alpha / \Delta_{ss}^\alpha$ и $\Delta_k^\alpha \equiv \Delta_{ks}^\alpha$, всички амплитуди могат да се представят във вида

$$C_k^\alpha = \Delta_k^\alpha C_\alpha.$$

Общото решение на системата линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения записваме като

$$\xi_k = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s (C_k^{\alpha+} e^{i\omega_\alpha t} + C_k^{\alpha-} e^{-i\omega_\alpha t}) = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^s (\Delta_k^{\alpha+} C_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha t} + \Delta_k^{\alpha-} C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t}).$$

Предвид $\Delta_k^{\alpha+} = \Delta_k^{\alpha-} \equiv \Delta_k^{\alpha\pm}$ (тъй като $\Delta_k^{\alpha\pm}$ не зависят от знака на ω_α^2), намираме

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k^\alpha \operatorname{Re} \left(C_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \right)$$

или

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^s \Delta_k^\alpha \theta_\alpha,$$

където

$$\theta_\alpha = \operatorname{Re} \left(C_\alpha^+ e^{i\omega_\alpha t} + C_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t} \right) = A_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha).$$

Следователно, трептенията на системата, описвана от обобщените координати $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, представляват наслагване на хармонични трептения с честоти ω_α . По приетата терминология, ω_α се наричат собствени честоти на системата, а съответните C_k^α се наричат собствени вектори. Трептенията, съответстващи на ω_α и C_k^α се наричат собствени трептения.

От линейната зависимост между ξ_k и θ_α можем да определим θ_α чрез ξ_k и да въведем θ_α като нови обобщени координати. Те се наричат нормални (или главни) координати, защото удовлетворяват отделни уравнения на движението, а лагранжианът на системата се разпада на сума от лагранжиани, съответстващи на отделните θ_α . Наистина, θ_α удовлетворяват независимите уравнения

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

които са уравненията на Лагранж в нормални координати. Освен това, лагранжианът на системата в нормални координати, получен след заместване на ξ_k с θ_α , се получава във вида

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s m_\alpha (\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2) = \sum_{\alpha=1}^s L_\alpha,$$

където m_α са положителни константи, а $L_\alpha = m_\alpha (\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2)/2$ е частта от лагранжиана, отнасяща се до координатата θ_α . Този вид на лагранжиана води до разпадане на системата уравнения на Лагранж до независими уравнения за отделните θ_α . Отбелязваме, че от математическа гледна точка, с преобразованието $\xi_k \rightarrow \theta_\alpha$ едновременно се диагонализират квадратичните форми на кинетичната и потенциалната енергии.

Обикновено нормалните координати се избират така, че коефициентите при $\dot{\theta}_\alpha^2$ в лагранжиана да са $1/2$. Затова е достатъчно нормалните координати да се дефинират с равенството $Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \theta_\alpha$. Тогава

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

В случая на кратни корени ω_α^2 общият вид на решението е същият.

VI. ДВИЖЕНИЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО

29. Кинематика на твърдо тяло

Твърдо тяло (или просто тяло) дефинираме като система от материални точки, разстоянията между които са постоянни. За описание на движението на тялото въвеждаме две отправни системи: "неподвижна", т.е. инерциална отправна система S с начало O , и движеща се отправна система S' с начало O' , която е неподвижно свързана с твърдото тяло и участва във всички негови движения. Положението на тялото спрямо S напълно се определя със задаване на положението на S' , т.е със задаване на радиус-вектора \mathbf{R} на началото O' и на три независими ъгъла на ориентация на осите на S' спрямо осите на S . Така всяко свободно тяло има 6 степени на свобода.

Положението на произволна точка от тялото се задава с радиус-векторите \mathbf{r} спрямо S и \mathbf{r}' спрямо S' , между които съществува следната връзка

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'.$$

Скоростите на точка от тялото \mathbf{v} спрямо S и \mathbf{v}' спрямо S' са свързани помежду си чрез скоростта \mathbf{V} на O' спрямо O и ъгловата скорост на въртене $\boldsymbol{\omega}$ на тялото като цяло спрямо S

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Спрямо друго начало \tilde{O}' на движещата се система, отместено на вектор \mathbf{a} спрямо O' имаме

$$\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}}' + \mathbf{a}$$

и

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\tilde{\mathbf{r}}' + \mathbf{a}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}'.$$

От друга страна

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}}'.$$

Сравняваме двете страни на последните две равенства и намираме, че

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}.$$

Последното равенство показва, че ъгловата скорост на въртене на тялото не зависи от избора на движещата се система; всички такива системи в даден момент се въртят около успоредни оси с еднакви ъглови скорости. Това обстоятелство дава право да наречем $\boldsymbol{\omega}$ ъглова скорост на тялото. Скоростта на постъпателно движение \mathbf{V} няма такъв абсолютен характер.

От формулата, свързваща скоростите на точки от тялото в двете системи, можем да направим следните заключения за движението на тялото:

- ако \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$ в даден момент са взаимно перпендикулярни при дадено начало O' , то те са взаимно перпендикулярни и при всяко друго начало \tilde{O}' . Наистина

$$\tilde{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

т.е. от $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, следва $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Тогава, от $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, следва, че скоростите на точките от тялото лежат в равнини, перпендикулярни на $\boldsymbol{\omega}$. При това винаги може да се избере такова начало O' , за което $\mathbf{V} = 0$ така, че движението на тялото в дадения момент да е чисто въртене около ос през O' . Такава ос на въртене се нарича моментна ос на въртене на тялото. Наистина, $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ при условие $\mathbf{V} \perp \boldsymbol{\omega}$ винаги има решение за \mathbf{a} . Такъв вектор \mathbf{a} очевидно е перпендикулярен на \mathbf{V} така, че $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ да е вектор, колинеарен с \mathbf{V} .

- ако \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$ в даден момент не са взаимно перпендикулярни при дадено начало O' , то началото на движещата се система може да се избере така, че \mathbf{V} и $\boldsymbol{\omega}$ в дадения момент да са колинеарни, т.е. движението в този момент да е съвкупност от въртене около някаква ос и постъпателно движение по тази ос. Наистина, представяме \mathbf{V} като сума от перпендикулярна и паралелна компоненти, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$. За първата компонента може да се избере такова начало на движещата се система, за което перпендикулярната компонента на \mathbf{V} да се анулира, т.е. $\tilde{\mathbf{V}}_\perp = \mathbf{V}_\perp + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Тогава, оставащата компонента на \mathbf{V} ще е паралелна на $\boldsymbol{\omega}$.

30. Кинетична енергия на твърдо тяло

Да поместим началото O' на движещата се отправна система S' в центъра на масата на тялото. Тогава кинетичната енергия на тялото е

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V^2 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2.$$

Да въведем означението $m = \sum_{i=1}^N m_i$ за масата на тялото. Тогава, предвид $\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i / m = \mathbf{0}$, намираме

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \equiv \frac{1}{2} m V^2 + T'.$$

Следователно, кинетичната енергия на тялото е сума от кинетичната енергия на постъпателно движение на тялото и кинетична енергия T' на въртеливо движение на тялото като цяло. Такова разделяне е възможно само при начало O' в центъра на масата на тялото.

Да разгледаме по-подробно кинетичната енергия на въртене T'

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\omega^2 r_i'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_i)^2]$$

или чрез компонентите в правоъгълна декартова координатна система $O'x'_1x'_2x'_3$

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha x'_{i\alpha} \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta x'_{i\beta} \right] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right] \right\}.$$

Следователно

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta,$$

където

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right]$$

или, преминавайки към непрекъснатото разпределение на масата с плътност $\rho(\mathbf{r}')$,

$$I_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}') \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma^2 - x'_\alpha x'_\beta \right] dV.$$

Тензорът $I_{\alpha\beta}$ се нарича тензор на инерчните моменти (или тензор на инерция, инерчен тензор) на тялото. От определението му е ясно, че той има свойството адитивност, т.е. инерчният тензор на тялото е сума от инерчните моменти на частите му. Инерчният тензор е симетричен, $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$. По компоненти, той изглежда така (индексът i е пропуснат навсякъде за опростяване на записа)

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum m(x_2'^2 + x_3'^2) & -\sum mx_1'x_2' & -\sum mx_1'x_3' \\ -\sum mx_1'x_2' & \sum m(x_1'^2 + x_3'^2) & -\sum mx_2'x_3' \\ -\sum mx_1'x_3' & -\sum mx_2'x_3' & \sum m(x_1'^2 + x_2'^2) \end{pmatrix}.$$

Както всеки симетричен тензор, инерчният тензор може да бъде диагонализиран чрез подходящо завъртане на $O'x_1'x_2'x_3'$ до $O'X_1'X_2'X_3'$, където X_1', X_2', X_3' са главните оси на тензора. Тогава $I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} I_\beta$, където I_1, I_2, I_3 са главните стойности на тензора (т.нар. главни инерчни моменти) и следователно

$$T' = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Различават следните случаи:

- ако $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, то тялото се нарича асиметрично;
- ако $I_1 = I_2 \neq I_3$, то тялото се нарича симетрично;
- ако $I_1 = I_2 = I_3$, то тялото се нарича сферично;

За главните инерчни моменти се показва, че никой от тях не може да надвишава сумата на другите два. Имаме, например, $I_1 + I_2 = \sum m(x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_3'^2) \geq \sum m(x_1'^2 + x_2'^2) = I_3$. В следните частни случаи, за главните инерчни моменти непосредствено се получава, че:

- за плоско асиметрично тяло (пластина с произволна форма): $I_1 \neq I_2$, $I_1 + I_2 = I_3$;
- за плоско симетрично тяло (диск): $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3$;
- за ротор (две материални точки, съединени с твърда връзка): $I_1 = I_2$, $I_3 = 0$.

31. Момент на импулса на твърдо тяло. Уравнения на движението на твърдо тяло

Да поместим началото O' на движещата се отправна система S' в центъра на масата на тялото и да намерим момента на импулса му

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{V} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \end{aligned}$$

Въвеждаме масата на тялото $m = \sum_{i=1}^N m_i$ и импулса на тялото $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$. Тогава, предвид

$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i / m = 0$, получаваме

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{M}'.$$

Следователно, моментът на импулса е сума от момента на импулса на центъра на масата спрямо началото на неподвижната система и момента на импулса спрямо началото на движещата се система, разположено в центъра на масата. Такова представяне е възможно само при O' в центъра на масата на тялото.

Да разгледаме по-подробно члена \mathbf{M}' в израза за момента на импулса

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i \left[\boldsymbol{\omega} r_i'^2 - \mathbf{r}'_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_i) \right]$$

или чрез компонентите в правоъгълна декартова координатна система

$$M'_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \left[\omega_\alpha \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}'^2 - x'_{i\alpha} \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta x'_{i\beta} \right] = \sum_{\beta=1}^3 \omega_\beta \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left[\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}'^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right] \right\} = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\beta.$$

Следователно,

$$M'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \omega_\beta.$$

Да намерим уравненията на движението на тялото в нютоновата и лагранжевата механики. За едно свободно тяло, разглеждано като система от материални точки, можем да напишем уравненията на движението във вида

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K},$$

където \mathbf{F} и \mathbf{K} са пълната сила и пълният момент на силите, действащи върху тялото.

Предвид $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$, от първото уравнение е ясно, че то описва постъпателното движение на тялото като материална точка с маса m . За второто уравнение използваме $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{M}'$ и $\mathbf{K} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{K}'$, и намираме

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \mathbf{K}'.$$

Лагранжианът на свободно тяло е

$$L = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^3\sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta}\omega_{\alpha}\omega_{\beta} - U,$$

където потенциалната енергия U зависи от 6 (обобщени) координати $q_j, j = 1, 2, \dots, 6$, които са координатите на радиус-вектора на центъра на масата спрямо неподвижната отправна система и трите независими ъгъла, определящи ориентацията на движещата се отправна система спрямо неподвижната отправна система. Уравненията на Лагранж са

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d.$$

В случая на несвободна система, към уравненията за \mathbf{P} и \mathbf{M} трябва да се добавят реакциите на връзките, а лагранжианът трябва да се напише в независими обобщени координати.

32. Ъгли на Ойлер. Лагранжиан и уравнения на Лагранж за ъглите на Ойлер

Като ъгли, определящи ориентацията на едно твърдо тяло, т.е. на свързаната с него

отправна система $O'x'_1x'_2x'_3$, спрямо неподвижната отправна

система $Ox_1x_2x_3$ удобно е да се изберат ъглите на Ойлер

φ, θ, ψ . С последователно завъртане на тялото на тези ъгли

системата $Ox_1x_2x_3$ може да се доведе до съвпадане с $O'x'_1x'_2x'_3$.

Именно (вж. фиг.):

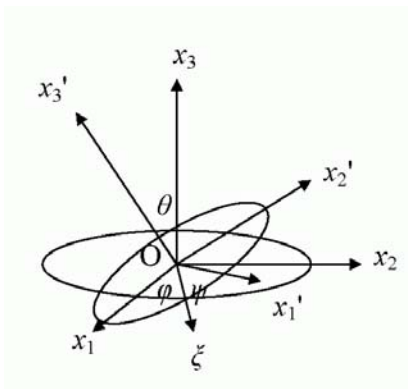
- завъртане на тялото на ъгъл φ около ос x_3 , при което

$Ox_1x_2x_3$ преминава в $O\xi\eta x_3$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; φ се нарича ъгъл на

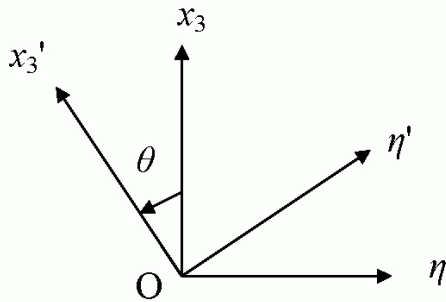
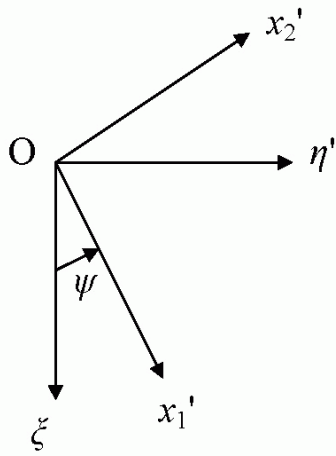
прецесия;

- завъртане на тялото на ъгъл θ около ос ξ (т.нар. линия на възлите), при което $O\xi\eta x_3$

преминава в $O\xi\eta'x'_3$; $0 \leq \theta \leq \pi$; θ се нарича ъгъл на нутация;



- завъртане на тялото на ъгъл ψ около ос x_3' , при което $O\xi\eta'x_3'$ преминава в $Ox_1'x_2'x_3'$;
 $0 \leq \psi \leq 2\pi$; ψ се нарича ъгъл на собствено въртене на тялото.



За да намерим ъгловата скорост ω чрез φ, θ, ψ ,

да разгледаме безкрайно малко изменение на ориентацията на $Ox_1'x_2'x_3'$. То може да се осъществи чрез последователно завъртане на безкрайно малки ъгли $d\varphi, d\theta, d\psi$ или на единствен ъгъл $d\chi$ (теорема на Ойлер), за който

$$d\chi = d\varphi \mathbf{e}_{x_3} + d\theta \mathbf{e}_{\xi} + d\psi \mathbf{e}_{x_3'}$$

Оттук намираме ω като

$$\omega = \dot{\varphi} \mathbf{e}_{x_3} + \dot{\theta} \mathbf{e}_{\xi} + \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_3'}$$

За да намерим компонентите на ω в $Ox_1'x_2'x_3'$, използваме, че (вж. фиг.)

$$\mathbf{e}_{\xi} = \cos \psi \mathbf{e}_{x_1'} - \sin \psi \mathbf{e}_{x_2'}$$

$$\mathbf{e}_{\eta'} = \sin \psi \mathbf{e}_{x_1'} + \cos \psi \mathbf{e}_{x_2'}$$

$$\mathbf{e}_{x_3} = \sin \theta \mathbf{e}_{\eta'} + \cos \theta \mathbf{e}_{x_3'}$$

Следователно,

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\varphi} \left[\sin \theta (\sin \psi \mathbf{e}_{x_1'} + \cos \psi \mathbf{e}_{x_2'}) + \cos \theta \mathbf{e}_{x_3} \right] + \dot{\theta} (\cos \psi \mathbf{e}_{x_1'} - \sin \psi \mathbf{e}_{x_2'}) + \dot{\psi} \mathbf{e}_{x_3'} = \\ &= (\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi) \mathbf{e}_{x_1'} + (\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi) \mathbf{e}_{x_2'} + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{e}_{x_3'} \end{aligned}$$

или по компоненти в $Ox_1'x_2'x_3'$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

Тези три формули се наричат кинематични формули на Ойлер.

Лагранжианът на тялото е $L = mV^2/2 + T' - U$, където $U = U(\mathbf{R}, \varphi, \theta, \psi)$ и

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 I_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

В случая на симетрично тяло, $I_1 = I_2$ и

$$T' = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

Самите уравнения на Лагранж за компонентите на \mathbf{R} могат да се напишат директно. За да напишем уравненията на Лагранж за ъглите на Ойлер, първо намираме съответните обобщени импулси

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T'}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta,$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T'}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta},$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T'}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Ако $U = U(\mathbf{R})$, то уравненията на Лагранж за \mathbf{R} от една страна, и тези за φ, θ, ψ се разделят. Тогава φ, ψ са циклични координати, откъдето следва запазването на p_φ, p_ψ и остава да се напише само уравнението за θ $\dot{p}_\theta = \partial T' / \partial \theta$:

$$\dot{p}_\theta = I_1 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin \theta = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \dot{\varphi} p_\psi \sin \theta.$$

Ъглите φ, θ, ψ се намират като решения на уравненията за p_φ, p_ψ и \dot{p}_θ .

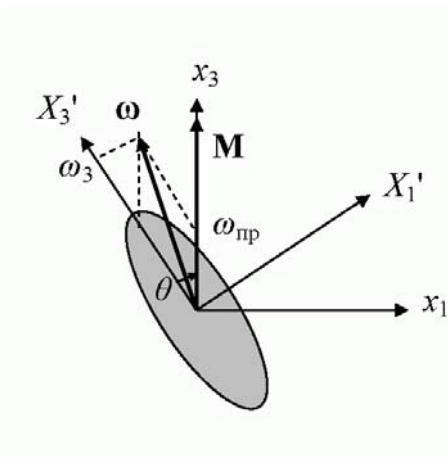
33. Движение на свободно симетрично тяло. Регулярна прецесия

Да разгледаме задачата за движение на свободно симетрично тяло ($I_1 = I_2 \neq I_3$) в отсъствие на външни сили.

Уравненията на движението $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$ и $d\mathbf{M}/dt = \mathbf{K}$, при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, дават $\mathbf{P} = const$ и $\mathbf{M} = const$. Запазването на импулса води за заключение за равномерно праволинейно движение на центъра на масата на тялото. Това позволява да изберем общо начало на неподвижната и движещата се отправни системи. Така, движението на тялото се свежда до движение на тяло с една неподвижна точка. Запазването на момента на импулса позволява да се направят изводи за въртеливото движение на тялото. При избор на общо начало на двете

отправни системи в центъра на масата на тялото, имаме $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$.

Да изберем оста x_3 на неподвижната система по посоката на \mathbf{M} . За удобство ще използваме движеща се система с оси, насочени по главните оси X'_1, X'_2, X'_3 като X'_3 е по оста на тялото и сключва ъгъл θ с \mathbf{M} . Използвайки произволността на осите X'_1, X'_2 , да изберем X'_1 в равнината на \mathbf{M} и моментното положение на X'_3 (вж. фиг.).



Спрямо главните оси $M_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha$. Тогава от $M_2 = I_2 \omega_2$, следва $\omega_2 = 0$, т.е. във всеки момент $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{M} и оста на тялото лежат в една равнината. От $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ следва, че скоростите на всички точки от оста на тялото са перпендикулярни на тази равнина. Следователно, оста на тялото се върти около \mathbf{M} като описва кръгов конус. Това движение се нарича регулярна прецесия. За да намерим ъгловата скорост на прецесия, разлагаме $\boldsymbol{\omega}$ по правилото на успоредника на компоненти по оста X'_3 и по \mathbf{M} . Първата не води до преместване на оста на тялото, докато втората дава търсената ъглова скорост на прецесия. От фигурата е ясно, че $\omega_{\text{пр}} \sin \theta = \omega_1$ и $\omega_1 = M_1 / I_1 = M \sin \theta / I_1$. Тогава

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{\omega_1}{\sin \theta} = \frac{M}{I_1}.$$

Самото тяло се върти около оста си с ъглова скорост ω_3 , която се дава с израза

$$\omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M \cos \theta}{I_3}.$$

Да разгледаме същата задача с помощта на уравненията на Лагранж за ъглите на Ойлер φ, θ, ψ . Избираме оста x_3 по вектора \mathbf{M} . Имаме

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2,$$

т.е. φ, ψ са циклични координати и следователно p_φ, p_ψ се запазват, където

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Забелязваме, че $p_\varphi = M$ и $p_\psi = M \cos \theta$. Тогава горните две равенства добиват вида $I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta = M$ и $I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M \cos \theta$. От тези две уравнения получаваме

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}, \quad \dot{\psi} = M \cos \theta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right).$$

Тук $\dot{\varphi}$ е ъгловата скорост на прецесия, а $\dot{\psi}$ е ъгловата скорост на въртене около оста на тялото. Изразът за $\dot{\varphi}$ съвпада с този за $\omega_{\text{пр}}$, тъй като и двете са проекции на ос на неподвижната система. Обаче изразът за $\dot{\psi}$ се отличава от този за ω_3 , защото ω_3 е пълната ъглова скорост на въртене на тялото около оста му, а $\dot{\psi}$ е ъгловата скорост на въртене на тялото около оста X'_3 при отсъствие на прецесия.

За да намерим θ не е нужно да решаваме уравнението на Лагранж. Наистина, забелязваме, че p_θ е равна на проекцията на \mathbf{M} върху оста ξ , която е нула. Оттук следва

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta} = 0 \text{ и } \dot{\theta} = 0.$$

Следователно, оста на тялото запазва постоянен наклон спрямо посоката на \mathbf{M} и се върти равномерно с ъглова скорост $\dot{\psi}$ около своята ос и равномерно с ъглова скорост $\dot{\phi}$ около \mathbf{M} (регулярна прецесия).

34. Движение на тяло със закрепен център на масите. Уравнения на Ойлер

Да разгледаме задачата за движение на твърдо тяло със закрепен център на масата, на което действа момент на силите \mathbf{K} .

Уравнението на движението $d\mathbf{M}/dt = \mathbf{K}$ при закрепен център на масата ($\mathbf{R} = 0$) дава $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$ и $d\mathbf{M}'/dt = \mathbf{K}'$. Ориентираме осите на движещата се система по главните инерчни оси. Използваме $d\mathbf{M}/dt = d'\mathbf{M}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}$ и $M_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha$, за да получим

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = K_1,$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = K_2,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = K_3.$$

Тези три уравнения се наричат динамични уравнения на Ойлер. Те позволяват намиране на компонентите на ъгловата скорост в движещата се отправна система.

Уравненията на Ойлер могат да се изведат и като следствие от уравненията на Лагранж. Ориентираме осите на движещата се система по главните инерчни оси. Тогава лагранжианът на тялото е $L = \sum_{\alpha=1}^3 I_\alpha \omega_\alpha^2 / 2 - U(\varphi, \theta, \psi)$. Измежду ъглите на Ойлер, само завъртане на ψ е завъртане около главна инерчна ос (оста X_3') и така само производната на L по ψ дава момент на силата $K_3 = -\partial U / \partial \psi$. Уравнението на Лагранж за ψ е

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = K_3.$$

Използваме кинематичните формули на Ойлер $\omega_1 = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi$,

$\omega_2 = \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi$, $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ и получаваме

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = \omega_2, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = -\omega_1, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1.$$

Следователно

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \omega_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2$$

и

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = K_3.$$

Изборът на оста X_3' и съответните ъгли на Ойлер е произволен; затова, с циклична пермутация на 1,2,3, получаваме система от трите уравнения на Ойлер. Две от уравненията не са уравнения на Лагранж за φ, θ , защото $-\partial U / \partial \varphi$ и $-\partial U / \partial \theta$ не са равни на K_1 и K_2 .

Да разгледаме приложението на уравненията на Ойлер за случая на движение на свободно симетрично тяло в отсъствие на сили. Тази задача се свежда до задачата за движение на тяло със закрепен център на масата чрез съвместяване на началата на неподвижната и движещата се системи. Тогава можем да използваме уравненията на Ойлер

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0,$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0.$$

От последното уравнение получаваме $\omega_3 = const$, а първото и второто уравнения стават

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1,$$

където $\Omega = \omega_3 (I_3 - I_1) / I_1$. Тези уравнения имат решения $\omega_1 = A \cos \Omega t$ и $\omega_2 = A \sin \Omega t$.

Следователно, проекцията на ω върху X_3' е постоянна, а проекцията върху равнината $OX_1'X_2'$ се върти около X_3' с ъглова скорост Ω . Такова движение извършва и проекцията на \mathbf{M} . В предишна лекция получихме, че спрямо неподвижната система тялото се върти около оста си с ъглова скорост $\dot{\psi} = M \cos \theta (I_1 - I_3) / I_1 I_3 = M_3 (I_1 - I_3) / I_1 I_3 = \omega_3 (I_1 - I_3) / I_1$. Следователно $\dot{\psi} = -\Omega$.

VII. КАНОНИЧНИ УРАВНЕНИЯ

35. Канонични променливи. Уравнения на Хамилтон

Лагранжевата механика описва механичното състояние на система с наложени холономни идеални връзки, в която действат обобщено-потенциални и дисипативни сили, чрез обобщените координати и скорости, чиято зависимост от времето се определя от уравненията на Лагранж. Такова описание не е единствено. Ред преимущества има описанието чрез обобщените координати и обобщените импулси. В тази връзка възниква въпросът за намиране на уравненията на движението, отговарящи на такава формулировка на механиката.

Преходът от един набор независими променливи към друг такъв набор може да се извърши чрез преобразованието на Лежандър. В случая то се свежда до следното. Пълният диференциал на лагранжиана $L(q, \dot{q}, t)$ е

$$dL = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Предвид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - Q_j^d = \dot{p}_j - Q_j^d,$$

където p_j е обобщеният импулс, можем да напишем

$$dL = \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j - Q_j^d) dq_j + \sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Вторият член в дясната страна записваме като

$$\sum_{j=1}^s p_j d\dot{q}_j = d \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j$$

и го заместваем в израза за dL

$$d \left(\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L \right) = - \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j - Q_j^d) dq_j + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Величината под диференциала в лявата страна е обобщената енергия H на системата.

Изразена чрез q, p, t , тя се нарича хамилтониан на системата

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L,$$

където $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$. От равенството

$$dH = \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt = - \sum_{j=1}^s (\dot{p}_j - Q_j^d) dq_j + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

следва

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j^d.$$

Това са т.нар. канонични уравнения на Хамилтон, а променливите q и p - канонични променливи. Определението "канонични" се свързва с тяхната простота и симетрия. Тези уравнения са $2s$ обикновени диференциални уравнения от първи ред за $2s$ неизвестни функции $q(t)$ и $p(t)$. Геометрически, състоянието на системата се представя с $2s$ -компонентна точка $\{q, p\}$ в $2s$ -мерното фазово пространство на системата. Освен тези уравнения, имаме

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Да формулираме законите за запазване на обобщения импулс и хамилтониана. Имаме

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^s Q_j^d \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ако $\partial H / \partial t = 0$ (т.е. стационарни сили) и $Q_j^d = 0$ (т.е. отсъствие на дисипативни сили), то H се запазва, т.е. е интеграл на движението на уравненията на Хамилтон. Такава система е обобщено-консервативна.

От уравненията на Хамилтон

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} + Q_j^d$$

следва, че ако за някое j имаме $\partial H / \partial q_j = 0$ (т.е. q_j е циклична координата) и $Q_j^d = 0$ (т.е. отсъствие на j -та дисипативна сила), то p_j се запазва, т.е. е интеграл на движението на уравненията на Хамилтон.

Да разгледаме частния случай на стационарни потенциални сили и стационарни връзки. Тогава H съвпада със запазващата се пълна енергия E

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - L = T + U = E,$$

т.е. системата е консервативна. В по-общия случай на стационарни обобщено-потенциални сили, пропорционални на скоростта, $U(q, \dot{q}) = U_0(q) + \sum_{j=1}^s \dot{q}_j A_j(q)$, и стационарни връзки, имаме $H = T + U_0 = E$, т.е. системата е също консервативна. Самите обобщени импулси p_j се дават с

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - A_j.$$

ДОПЪЛНЕНИЕ

Хамилтониан на заряд e в електромагнитно поле със скаларен потенциал φ и векторен потенциал \mathbf{A}

От израза за лагранжиана на заряда

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A},$$

имаме

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}.$$

Тогава, хамилтонианът на заряда има вида

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi.$$

36. Скобки на Поасон. Необходимо и достатъчно условие за пръв интеграл. Свойства на скобите на Поасон

Да разгледаме система с наложени холономни идеални връзки, в която действат обобщено-потенциални сили, но отсъстват дисипативни сили. Да намерим необходимото и достатъчно условие за това, една функция $f(q, p, t)$ да е пръв интеграл на уравненията на Хамилтон. Нека $f(q, p, t)$ остава постоянна с времето; тогава

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = 0.$$

Използваме уравненията на Хамилтон $\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j$, $\dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j$, и получаваме

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Да дефинираме скобки на Поасон за величините f и H като

$$[f, H] = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right).$$

Тогава по-горното равенство се записва във вида

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0.$$

То изразява необходимото условие f да е пръв интеграл. По обратен път се доказва, че това равенство е достатъчно условие за това, f да е пръв интеграл. В частност, ако $\partial f / \partial t = 0$, то горното условие се редуцира до $[f, H] = 0$.

Скобките на Поасон могат да се дефинират за всяка двойка функции $f(q, p, t)$ и $g(q, p, t)$ така

$$[f, g] = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

Скобките на Поасон имат следните свойства (c е константа)

$$[f, g] = -[g, f], [f, c] = 0, [f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], [f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right].$$

Ако g съвпада с q_j или p_j , то

$$[f, q_j] = -\frac{\partial f}{\partial p_j}, [f, p_j] = \frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

Ако f и g съвпада с q_j или p_j , то

$$[q_j, q_k] = 0, [p_j, p_k] = 0, [p_j, q_k] = -\delta_{jk}.$$

Тези съотношения се наричат фундаментални скобки на Поасон. Те представляват условие за каноничност на величините q и p . Те са класически аналози на комутационните съотношения на Хайзенберг.

Като следствие от свойствата на скобките на Поасон, уравненията на Хамилтон могат да се запишат във вида

$$\dot{q}_j = [q_j, H] = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \dot{p}_j = [p_j, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Като пример, да пресметнем скобките на Поасон за компонентите на момента на импулса \mathbf{M} на материална точка. В декартови координати $M_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$; M_2 и M_3 се получават с циклична пермутация на 1,2,3. Лесно се проверява, че $[M_1, M_2] = M_3$ и т.п. с циклична пермутация на 1,2,3. Също така, $[M_\alpha, M^2] = 0$. Тези резултати показват, че две компоненти на \mathbf{M} не могат едновременно да бъдат канонични променливи, защото не удовлетворяват фундаменталните скобки. Този резултат отговаря на квантовомеханичното твърдение, че две компоненти на \mathbf{M} не са едновременно измерими.

37. Тъждество на Якоби. Теорема на Поасон

Между скобките на Поасон, съставени от три функции, съществува следното съотношение, т.нар. тъждество на Якоби,

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

За да докажем това тъждество, да развием последния член в лявата му страна:

$$\begin{aligned} [h, [f, g]] &= \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} [f, g] - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} [f, g] \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Първият и вторият членове в тъждеството се получават чрез циклична пермутация на f , g и h . Очевидно е, че всички членове в получените развиятия на трите члена съдържат втори производни на трите функции по q и p . Да отделим първо членовете с втори производни на f .

Имаме

$$[h, [f, g]] = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_k} - \frac{\partial h}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_k} \right\}$$

плюс членове, не съдържащи втори производни на f . Развитието на вторият член

$[g, [h, f]] = -[g, [f, h]]$ се получава от това за третия член $[h, [f, g]]$ с размяна на g и h :

$$[g, [f, h]] = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial q_k} - \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_k} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial p_k} \right\}$$

плюс членове, не съдържащи втори производни на f . Тук разменяйки j и k , виждаме, че развитието на втория член съвпада с развитието на третия член, взето със знак минус.

Следователно, сумата на трите члена в тъждеството на Якоби изобщо не съдържа втори производни на f . Същото може да се докаже и за g и h . Следователно сумата на трите члена е тъждествено равна на нула.

С помощта на тъждеството на Якоби може да се докаже следната теорема на Поасон: ако f и g са два интеграла на движението, то $[f, g]$ е също интеграл на движението, т.е.

$[f, g] = const$. За доказателството на тази теорема, да разгледаме първо случая на независещи явно от времето f и g . Тогава полагаме $h = H$ в тъждеството на Якоби и получаваме

$$[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0.$$

От $[g, H] = 0$ и $[H, f] = 0$, следва $[H, [f, g]] = 0$, т.е. $[f, g]$ е интеграл на движението. В случая, когато f и g имат явна зависимост от времето, имаме

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f, g] &= \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], H] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right] = \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right]\end{aligned}$$

Тогава, от $df/dt = 0$ и $dg/dt = 0$, следва $d[f, g]/dt$.

Разбира се, чрез прилагане на скобките на Поасон, не винаги се получават нови интегрални. По тази процедура може да се получи константа, функция от f и g , но може да се получи и нов интеграл на движението.

38. Принципът на Хамилтон и уравненията на Хамилтон

Уравненията на Хамилтон, както и уравненията на Лагранж от втори род, могат да се получат от принципа на Хамилтон с действие, видоизменено за прехода от q, \dot{q} към q, p

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H \right\} dt.$$

Нека независими варируеми променливи са q, p ; тогава вариацията на действието е

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left\{ p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right\} dt.$$

Тъй като $\delta \dot{q}_j = d(\delta q_j)/dt$, то

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} (p_j \delta q_j) - \dot{p}_j \delta q_j \right] dt = p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q_j dt.$$

Предвид $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, първият член в горното равенство се анулира. Тогава вариацията на действието става

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left\{ \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt.$$

Съгласно принципа на Хамилтон, вариацията на действието е нула за истинската траектория, т.е.

$$\delta S = 0.$$

Тъй като интегралът, представящ действието, трябва да е нула за произволни вариации на независимите променливи, $\delta q_j, \delta p_j$, то множителите при тези вариации трябва да са равни на нула:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

С това получихме уравненията на Хамилтон, изхождайки от принципа на Хамилтон.

39. Действието като функция на координатите и времето

При формулиране на принципа на Хамилтон разгледахме интеграла на действието

$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ взет по траектории между две положения q_1 и q_2 , които системата заема в моменти t_1 и t_2 . На реалното движение на системата отговаря траекторията, за която S е екстремално.

Да разгледаме понятието действие в друг аспект. Именно, да разгледаме действието за реалните траектории с общо начало q_1 в момент t_1 като функция на координатите в горната граница на интегрирането. Изменението на S при преход от една реална траектория към друга, близка до нея, реална траектория се дава с

$$\delta S = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt .$$

Тъй като реалните траектории удовлетворяват уравненията на Лагранж от втори род, то интегралът се обръща в нула; предвид $\delta q(t_1) = 0$, оттук получаваме

$$\delta S = \sum_{j=1}^s p_j \delta q_j ,$$

където $\delta q_j = \delta q_j(t_2)$ и $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$. От това съотношение следва

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j .$$

По аналогичен начин S може да се разбира като явна функция на времето, разглеждайки реални траектории с общо начало q_1 в момент t_1 , минаващи през положение q_2 в различни моменти $t_2 = t$. В резултат можем да намерим $\partial S / \partial t$. Тази частна производна можем обаче да намерим и по по-прост начин. Да разгледаме S като функция на координатите и времето в описания по-горе смисъл. По определение имаме

$$\frac{dS}{dt} = L .$$

От друга страна

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j .$$

Сравнявайки двата израза, намираме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j$$

или окончателно

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H .$$

Предвид получените изрази за $\partial S / \partial t$ и $\partial S / \partial q_j$, можем да напишем

$$dS = \sum_{j=1}^s p_j dq_j - H dt .$$

Накрая, да предположим, че S е функция не само на крайните координати и време, q_{j_2} и t_2 , но и на началните координати и време, q_{j_1} и t_1 . Тогава

$$dS = \sum_{j=1}^s p_{j_2} dq_{j_2} - H_2 dt_2 - \sum_{j=1}^s p_{j_1} dq_{j_1} + H_1 dt_1 .$$

Това съотношение показва, че независимо от външните въздействия върху системата, нейното крайно състояние не може да е произволна функция от началното и състояние. Възможни са само такива движения, при които дясната страна е пълен диференциал. В частност, възможно е да се установят редица общи закономерности (не зависещи от външните полета) за снопове от частици, разлитащи се от дадена точка. Изучаването на тези закономерности е предмет на геометричната оптика.

40. Принцип на Мопертюи

Изхождайки от принципа на Хамилтон, изведохме уравненията на Хамилтон, от които може да се определи закона за движението на системата. В случая на обобщено-консервативни системи може да се използва опростена форма на този принцип, т.нар. принцип на Мопертюи. Строгата формулировка на този принцип дължим на Ойлер и Лагранж.

Да разгледаме всички истински траектории, минаващи през фиксирана начална точка във фиксиран момент, а през фиксирана крайна точка - в произволен момент. Използваме вече получения израз за диференциала на действието чрез диференциалите на началните и крайните координати и време, и това, че хамилтонианът се запазва ($H = H_0$), за да напишем вариацията на действието в разглеждания случай като

$$\delta S = -H_0 \delta t .$$

От друга страна

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H_0 \right] dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j dt - H_0 \delta t .$$

Сравняването на двата изрази дава принципа на Мопертюи

$$\delta S_0 = 0,$$

където S_0 е т.нар скъсено действие

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j dt.$$

С други думи, за истинската траектория скъсеното действие има екстремум по отношение на всички траектории с $H = H_0$, които минават през крайната точка в произволен момент.

Да разгледаме частния случай на консервативна система, т.е. при $\partial U / \partial t = 0$, $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$, $Q_j^d = 0$. За такава система $U = U(q)$, $T = \sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k / 2$ и $H = T + U = E$. Следователно,

$$T = E - U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) dq_j dq_k / (dt)^2,$$

откъдето

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) dq_j dq_k}{2(E-U)}}.$$

Интегрирането на този израз дава закона за движение на системата

$$t - t_0 = \int_{q_0}^q \sqrt{\frac{\sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) dq_j dq_k}{2(E-U)}}.$$

Използвайки израза за dt , получаваме действието във вида

$$S_0 = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2(E-U) \sum_{j,k=1}^s a_{jk}(q) dq_j dq_k}.$$

От вариационния принцип $\delta S_0 = 0$ можем да намерим уравнението на траекторията.

В случая на една материална точка $a_{jk}(q) = m \delta_{jk}$. Избирайки като обобщена координата дължината на траекторията s , получаваме действието като

$$S_0 = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \sqrt{2(E-U)} ds.$$

Тази форма на принципа наричат принцип на Якоби. Да намерим вариацията на действието:

$$\delta S_0 = \delta \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \sqrt{2(E-U)} ds = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \left[\sqrt{2(E-U)} \delta ds - \frac{\nabla U \cdot \delta \mathbf{r}}{\sqrt{2(E-U)}} ds \right].$$

В първия член записваме $\delta ds = ds \delta ds / ds = d\mathbf{r} \cdot \delta d\mathbf{r} / ds = (d\mathbf{r} / ds) \cdot (d\delta \mathbf{r} / ds) ds$ и го интегрираме по части като вземаме предвид, че $\delta \mathbf{r}$ се анулира в началната и крайната точки

$$\delta S_0 = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \left[-\frac{d}{ds} \left(\sqrt{2(E-U)} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) - \frac{\nabla U}{\sqrt{2(E-U)}} \right] \cdot \delta \mathbf{r} ds.$$

От произволността на $\delta \mathbf{r}$ следва диференциалното уравнение на траекторията

$$\frac{d}{ds} \left(\sqrt{2(E-U)} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) + \frac{\nabla U}{\sqrt{2(E-U)}} = 0.$$

От това уравнение може да се премине към диференциране по t чрез интеграла на енергията

$$E = \frac{m\dot{s}^2}{2} + U$$

и с това да се получи уравнението на Нютон

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U.$$

41. Канонични трансформации. Условие за каноничност

Изборът на обобщените координати q в лагранжевата механика не е ограничен от никакви условия - това могат да бъдат произволни s величини, еднозначно определящи положението на системата в пространството. При друг избор на обобщените координати Q , зададени чрез т.нар. точкови трансформации

$$Q_j = Q_j(q, t),$$

уравненията на Лагранж от втори род не се изменят по форма. С други думи, уравненията на Лагранж от втори род са инвариантни спрямо точкови трансформации.

Уравненията на Хамилтон са също инвариантни спрямо точкови трансформации, но те са инвариантни и спрямо по-широк клас от трансформации, т.нар. канонични трансформации, при които новите обобщени координати Q и обобщени импулси P са свързани със старите такива чрез формулите

$$Q_j = Q_j(q, p, t),$$

$$P_j = P_j(q, p, t).$$

Това разширение на класа на допустимите трансформации е едно от съществените преимущества на хамилтоновата механика.

Да изведем условието, при което една трансформация е канонична, т.е. трансформация, спрямо която уравненията на Хамилтон са инвариантни. С други думи, уравненията

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

да преминават в уравненията

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

с някакъв нов хамилтониан $H'(Q,P,t)$. Очевидно, принципът на Хамилтон ще е в сила както за старите, така и за новите обобщени координати и импулси, т.е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H \right\} dt = 0, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' \right\} dt = 0.$$

Обединяваме двете равенства в едно

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H \right] - \left[\sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' \right] \right\} dt = 0.$$

Ако считаме q и Q за променливи при варирането, то горното условие се изпълнява, ако подинтегралният израз е пълна производна по времето на произволна функция $F(q,Q,t)$.

Наистина

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F \Big|_{t_1}^{t_2} = \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial F}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial F}{\partial Q_j} \delta Q_j \right] \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

защото $\delta q_j(t_1) = 0$, $\delta q_j(t_2) = 0$, $\delta Q_j(t_1) = 0$ и $\delta Q_j(t_2) = 0$. Тогава

$$\left[\sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - H \right] - \left[\sum_{j=1}^s P_j \dot{Q}_j - H' \right] = \frac{dF}{dt}$$

или

$$\left[\sum_{j=1}^s p_j dq_j - H dt \right] - \left[\sum_{j=1}^s P_j dQ_j - H' dt \right] = dF = \sum_{j=1}^s \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial F}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Тъй като q , Q и t са независими променливи, то множителите на dq , dQ и dt трябва да са нула

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Решавайки първите уравнения спрямо Q_j , намираме $Q_j(q,p,t)$. Заместваме Q_j във вторите уравнения и получаваме $P_j(q,p,t)$. С това, от произволна функция $F(q,Q,t)$ можем да намерим вида на каноничната трансформация. Функцията F се нарича производяща функция на каноничната трансформация.

42. Трансформации на Лежандър. Производящи функции. Частни случаи на канонични трансформации

Канонични трансформации могат да се осъществят не само с функцията $F(q,Q,t)$, но и с други производящи функции. Такива функции могат да се получат с помощта на трансформацията на Лежандър

$$f(q, P, t) = F + \sum_{j=1}^s Q_j P_j, \quad \Phi(Q, p, t) = F - \sum_{j=1}^s q_j p_j, \quad \varphi(p, P, t) = F + \sum_{j=1}^s Q_j P_j - \sum_{j=1}^s q_j p_j.$$

Използваме израза за dF , за да получим df , $d\Phi$ и $d\varphi$:

$$dF = \sum_{j=1}^s p_j dq_j - \sum_{j=1}^s P_j dQ_j + (H' - H)dt,$$

$$df = \sum_{j=1}^s p_j dq_j + \sum_{j=1}^s Q_j dP_j + (H' - H)dt,$$

$$d\Phi = -\sum_{j=1}^s q_j dp_j - \sum_{j=1}^s P_j dQ_j + (H' - H)dt,$$

$$d\varphi = -\sum_{j=1}^s q_j dp_j + \sum_{j=1}^s Q_j dP_j + (H' - H)dt.$$

Оттук намираме

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}, \quad H' - H = \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial f}{\partial P_j}, \quad H' - H = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_j}, \quad H' - H = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$q_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial \varphi}{\partial P_j}, \quad H' - H = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Ако производящата функция не зависи явно от времето, то $\partial F / \partial t = 0$, $\partial f / \partial t = 0$, $\partial \Phi / \partial t = 0$ и $\partial \varphi / \partial t = 0$, и за всички канонични трансформации е вярно тъждеството $H' = H$. Такива трансформации се наричат напълно канонични.

Да разгледаме няколко частни случаи на канонични трансформации:

$$f = \sum_{j=1}^s q_j P_j : p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j} = P_j, \quad Q_j = \frac{\partial f}{\partial P_j} = q_j, \quad H' = H,$$

т.е. това е тъждествена трансформация;

$$f = -\sum_{j=1}^s q_j P_j : p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j} = -P_j, \quad Q_j = \frac{\partial f}{\partial P_j} = -q_j, \quad H' = H,$$

т.е. това е трансформация на пространствена инверсия;

$$F = \sum_{j=1}^s q_j Q_j : p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} = Q_j, \quad P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} = -q_j, \quad H' = H,$$

т.е. q и p сменят места. Този пример показва, че изборът на координатите и импулса в хамилтоновата механика е условен. Затова в нея q и p се наричат канонично спрегнати величини;

$$f = \sum_{j=1}^s \Psi_j(q) P_j : p_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Psi_j}{\partial q_j} P_j, Q_j = \Psi_j(q), H' = H,$$

т.е. получаваме точкова трансформация.

От основните формули, свързващи новите и старите канонични променливи с производящите функции следват диференциалните връзки

$$\frac{\partial p_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial P_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Q_k \partial p_j} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_j \partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_j},$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial P_k} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial P_k \partial p_j} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_j \partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}.$$

Накрая, интересно е да се отбележи, че изменението на q и p при движението на системата може да се разглежда като канонична трансформация. Наистина, нека q_t и p_t са каноничните променливи в момент t , а $q_{t+\tau}$ и $p_{t+\tau}$ - в момент $t+\tau$. Последните са някакви функции от първите

$$q_{t+\tau} = q_{t+\tau}(q_t, p_t, t, \tau), \quad p_{t+\tau} = p_{t+\tau}(q_t, p_t, t, \tau).$$

Ако разгледаме тези формули като трансформация от q_t и p_t към $q_{t+\tau}$ и $p_{t+\tau}$, то тази трансформация ще е канонична. Това се вижда от израза за диференциала на действието $S(q_{t+\tau}, p_{t+\tau}, t)$

$$dS = \sum (p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t) - (H_{t+\tau} - H_t) dt$$

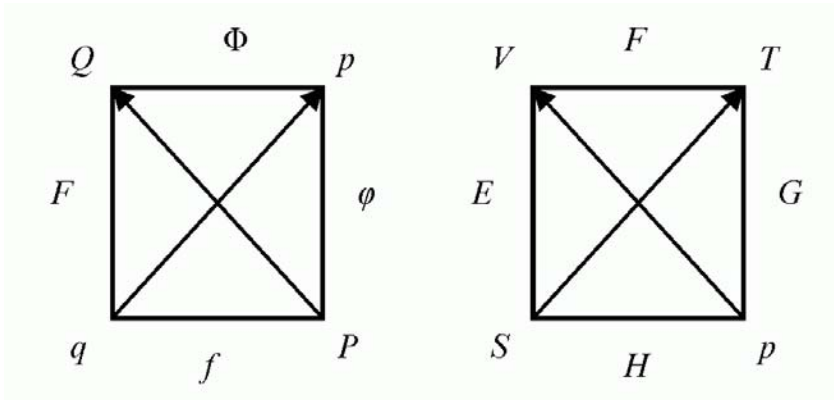
взето по истинската траектория, преминаваща през $q_{t+\tau}$ и q_t в моменти $t+\tau$ и t . Сравняването този израз с

$$dF = \sum_{j=1}^s p_j dq_j - \sum_{j=1}^s P_j dQ_j + (H' - H) dt$$

показва, че $-S = F$, т.е. S е производяща функция $S(q, Q, t)$.

ДОПЪЛНЕНИЕ

Съотношенията между частните производни на новите и старите канонични променливи могат да се възпроизведат използвайки мнемонично правило (виж. фиг., ляв



панел). Именно, започваме от даден ъгъл и се движим по или против часовниковата стрелка. Записваме частната производна на първата променлива спрямо втората при постоянна трета променлива. Ако

диагоналната линия, съединяваща първата с третата променлива сочи към третата, поставяме пред производната знак плюс; в противния случай, поставяме знак минус. Повтаряме същата операция, започвайки с четвъртата променлива и движейки се в противоположна посока. Накрая приравняваме получените частни производни.

Трансформацията на Лежандър има приложение и в термодинамиката за смяна на променливите V, p, S и T (обем, налягане, ентропия и температура) на термодинамичните функции E, F, H и G (вътрешна енергия, свободна енергия, енталпия и гибсов потенциал). Там връзките между частните производни на първите се наричат релации на Максвел. Тези връзки могат да се възпроизведат чрез мнемонично правило, илюстрирано на фигурата (десен панел).

43. Инвариантност на скобите на Поасон при канонични трансформации

Ще докажем инвариантността на фундаменталните скобки на Поасон спрямо канонични трансформации. Имаме

$$[Q_j, P_k]_{q,p} = \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \frac{\partial P_k}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} = \delta_{jk},$$

$$[Q_j, Q_k]_{q,p} = \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^s \left(-\frac{\partial Q_j}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) = -\frac{\partial Q_j}{\partial P_k} = 0,$$

$$[P_j, P_k]_{q,p} = \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_l} \frac{\partial P_k}{\partial p_l} - \frac{\partial P_j}{\partial p_l} \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^s \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial P_j}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = 0.$$

Но Q и P са канонични променливи и за тях са в сила следните съотношения

$$[Q_j, P_k]_{Q,P} = \delta_{jk}, [Q_j, Q_k]_{Q,P} = 0, [P_j, P_k]_{Q,P} = 0.$$

Следователно, фундаменталните скобки на Поасон са инвариантни спрямо канонични трансформации.

Ще докажем инвариантността на скобките на Поасон между две произволни функции f и g спрямо канонични трансформации. Имаме

$$\begin{aligned} [f, g]_{Q,P} &= \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \right) = \sum_{j,k=1}^s \left\{ \frac{\partial f}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_k} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial P_k} \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) \right\} = \\ &= \sum_{j,k=1}^s \left\{ \frac{\partial g}{\partial q_j} [f, q_j]_{Q,P} + \frac{\partial g}{\partial p_j} [f, p_j]_{Q,P} \right\} \end{aligned}$$

Полагаме $f = q_l$ и $g = \varphi$, а после $f = p_l$ и $g = \varphi$, и получаваме

$$\begin{aligned} [q_l, \varphi]_{Q,P} &= -[\varphi, q_l]_{Q,P} = \sum_{j,k=1}^s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} [q_l, q_j]_{Q,P} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} [q_l, p_j]_{Q,P} \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_l}, \\ [p_l, \varphi]_{Q,P} &= -[\varphi, p_l]_{Q,P} = \sum_{j,k=1}^s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} [p_l, q_j]_{Q,P} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} [p_l, p_j]_{Q,P} \right\} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_l}. \end{aligned}$$

Тук заместяваме φ с f , и заместяваме получените скобки в израза за скобките за f и g по-горе

$$[f, g]_{Q,P} = \sum_{j,k=1}^s \left\{ -\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right\} = [f, g]_{q,p}.$$

Следователно, скобките на Поасон са инвариантни спрямо канонични трансформации. Може да се докаже и обратното: от инвариантността на скобките спрямо дадена трансформация на променливите, следва каноничността на тази трансформация. Оттук в частност следва, че съотношенията, получени по-горе,

$$[Q_j, P_k]_{q,p} = \delta_{jk}, [Q_j, Q_k]_{q,p} = 0, [P_j, P_k]_{q,p} = 0,$$

могат да се разглеждат като условие за каноничност на трансформацията.

44. Теорема на Лиувил

За геометричната интерпретация на механичните явления често се използва т.нар. фазово пространство - $3s$ -мерното пространство на обобщените координати и импулси на дадената система. Всяка точка от това пространство отговаря на определено механично състояние на системата. При движение на системата, изобразяващата я фазова точка описва във фазовото пространство линия, наречена фазова траектория. Произведението

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

може да се разглежда като елемент на обема на фазовото пространство.

Ще докажем, че $\int d\Gamma$, взет по някаква област на фазовото пространство и представляващ нейния обем, е инвариантен спрямо канонични трансформации, т.е., ако извършим канонична трансформация от (q,p) до (Q,P) , то

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s .$$

Отбелязваме първо, че смяната на променливи в кратен интеграл става по формулата

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s ,$$

където

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}$$

е якобианът на смяната. Затова, доказателството на горната теорема се свежда до доказване на това, че якобианът на всяка канонична трансформация е равен на единица, т.е. $D = 1$.

Съгласно свойство на якобиана, с якобиана може да се работи като с дроби*; тогава можем да разделим "числителя" и "знаменателя" на $\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ и да напишем

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} \bigg/ \frac{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)} .$$

Съгласно друго свойство на якобиана, ако в "числителя" и "знаменателя" на якобиана има еднакви променливи, то той се свежда до якобиан с по-малък брой променливи, при което, при диференцирането, отпадналите променливи трябва да се считат за постоянни**. Затова

$$D = \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \right)_p \bigg/ \left(\frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \right)_q .$$

Да разгледаме якобиана в числителя на D . Той е детерминанта от ранг s с елементи $\partial Q_j / \partial q_k$.

Представяйки каноничната трансформация чрез производяща функция $f(q,P)$, получаваме

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial P_j} .$$

По същия начин намираме, че якобианът в знаменателя на D е детерминанта с елементи

$$\frac{\partial p_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial P_k} .$$

Следователно двете детерминанти се различават една от друга по замяна на редовете със стълбове и следователно са равни една на друга. Оттук следва, че $D = 1$.

Да разгледаме дадена област от фазовото пространство. При движение на механичната система, точките от тази област се преместват с времето съгласно уравненията на движението. С това ще се премества и самата област. При това обемът на областта ще

остава постоянен. Това твърдение, т.нар. теорема на Лиувил, е пряко следствие от инвариантността на фазовия обем при канонични трансформации и от това, че самото изменение на q и p при движението на системата може да се разглежда като канонична трансформация.

*Ако в двукратен интеграл извършим смяна на променливите от (Q,P) към (q,p) и от (q,p) към (q,P) , резултатният якобиан на цялата смяна от (Q,P) към (q,P) ще бъде произведение от якобианите на двете смени, откъдето следва споменатото свойство.

**При смяна (Q,P) към (q,P) , имаме $\partial Q_j / \partial q_k, \partial Q_j / \partial P_k = 0, \partial P_j / \partial q_k$ и $\partial P_j / \partial P_k = \delta_{jk}$. Така якобианът на смяната се свежда до детерминанта от елементите $\partial Q_j / \partial q_k$ при $P = const$.

45. Уравнение на Хамилтон-Якоби. Теорема на Якоби

Преди, в случая на система с холономни идеални връзки и обобщено-потенциални сили, въведохме действието като функция на координатите и времето $S(q,t)$ и установихме, че

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

Комбинирайки двата резултата, получаваме частно диференциално уравнение от първи ред за неизвестната функция $S(q,t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

Това уравнение се нарича уравнение на Хамилтон-Якоби. Наред с уравненията на Лагранж и уравненията на Хамилтон, това уравнение е също основа на общ метод за интегриране на уравненията на движението.

Преминавайки към излагането на този метод, напомняме, че всяко частно диференциално уравнение от първи ред има решение, зависещо от произволна функция, което се нарича общ интеграл. Обаче, за намиране на интегралите на движението, общият интеграл не е нужен. Достатъчно е намиране на т.нар. пълен интеграл, който е решение на уравнението, съдържащо толкова независими произволни константи, колкото са независимите променливи. В уравнението на Хамилтон-Якоби независими променливи са q и t . Затова пълният интеграл на уравнението съдържа $s + 1$ произволни константи. При това, понеже S влиза в уравнението само чрез своите производни, то една от произволните константи се съдържа в пълния интеграл като адитивна константа, т.е.

$$S = f(q,t,\alpha) + A.$$

Тук α означава съвкупността от s независими константи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Да предположим, че сме намерили пълен интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби. Тогава връзката на това решение с решението на уравненията на Хамилтон се дава от теоремата на Якоби: ако някаква функция $f(q, t, \alpha)$ е пълен интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби, то решението на уравненията на Хамилтон се определят от съотношенията

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j},$$

където $\alpha_j, \beta_j, j=1, 2, \dots, s$ са произволни константи.

За доказване на теоремата, да разгледаме канонична трансформация от q и p към нови променливи с помощта на произвождаща функция $f(q, t, \alpha)$ с α като нови импулси. Да означим с β новите координати. Тогава

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad H' - H = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Тъй като f удовлетворява уравнението на Хамилтон-Якоби, то H' се обръща в тъждествено в нула:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Затога каноничните уравнения за новите променливи имат вида

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad \dot{\beta}_j = 0,$$

откъдето

$$\alpha_j = \text{const}, \quad \beta_j = \text{const}.$$

Тогава системата уравнения

$$\beta_j = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}$$

позволява намиране на координатите $q_j = q_j(\alpha, \beta, t)$, а от системата

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

намираме и импулсите $p_j = p_j(\alpha, \beta, t)$. С това е намерен общ интеграл на уравненията на движението.

В случая на непълен интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби, зависещ от по-малък брой константи α , от уравненията $\beta_j = \partial f / \partial \alpha_j$ може да се намали броя на търсените координати и с това да се опрости задачата за намирането им.

В случая на обобщено-консервативна система (т.е. $\partial H / \partial t = 0$ и $H = H_0$), зависимостта на S от времето се свежда до адитивен линеен член по времето

$$S = S_0(q) - H_0 t,$$

където скъсеното действие S_0 удовлетворява уравнението

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = H_0.$$

В случая на консервативна система (т.е. $H = H_0 = E$)

$$S = S_0(q) - Et,$$

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E.$$

46. Разделяне на променливите в уравнението на Хамилтон-Якоби

В редица важни случаи намирането на пълен интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби може да се извърши по метода на разделяне на променливите.

Да допуснем, че някоя координата, например q_1 и съответната и производна $\partial S / \partial q_1$ влизат в уравнението на Хамилтон-Якоби само във вид на някаква комбинация $\varphi(q_1, \partial S / \partial q_1)$, не съдържаща никакви други координати и производни, т.е. това уравнение има вида

$$\Phi\left(q', \frac{\partial S}{\partial q'}, t, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right) = 0,$$

където q' е съвкупността на координатите с изключение на q_1 , а $\partial S / \partial q'$ е съвкупността на производните с изключение на $\partial S / \partial q_1$. Да потърсим решение във вид на сумата

$$S = S'(q', t) + S_1(q_1).$$

Заместваме S в по-горното уравнение и получаваме

$$\Phi\left(q', \frac{\partial S'}{\partial q'}, t, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right) = 0.$$

Да предположим, че решението S е намерено. Тогава, след заместването му в това уравнение, то трябва да се обърне в тъждество; това трябва да е вярно и за всяка стойност на q_1 . Но при изменение на q_1 може да се изменя само функцията φ . Но от тъждествеността на равенството, следва, че φ е константа. Така, уравнението се разпада на две уравнения

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1,$$

$$\Phi\left(q', \frac{\partial S'}{\partial q'}, t, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right) = 0,$$

където α_1 е произволна константа. Първото уравнение е обикновено диференциално уравнение, от което се определя $S_1(q_1)$ чрез интегриране. Второто уравнение е частно диференциално уравнение за $S'(q', t)$, зависеща от една координата по-малко. Ако по този начин може последователно да се отделят всичките s координати и времето, намирането на пълния интеграл на уравнението на Хамилтон-Якоби се свежда изцяло до квадратури.

Частен случай на разделяне на променливите е случаят на на циклична променлива q_1 , когато q_1 не влиза явно в Хамилтониана и следователно в уравнението на Хамилтон-Якоби. Тогава $\varphi(q_1, \partial S / \partial q_1)$ се свежда до $\partial S / \partial q_1$, а уравнението $\varphi(q_1, \partial S / \partial q_1) = \alpha_1$ дава просто $S_1 = \alpha_1 q_1$ така, че

$$S = S'(q', t) + \alpha_1 q_1.$$

Константата α_1 е постоянната стойност на импулса $p_1 = \partial S / \partial q_1$, отговарящ на цикличната координата q_1 .

За обобщено-консервативна система времето t е циклична координата, която води до отделянето на времето във вид на член $-H_0 t$

$$S = S_0(q) - H_0 t,$$

където $S_0(q)$ е скъсеното действие. За консервативна система $S = S_0(q) - Et$.

Като пример за пълно разделяне на променливите, да разгледаме свободна частица в отсъствие на сили; имаме $H = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) / 2m$, $p_1 = \partial S / \partial x_1$, $p_2 = \partial S / \partial x_2$, $p_3 = \partial S / \partial x_3$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3} \right)^2 \right] = 0.$$

Системата е консервативна, а трите координати са циклични. Затова полагаме

$$S = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - Et + A.$$

Тук константите са зависими. Наистина, заместването на S в уравнението на Хамилтон-Якоби дава $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) / 2m - E = 0$. Тогава

$$S = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - \frac{1}{2m} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) t + A.$$

Интегралите на движението намираме като решения на системата уравнения

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x_1 - \frac{\alpha_1}{m} t, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = x_2 - \frac{\alpha_2}{m} t, \quad \beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = x_3 - \frac{\alpha_3}{m} t,$$

откъдето

$$x_1 = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{m}t, \quad x_2 = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m}t, \quad x_3 = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m}t.$$

Импулсите намираме от системата уравнения

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \alpha_1, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \alpha_2, \quad p_3 = \frac{\partial S}{\partial q_3} = \alpha_3.$$

47. Движението на частица като вълнов процес

Уравнението на Хамилтон-Якоби позволява да се направи аналогия между движението на частица и геометричната оптика. Да проследим тази аналогия на примера на частица, движеща се в стационарно поле $U(\mathbf{r})$, и монохроматична вълна, разпространяваща се в оптично нехомогенна среда.

Движението на частицата се подчинява на уравнението на Хамилтон-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\mathbf{r}) = 0,$$

където $S = S(\mathbf{r}, t)$. Тъй като полето е стационарно, полагаме $S = S_0(\mathbf{r}) - Et$ и получаваме

$$(\nabla S_0)^2 = 2m[E - U(\mathbf{r})].$$

Изоповърхността $S = const$ се премества на разстояние ds , нормално на повърхността, за време dt със скорост $u = ds/dt$. Такова преместване се извършва по посока на импулса на частицата $\mathbf{p} = \nabla S_0$, т.е. по траекторията на частицата. За да намерим скоростта на преместване, изхождаме от диференциала на действието нормално на изоповърхността

$$dS = \nabla S_0 \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial S}{\partial t} dt = |\nabla S_0| ds - E dt.$$

Оттук намираме

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla S_0|} = \frac{E}{|\mathbf{p}|}.$$

От друга страна, вълновото уравнение от оптиката има вида

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

където φ е коя да е компонента на интензитета на електричното поле или магнитната индукция, n е показателят на пречупване, а c е скоростта на светлината във вакуум. Ако считаме n за константа, то едно от решенията е

$$\varphi = a \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

където a е постоянна амплитуда, а \mathbf{k} е вълновият вектор ($k = 2\pi/\lambda = n\omega/c$ е вълновото число в средата). Ако n е слабо изменяща се функция на \mathbf{r} , то решението е

$$\varphi = a(\mathbf{r}) \exp i(k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t),$$

където $k_0 = 2\pi / \lambda_0 = \omega / c$ е вълновото число във вакуум, а l се нарича ейконал. Заместваме φ във вълновото уравнение и получаваме за реалната и имагинерната части

$$\nabla^2 a + ak_0^2 [n^2 - (\nabla l)^2] = 0, \quad a \nabla^2 l + 2\nabla a \cdot \nabla l = 0.$$

Второто уравнение може да се запише като $\nabla(a^2 \nabla l) = 0$. Това уравнение изразява закона за запазване на потока на енергията на вълната. Наистина, този поток е насочен по $\mathbf{k} \parallel \nabla l$, а големината му е $\propto a^2$. Първото уравнение, в границата на къси вълни $k_0 \rightarrow \infty$, дава основното уравнение на геометричната оптика

$$(\nabla l)^2 = n^2(\mathbf{r}).$$

В тази граница, изоповърността $k_0 l(\mathbf{r}) - \omega t = const$ определя фронта на вълната. Този фронт се движи по посока на вълновия вектор \mathbf{k} (т.е. по светлинните лъчи) със скорост

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k_0 |\nabla l|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

Получените резултати позволяват да се направи съпоставянето:

$$S_0 - Et \leftrightarrow k_0 l - \omega t, \quad S_0 \leftrightarrow k_0 l, \quad E \leftrightarrow \omega, \quad \mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{k}, \quad 2m(E - U) \leftrightarrow n^2.$$

Следователно, аналог на фронта на вълната е изоповърността $S = const$, роля на ейконал играе скъсеното действие S_0 , вълновият вектор може да се съпостави на импулса на частицата, светлинните лъчи отговарят на траекторията на частицата, а показателят на пречупване е аналогичен на $\sqrt{2m(E - U)}$.

VIII. МЕХАНИКА НА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ СРЕДИ

48. Основни понятия на механиката на непрекъснатите среди

За макроскопичното описание на системи, такива като газове, течности и деформируеми твърди тела, се използва понятието непрекъсната среда. Огромният брой на молекулите в непрекъснатите среди затруднява микроскопичното описание на движението им и затова е естествено да се ограничим с приближено описание на движението. За тази цел разглеждаме не отделна молекула, а т.нар. физически безкрайно малка частица или просто частица от средата. Такава частица е съвкупност от молекули, чиито брой ΔN е много по-голям от единица, $\Delta N \gg 1$, но е много по-малък от броя на молекулите N на която да е макроскопична част от средата, $\Delta N \ll N$. Частицата трябва да заема обем ΔV , който да е малък в сравнение с областта на забележимо изменение на макроскопичните параметри на средата.

Положението на частицата в даден момент t се задава с радиус-вектора на центъра на масата и, усреднен по интервал Δt , който трябва да е много по-голям от характерното време на движение на отделните молекули, но да е много по-малък от времето на забележимо изменение на макроскопичните параметри на средата. Така, казвайки, че частица от средата има радиус-вектор \mathbf{r} в момент t , трябва да имаме предвид, че тези две величини са определени с неточности от порядъка на $(\Delta V)^{1/3}$ и Δt . В механиката на непрекъснатите среди такива неточности се пренебрегват. Ако частицата се премества на $d\mathbf{r}$ за време dt , то нейната скорост е $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Ако изменението на скоростта на частицата за време dt е $d\mathbf{v}$, то ускорението и е $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

Важно понятие в механиката на непрекъснатите среди е понятието поле, т.е. всяка физична величина, която е зададена като функция на точката от пространството \mathbf{r} и момента t . Да разгледаме три важни примера на полета: скаларното поле на плътността на масата или просто плътност $\rho(\mathbf{r}, t)$, дефинирана като отношението на масата на частица dm и нейния обем dV , $\rho = dm/dV$; векторното поле на безкрайно малките премествания $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, дефинирано като безкрайно малкото преместване $d\mathbf{r}$ на частиците от средата за безкрайно малко време dt , т.е. $d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)dt$; тензорното поле на напреженията, задавано с тензора на напреженията $P_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ (вж. Допълнение).

Описание, при което полетата зависят от точката на пространството, се нарича пространствено (или ойлерово). Алтернативно, полетата могат да се разглеждат като

функции на радиус-вектора на частица от средата. Такова описание се нарича материално (или лагранжево). Аналогично, изменението на едно поле можем да разглеждаме за дадена частица или в дадена точка от пространството. Изменението на полето в дадена точка се характеризира с частната производна на полето по времето; тази производна се нарича локална. Изменението на полето за дадена частица се характеризира с пълната производна на полето по времето; тази производна се нарича материална. Връзката между локалната и материалната производни в случая на скаларно поле, напр. $\rho(\mathbf{r}, t)$, и векторно поле, напр. $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, се дава от равенствата

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Вторите членове в десните страни се наричат конвективни членове. Те дават изменението на полетата от точка в точка в даден момент.

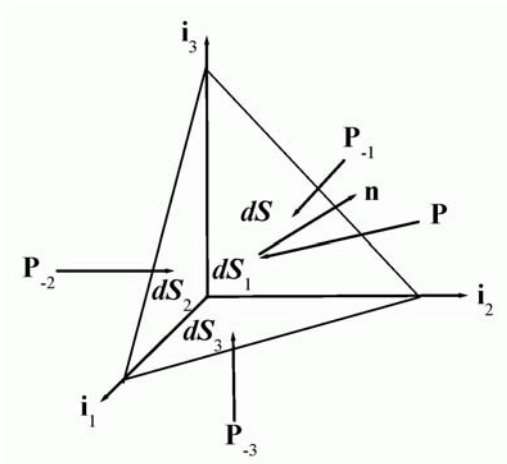
От особена важност са производни по времето на интеграли по фиксирани линии, повърхности и обеми, или алтернативно, интеграли по т.нар. материални линии, повърхности и обеми, които се състоят от частици на средата и се движат заедно с нея. Такива производни ще разглеждаме по-нататък, където и доколкото това е необходимо.

ДОПЪЛНЕНИЕ: Тензор на напреженията

Да разгледаме точка в някаква непрекъсната среда и лицев елемент dS през тази точка с единичен нормален вектор \mathbf{n} . Средата от едната страна на елемента действа върху средата от другата му страна. Това действие се описва с вектора на напреженията \mathbf{P} , дефиниран като сила на единица площ. Пълното описание на напреженията в дадената точка изисква познаването на \mathbf{P} като функция на ориентацията на елемента \mathbf{n} . Вместо функцията

$\mathbf{P}(\mathbf{n})$, по-удобно е да се въведе 9-компонентна величина, не зависеща от \mathbf{n} и определяща напреженията за всяко \mathbf{n} .

Да разгледаме малък тетраедър от средата, включващ дадената точка, и с ръбове по векторите на ортонормиран декартов базис. Лицата на стените, перпендикулярни на векторите $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, означаваме с dS_1, dS_2, dS_3 . Средата действа на тетраедъра с



напряжения \mathbf{P}_{-1} , \mathbf{P}_{-2} , \mathbf{P}_{-3} и \mathbf{P} . Съответно тетраедърът действа върху средата с напряжения $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_{-1}$, $\mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_{-2}$, $\mathbf{P}_3 = -\mathbf{P}_{-3}$. Ако \mathbf{a} е ускорението на центъра на масата на тетраедъра, \mathbf{f} е резултантната на обемните сили на единица маса, то уравнението на движението на центъра на масата на тетраедъра с маса dm е

$$\begin{aligned} \mathbf{a}dm &= \mathbf{f}dm + \mathbf{P}dS + \mathbf{P}_1dS_1 + \mathbf{P}_2dS_2 + \mathbf{P}_3dS_3 = \\ &= \mathbf{f}dm + \mathbf{P}dS - \mathbf{P}_1dS_1 - \mathbf{P}_2dS_2 - \mathbf{P}_3dS_3 \end{aligned}$$

При стягане на тетраедъра в точка около дадената точка от средата, $dm \rightarrow 0$ и

$$\mathbf{P}dS = \mathbf{P}_1dS_1 + \mathbf{P}_2dS_2 + \mathbf{P}_3dS_3.$$

От $dS_1 = n_1dS$ и т.п. следва

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1n_1 + \mathbf{P}_2n_2 + \mathbf{P}_3n_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{P}_\alpha n_\alpha$$

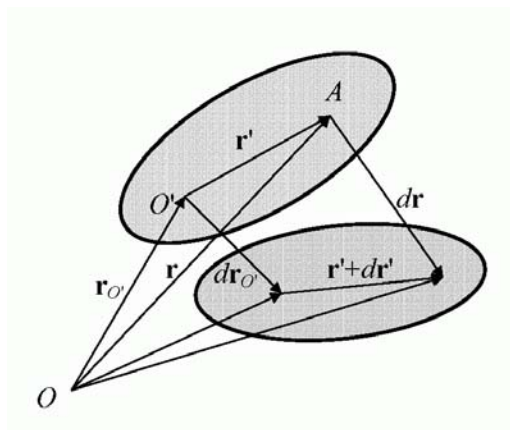
или по компоненти

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} n_\beta.$$

Тук $P_{\alpha\beta}$ са 9 напряжения, нормални (при $\alpha = \beta$) и тангенциални (при $\alpha \neq \beta$) на трите взаимно перпендикулярни лицеви елемента в дадената точка. Тези 9 величини не са свързани с ориентацията на лицевия елемент през нея. В същото време, те позволяват да се определи напряжението \mathbf{P} на всеки лицев елемент с ориентация \mathbf{n} . Следователно съвкупността от величините $P_{\alpha\beta}$ определя еднозначно една физична величина, която характеризира напълно напряженията в дадената точка. Тази величина е тензор от втори ранг, който се нарича тензор на напряженията.

49. Деформация на малка частица. Тензор на деформациите

С течение на времето, всяка малка частица от дадена непрекъсната среда се премества като цяло и деформира. Да разгледаме по-подробно движението на дадена частица. Нека \mathbf{r}_O



и \mathbf{r} са радиус-векторите на две близки точки от частицата, а \mathbf{r}' е вектор, съединяващ двете точки. Нека $d\mathbf{r}_O$ и $d\mathbf{r}$ са безкрайно малки премествания на двете точки. Въвеждайки поле на преместванията $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, можем да напишем

$$d\mathbf{r}_O = \mathbf{u}(\mathbf{r}_O, t),$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t).$$

Тогава изменението на \mathbf{r}' е равно на

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_{O'}, t) \approx \mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$$

или в тензорна форма

$$dx'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Тензорът от втори ранг $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$ може да се разложи на сума от симетричен и антисиметричен тензори от втори ранг така

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \equiv \varepsilon_{\beta\alpha} + \chi_{\beta\alpha},$$

където

$$\varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad \chi_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right).$$

Тогава dx'_α може да се запише в тензорна форма така

$$dx'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \varepsilon_{\beta\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta\alpha}.$$

Тук $\varepsilon_{\beta\alpha}$ и $\chi_{\beta\alpha}$ са безкрайно малки величини, както dx'_α .

Антисиметричният тензор $\chi_{\beta\alpha}$ има само три независими компоненти:

$$\chi_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{12} & \chi_{13} \\ -\chi_{12} & 0 & \chi_{23} \\ -\chi_{13} & -\chi_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тези три компоненти могат да се разглеждат като компоненти на безкрайно малък аксиален вектор $d\chi$

$$d\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (\chi_{23}, \chi_{31}, \chi_{12}), \quad \chi_\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right),$$

където α, β, γ са циклична пермутация на числата 1, 2, 3.

Това, че $d\chi$ е аксиален вектор, може да се види от $d\chi = (1/2)\text{rot}\mathbf{u}$, т.е. $d\chi$ е векторно произведение на два вектора. Наистина,

$$\text{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_3.$$

Лесно можем да се убедим, че $\sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta\alpha}$ са компоненти на векторното произведение $d\chi \times \mathbf{r}'$.

Наистина,

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta 1} &= x'_1 \chi_{11} + x'_2 \chi_{21} + x'_3 \chi_{31} = -x'_2 \chi_3 + x'_3 \chi_2, \\ \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta 2} &= x'_1 \chi_{12} + x'_2 \chi_{22} + x'_3 \chi_{32} = x'_1 \chi_3 - x'_3 \chi_1, \\ \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta 3} &= x'_1 \chi_{13} + x'_2 \chi_{23} + x'_3 \chi_{33} = -x'_1 \chi_2 + x'_2 \chi_1.\end{aligned}$$

От друга страна

$$d\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ d\chi_1 & d\chi_2 & d\chi_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{vmatrix} = (x'_3 d\chi_2 - x'_2 d\chi_3) \mathbf{i}_1 + (x'_1 d\chi_3 - x'_3 d\chi_1) \mathbf{i}_2 + (x'_2 d\chi_1 - x'_1 d\chi_2) \mathbf{i}_3.$$

Следователно,

$$\sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \chi_{\beta \alpha} = (d\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{r}')_\alpha.$$

Първият член в израза за dx'_α може да се представи като градиент на скаларна функция

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta.$$

Наистина,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x'_\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{\gamma\beta} x'_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\gamma} x'_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{\beta\gamma} x'_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\gamma} x'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\gamma} x'_\alpha.$$

Следователно, безкрайно малкото преместване на точките на частицата е

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{O'} + d\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{r}' + \nabla_{\mathbf{r}'} \Psi,$$

т.е. е сума от преместване на частицата като цяло на $d\mathbf{r}_{O'}$, завъртане на частицата като цяло на ъгъл $d\boldsymbol{\chi}$ около ос през точката O' и преместване $\nabla_{\mathbf{r}'} \Psi$, свързано с деформация на частицата, т.е. изменение на обема и формата и; $\nabla_{\mathbf{r}'} \Psi$ се нарича вектор на деформацията, а $\varepsilon_{\beta\alpha}$ се нарича тензор на деформациите.

Предвид това, че преместването \mathbf{u} се извършва за време dt , може да се въведе скоростта на преместване \mathbf{v} така: $\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$. Аналогично може да се въведат тензор на скоростта на деформациите $v_{\beta\alpha}$ и тензор $\omega_{\beta\alpha}$ чрез $\varepsilon_{\beta\alpha} = v_{\beta\alpha} dt$ и $\chi_{\beta\alpha} = \omega_{\beta\alpha} dt$, където

$$v_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad \omega_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right),$$

както и векторът на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot} \mathbf{v}$ и скаларната функция

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 v_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta .$$

Товагава скоростта на преместване на частицата е

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi ,$$

т.е. е сума от скорост на преместване на частицата като цяло на $\mathbf{v}_{O'}$, скорост на завъртане на частицата като цяло около ос през точката O' и скорост на деформацията $\nabla_{\mathbf{r}'} \Phi$.

50. Геометричен смисъл на тензора на деформациите

Тензорът на деформациите позволява да се намерят изменението на дължината на материална отсечка от непрекъснатата среда, изменението на ъгъла между материални отсечки, както и изменение на обема на част от средата. Надолу ще считаме, че отсъстват трансляция и въртене като цяло на разглежданата част от средата и, че началата O и O' на неподвижната и преместващата се отправни системи съвпадат.

Да разгледаме първо относителното изменение на дължината на малка материална отсечка OA . Изменението на компонентите на радиус-вектора на точка A се дава с

$$dx'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta} x'_\beta .$$

Да умножим двете страни на това равенство с x'_α / r' и сумираме по α . Предвид

$$\sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha dx'_\alpha = r' dr' ,$$

можем да напишем

$$\frac{dr'}{r'} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta ,$$

където $n_\alpha = x'_\alpha / r'$ са косинус-директорите на вектора \mathbf{r}' . Да разгледаме деформацията на отсечка, първоначално ориентирана по оста Ox_1 . Имаме $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ и

$$\frac{dr'}{r'} = \varepsilon_{11} .$$

Следователно, диагоналните елементи на тензора на деформациите, $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, са равни на относителното разтягане (или свиване) в направление на съответната ос. Такива компоненти се наричат деформации на едностранно разтягане (или свиване).

Да разгледаме деформацията на две малки материални отсечки OB и OA (т.е. състоящи се от частици и движещи се заедно с тях), първоначално насочени по осите Ox_1 и Ox_2 . Ще предполагаме, че отсъстват деформации на разтягане (или свиване) и деформацията

се извършва само в равнината Ox_1x_2 . Тогава компонентите на преместването на точката A са $dx_1' = \varepsilon_{12}x_2'$, $dx_2' = 0$, а на точката B са $dx_1' = 0$, $dx_2' = \varepsilon_{21}x_1'$. Оттук следва, че отсечките OB и OA се завъртат на ъгли $\theta/2$ и $-\theta/2$ в равнината Ox_1x_2 и

$$\varepsilon_{12} = \left(\frac{dx_1'}{x_2'} \right)_A = \left(\frac{dx_2'}{x_1'} \right)_B = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}.$$

Следователно, недиагоналните елементи на тензора на деформациите са равни на половината на изменението на ъгъла между две първоначално ортогонални отсечки. Такива компоненти се наричат деформации на хлъзгане.

Тензорът $\varepsilon_{\alpha\beta}$, както всеки симетричен тензор от втори ранг, може да се приведе към главните оси. Спрямо тях $\varepsilon_{\alpha\beta}$ е диагонален и има само три отлични от нула елемента $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Тогава

$$\frac{dr'}{r} = \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha} n_{\alpha}^2.$$

Оттук следва, че спрямо главните оси всяка деформация е съвкупност от три деформации на разтягане (или свиване) по тези оси. Да намерим относителното изменение на обема на малка частица с форма на паралелепипед с ръбове с дължини x_{α}' , насочени по главните оси.

Очевидно е, че всяка деформация на частицата ще бъде разтягане (или свиване) по ръбовете като x_{α}' ще се измени до $x_{\alpha}'(1 + \varepsilon_{\alpha})$. Тогава обемът на частицата $x_1'x_2'x_3'$ ще се измени до $x_1'x_2'x_3'(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$. Относителното изменение на обема на частицата ще бъде

$$\frac{dV}{V} = 1 - (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{div} \mathbf{u},$$

където е използвано, че сумата от диагоналните елементи е инвариант спрямо завъртане на координатната система.

51. Уравнение за непрекъснатост

Законът за запазване на масата на частица от средата се изразява математически с уравнението за непрекъснатост. Ще изведем това уравнение по два начина.

Да разгледаме първо фиксиран обем V от средата и нека S е ограничаващата го затворена повърхност. Ако $\rho(\mathbf{r}, t)$ е масовата плътност на средата, то изменението на масата в V за единица време ще бъде

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Това изменение е равно на масата, преминала за единица време през S , взета със знак минус

$$\frac{dM}{dt} = -\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS .$$

Тук величината $\rho \mathbf{v}$ е равна на масата, преминала през единица напречна площ за единица време; тя се нарича плътност на потока на масата. Използваме теоремата на Остроградски, за да преобразуваме интеграла по повърхност в интеграл по обем

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV .$$

Тогава балансът на масата в обема V се дава от уравнението

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 .$$

Тъй като това равенство е в сила за произволен обем V , то получаваме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 .$$

Това уравнение се нарича уравнение за непрекъснатост.

Предвид $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\rho$, интегралът по обема се записва като

$$\iiint_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = 0 ,$$

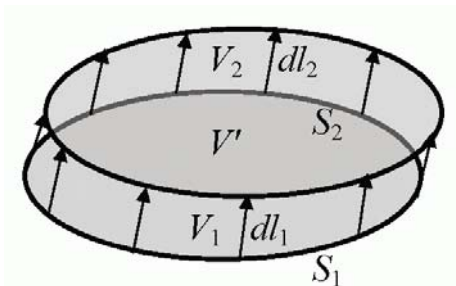
а уравнението за непрекъснатост се получава във вида

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 .$$

При $\rho = \text{const}$, т.е. за несвиваема среда, това уравнение се свежда до $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Това уравнение показва, че случая полето на скоростите е соленоидално и за него може да се дефинира векторен потенциал.

Да разгледаме материален обем V от средата, т.е. състоящ се от частици и движещ се заедно с нея. Изменението на масата в този обем за единица време става както за сметка на изменение на плътността, така и за сметка на изменение на самия обем. Нека за време dt материалният обем се премести от фиксиран обем $V' + V_1$ до фиксиран обем $V' + V_2$. Тогава изменението на масата dM ще бъде

$$dM = \iiint_{V'+V_2} \rho(t+dt) dV - \iiint_{V'+V_1} \rho(t) dV = \iiint_{V'} [\rho(t+dt) - \rho(t)] dV + \iiint_{V_2} \rho(t+dt) dV_2$$



Представяме $dV_1 = dl_1 dS_1 = -\mathbf{v}_1 dt \cdot \mathbf{n}_1 dS_1$ и

$dV_2 = dl_2 dS_2 = \mathbf{v}_2 dt \cdot \mathbf{n}_2 dS_2$ (dl_1 и dl_2 са големините на

преместванията на dS_1 и dS_2 , нормално на тези лицеви

елементи), и получаваме

$$\iiint_{V'+V_2} \rho(t+dt)dV - \iiint_{V'+V_1} \rho(t)dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV + \iint_S \rho \mathbf{v} dt \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Оттук намираме изменението на масата на материален обем V за единица време във вида

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = 0 \end{aligned}$$

което отново води до уравнението за непрекъснатост.

Формулата за пълна производна по времето от интеграл по материален обем може да се обобщи за произволно скаларно поле или компонента на векторно или тензорно поле $f(\mathbf{r}, t)$. Предвид $d(\rho f)/dt = \partial(\rho f)/\partial t + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\rho f)$, $d(\rho f)/dt = \rho df/dt + f d\rho/dt$ и $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получаваме

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \operatorname{div}(\rho f \mathbf{v}) \right] dV = \iiint_V \left[\frac{d}{dt}(\rho f) + (\rho f) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = \iiint_V \rho \frac{df}{dt} dV.$$

Тъй като обемът V е произволен, то

$$\rho \frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \operatorname{div}(\rho f \mathbf{v}).$$

52. Уравнение за изменение на импулса на малка частица

Изменението на импулса \mathbf{P} на частица от средата се определя от външните сили \mathbf{F}^e , действащи върху частицата:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e.$$

Силата \mathbf{F}^e е сума от обемни сили и повърхностни сили, т.е. сили действащи върху молекули в тънък слой под повърхността на частицата. Пълната обемна сила \mathbf{F}^V се представя като интеграл от $\rho \mathbf{f}$ по обема V на частицата (т.е. по материален обем V), където \mathbf{f} е обемната сила на единица маса,

$$F_\alpha^V = \iiint_V \rho f_\alpha dV.$$

Пълната повърхностна сила \mathbf{F}^S се определя от тензора на напреженията $P_{\alpha\beta}$ чрез интеграла по повърхността S на частицата

$$F_\alpha^S = \iint_S \sum_{\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} n_\beta dS.$$

Тогава, пълната сила, действаща върху частицата, е

$$F_\alpha^e = F_\alpha^V + F_\alpha^S = \iiint_V \rho f_\alpha dV + \iint_S \sum_{\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} n_\beta dS$$

или, след прилагане на теоремата на Остроградски за втория интеграл в дясната страна,

$$F_\alpha^e = \iiint_V \rho f_\alpha dV + \iiint_V \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV .$$

От друга страна, производната на импулса на частицата по времето е

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_\alpha dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\alpha) + \operatorname{div}(\rho v_\alpha \mathbf{v}) \right] dV = \iiint_V \rho \frac{dv_\alpha}{dt} dV .$$

Заместваме производната на импулса и силата в уравнението на движението и намираме уравнението за изменение на импулса на частицата в интегралния вид

$$\iiint_V \rho \frac{dv_\alpha}{dt} dV = \iiint_V \rho f_\alpha dV + \iiint_V \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV .$$

Тъй като това уравнение е в сила за произволен материален обем, получаваме уравнението за изменение на импулса и в диференциален вид

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = \rho f_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} .$$

Алтернативно, уравнението за изменение на импулса може да се получи в интегралния вид

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\alpha) + \operatorname{div}(\rho v_\alpha \mathbf{v}) \right] dV = \iiint_V \rho f_\alpha dV + \iiint_V \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV$$

или

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\alpha) + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho v_\alpha v_\beta - P_{\alpha\beta}) \right] dV = \iiint_V \rho f_\alpha dV .$$

Тук ρv_α е плътността на импулса на частицата. Смисълът на величината $\Pi_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta - P_{\alpha\beta}$ може да се изясни чрез сравняване със съответния член на уравнението за непрекъснатост. Тогава става ясно, че $\Pi_{\alpha\beta} n_\beta dS$ е α компонента на импулса, преминаващ през лицевия елемент dS , а $\Pi_{\alpha\beta}$ е α компонента на импулса, преминаващ през единична площ, перпендикулярна на оста β . По тази причина наричат $\Pi_{\alpha\beta}$ тензор на плътността на потока на импулса. Горното уравнение може да се запише и в диференциален вид така

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_\alpha) + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho v_\alpha v_\beta - P_{\alpha\beta}) = \rho f_\alpha .$$

53. Уравнение за изменение на момента на импулса на малка частица

Изменението на момента на импулса \mathbf{M} на частица от средата се определя от момента \mathbf{K}^e външните сили \mathbf{F}^e , действащи върху частицата:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}^e = \mathbf{r} \times \mathbf{F}^e .$$

Ако върху частицата действат външна обемна сила, зададена с обемна сила на единица маса \mathbf{f} , и повърхностна сила, определена чрез тензора на напреженията, то

$$K_\alpha^e = \iiint_V \rho (x_\beta f_\gamma - x_\gamma f_\beta) dV + \iint_S \sum_{\delta=1}^3 (x_\beta P_{\gamma\delta} - x_\gamma P_{\beta\delta}) n_\delta dS ,$$

където α, β, γ са циклична пермутация на 1,2,3. Преобразуваме втория интеграл в дясната страна с използване на теоремата на Остроградски

$$\iint_S \sum_{\delta=1}^3 (x_\beta P_{\gamma\delta} - x_\gamma P_{\beta\delta}) n_\delta dS = \iiint_V \sum_{\delta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\delta} (x_\beta P_{\gamma\delta} - x_\gamma P_{\beta\delta}) dV = \iiint_V \sum_{\delta=1}^3 \left(x_\beta \frac{\partial P_{\gamma\delta}}{\partial x_\delta} - x_\gamma \frac{\partial P_{\beta\delta}}{\partial x_\delta} \right) dV + \iiint_V (P_{\gamma\beta} - P_{\beta\gamma}) dV .$$

Следователно

$$K_\alpha^e = \iiint_V \rho (x_\beta f_\gamma - x_\gamma f_\beta) dV + \iiint_V \sum_{\delta=1}^3 \left(x_\beta \frac{\partial P_{\gamma\delta}}{\partial x_\delta} - x_\gamma \frac{\partial P_{\beta\delta}}{\partial x_\delta} \right) dV + \iiint_V (P_{\gamma\beta} - P_{\beta\gamma}) dV .$$

От друга страна

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho (x_\beta v_\gamma - x_\gamma v_\beta) dV = \iiint_V \rho \frac{d}{dt} (x_\beta v_\gamma - x_\gamma v_\beta) dV .$$

Предвид

$$\frac{d}{dt} (x_\beta v_\gamma - x_\gamma v_\beta) = \frac{dx_\beta}{dt} v_\gamma - \frac{dx_\gamma}{dt} v_\beta + x_\beta \frac{dv_\gamma}{dt} - x_\gamma \frac{dv_\beta}{dt} = v_\beta v_\gamma - v_\gamma v_\beta + x_\beta \frac{dv_\gamma}{dt} - x_\gamma \frac{dv_\beta}{dt} = x_\beta \frac{dv_\gamma}{dt} - x_\gamma \frac{dv_\beta}{dt} ,$$

получаваме

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \iiint_V \rho \left(x_\beta \frac{dv_\gamma}{dt} - x_\gamma \frac{dv_\beta}{dt} \right) dV .$$

Следователно, уравнението за изменение на момента на импулса в интегрален вид е

$$\iiint_V \left\{ \sum_{\delta=1}^3 \left[x_\beta \left(-\rho \frac{dv_\gamma}{dt} + \rho f_\gamma + \frac{\partial P_{\gamma\delta}}{\partial x_\delta} \right) - x_\gamma \left(-\rho \frac{dv_\beta}{dt} + \rho f_\beta + \frac{\partial P_{\beta\delta}}{\partial x_\delta} \right) \right] + (P_{\gamma\beta} - P_{\beta\gamma}) \right\} dV = 0 .$$

Но първите два члена в квадратните скоби са нула поради уравнението за изменение на импулса на частицата. Тогава, предвид произволността на обема V , получаваме

$$P_{\gamma\beta} = P_{\beta\gamma} ,$$

т.е. тензорът на напреженията е симетричен.

54. Уравнение за изменение на механичната енергия на малка частица

Изменението на кинетичната енергия на частица от средата за единица време е

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right) \right] dV = \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} dV = \iiint_V \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} \frac{dv_{\alpha}}{dt} dV .$$

От друга страна, уравнението за изменение на импулса на частицата

$$\rho \frac{dv_{\alpha}}{dt} = \rho f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}$$

позволява да преобразуваме dT/dt до вида

$$\frac{dT}{dt} = \iiint_V \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} \left(\rho f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \right) dV .$$

Използвайки, че

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (v_{\alpha} P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

и

$$\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \omega_{\alpha\beta} + v_{\alpha\beta} ,$$

намираме

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (v_{\alpha} P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (v_{\alpha} P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} .$$

Така получаваме уравнението за изменение на скоростта в интегрален вид

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} dV &= \iiint_V \left[\rho \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} f_{\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (v_{\alpha} P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} \right] dV = \\ &= \iiint_V \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} f_{\alpha} dV + \iint_S \sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_{\alpha} P_{\alpha\beta} n_{\beta} dS - \iiint_V \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} dV \end{aligned}$$

където вторият обемин интеграл е преобразуван с помощта на теоремата на Остроградски.

Тази формула показва, че скоростта на изменение на кинетичната енергия на частицата се определя от мощността на обемните и повърхностните сили за преместване на частицата, както и от мощността на напреженията, свързана с деформацията на частицата.

Предвид произволността на обема V , достигаме до уравнението

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} f_{\alpha} .$$

Ако обемните сили са потенциални

$$f_\alpha = -\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

където u е потенциалната енергия на единица маса, то

$$\sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = -\left(\frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

и уравнението за изменение на кинетичната енергия може да се преобразува до вида

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 v_\alpha \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Това уравнение дава изменението на механичната енергия на единица маса.

55. Първи закон на термодинамиката

Освен кинетична енергия на движение на центъра на масата и потенциална енергия в полето на външни потенциални сили, частицата има и вътрешна енергия. Последната е усреднена по интервал Δt сума от кинетичните енергии на молекулите на частицата спрямо нейния център на масата и енергиите на взаимодействие между молекулите на частицата. Опитът показва, че вътрешната енергия може да се изменя както за сметка на работата на напреженията, така и чрез топлообмен между различни частици. Наличието на топлинни явления води до необходимостта от използване в механиката на непрекъснатите среди на законите на термодинамиката.

В термодинамиката се изучават равновесни състояния на среди. Това са състояния, описвани от независещи от времето параметри, в отсъствие на всякакви стационарни потоци, дължащи се на външни източници. Най-важна величина, характеризираща равновесното състояние на среди и имаща еднаква стойност във всяка част на системата, е температурата T . Равновесните състояния на прости среди се определят от два независими параметъра, например плътност и температура. При това вътрешната енергия и други величини са функция на тези параметри, т.е. тя е функция на състоянието на средата.

Обаче в механиката на непрекъснатите среди, освен равновесни състояния, се изучават и неравновесни състояния, за които не може да се въведе температура в горния смисъл. Въпреки това, приложението на законите на термодинамиката е оправдано, ако се ограничим с разглеждане на сравнително бавни процеси, за които във всеки момент всяка частица може да се счита като намираща се в свое равновесно състояние, а състоянията на съседни частици могат да се считат за близки едно до друго. Такива състояния се наричат локално равновесни.

За среди в локално равновесно състояние, функциите на състоянието зависят от същите независими параметри, както за равновесни състояния, с тази разлика, че параметрите ще зависят от точката в пространството и времето. Например, вътрешната енергия на единица маса $e(\rho, T)$ ще стане функция на \mathbf{r} и t : $e(\rho(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t))$.

Да приложим първия принцип на термодинамиката към частица. Съгласно този принцип, изменението на вътрешната енергия dE на частицата е равна на работата на напреженията $d'A$, свързани с деформация на тялото, и количеството топлина $d'Q$, получено от частицата (работата и количеството топлина не са пълни диференциали). За единица време, този закон има вида

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \frac{d'Q}{dt}.$$

Топлообменът между частиците се определя от плътността на потока на топлината \mathbf{q} , т.е. енергията, предадена за единица време през единица напречна площ на частицата. Тогава полученото количество топлина от частицата за единица време ще се дава с формулата

$$\frac{d'Q}{dt} = - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_{\alpha} n_{\alpha} dS.$$

Тогава първият закон на термодинамиката може да се запише като

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho e dV = \iiint_V \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} dV - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_{\alpha} n_{\alpha} dS.$$

За да получим първия закон в диференциална форма, използваме, че

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho e dV = \iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV,$$

а интеграла по S преобразуваме в интеграл по V по теоремата на Остроградски

$$\frac{d'Q}{dt} = - \iiint_V \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} dV.$$

Така получаваме първия закон на термодинамиката в диференциална форма

$$\rho \frac{de}{dt} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}.$$

56. Уравнение за изменение на пълната енергия на малка частица

Уравнението за изменение на пълната енергия на частица намираме като съберем първия закон на термодинамиката и уравнението за изменение на механичната енергия

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho e dV = \iiint_V \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} dV - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_{\alpha} n_{\alpha} dS, \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \iiint_V \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 v_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_{\alpha} f_{\alpha} \right) dV.$$

Имаме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV &= \iiint_V \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^3 v_\alpha \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} + \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha \right) dV - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha n_\alpha dS = \\ &= \iiint_V \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (v_\alpha P_{\alpha\beta}) dV + \rho \iiint_V \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha dV - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha n_\alpha dS = \\ &= \iiint_V \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha dV + \iint_S \sum_{\alpha, \beta=1}^3 v_\alpha P_{\alpha\beta} n_\beta dS - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha n_\alpha dS \end{aligned}$$

Следователно, скоростта на изменение на пълната енергия на частицата е равна на сумата от мощностите на обемните и повърхностните сили, и на потока на топлина през нейната повърхност.

Уравнението за изменение на пълната енергия в диференциален вид е

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (v_\alpha P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Ако обемните сили са потенциални, $f_\alpha = -\partial u / \partial x_\alpha$ и $du/dt = \partial u / \partial t + \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha \partial u / \partial x_\alpha$, то

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (v_\alpha P_{\alpha\beta}) - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

Алтернативно, уравнението за изменение на пълната енергия на частица намираме

като

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} \right] \right\} dV = \iiint_V \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha dV + \iint_S \sum_{\alpha, \beta=1}^3 v_\alpha P_{\alpha\beta} n_\beta dS - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha n_\alpha dS$$

или

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right] + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) v_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 v_\beta P_{\beta\alpha} + q_\alpha \right] \right\} dV = \iiint_V \rho \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha f_\alpha dV.$$

При потенциални обемни сили получаваме

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) \right] + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) v_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 v_\beta P_{\beta\alpha} + q_\alpha \right] \right\} dV = \iiint_V \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

Тук $\rho(v^2/2 + u + e)$ е пълната енергия на единица маса. Смисълът на втория член в лявата страна изясняваме чрез сравняване със съответния член на уравнението на непрекъснатостта.

Тогава е ясно, че

$$\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) v_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 v_\beta P_{\beta\alpha} + q_\alpha$$

е плътност на потока на енергията. Той е сума от плътността на потока на пълната енергия, мощността на повърхностните сили и плътността на потока на топлината.

Уравнението за изменение на пълната енергия в диференциален вид е

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) \right] + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) v_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^3 v_{\beta} P_{\beta\alpha} + q_{\alpha} \right] = \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

57. Втори закон на термодинамиката. Основни уравнения на механиката на непрекъснатите среди

Съгласно втория принцип на термодинамиката всяка среда в равновесно състояние се характеризира с функция на състоянието наречена ентропия S . При това изменението на ентропията при предаване на непрекъсната среда на количество топлина $d'Q$ при температура T се определя от

$$dS = \frac{d'Q}{T}$$

като процесът на предаване на топлина трябва да протича по-бавно в сравнение с процеса на установяване на равновесие в средата. Такива достатъчно бавни процеси се наричат квазиравновесни (квазистатични). Те имат свойството обратимост. От втория закон следва, че ентропията на изолирана система се запазва.

Ако процесът на предаване на топлина се извършва с крайна скорост, то

$$dS > \frac{d'Q}{T}.$$

Процеси с крайна скорост се наричат неравновесни (нестатични). Те са необратими. В частност, ентропията на изолирана система може само да нараства.

Двете формули могат да се обединят в една

$$TdS = d'Q + d'Q^d,$$

където $d'Q^d > 0$ е частта от механичната енергия, която се превръща необратимо в топлина.

Да приложим втория закон на термодинамиката към частица от средата за единица време

$$\iiint_V \rho T \frac{ds}{dt} dV = - \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 q_{\alpha} n_{\alpha} dS + \iiint_V D dV,$$

където s е ентропията на единица маса, а D е дисипативната функция, дефинирана като скоростта на намаляване на механичната енергия на единица обем от средата.

Диференциалният вид на този закон е

$$\rho T \frac{ds}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + D.$$

В заключение на тази глава ще приведем всички основни уравнения на механиката на непрекъснатите среди, а именно, уравнението за непрекъснатост, уравненията за изменение на импулса, вътрешната енергия и ентропия:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0, \\ \rho \frac{dv_{\alpha}}{dt} &= \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \rho f_{\alpha}, \\ \rho \frac{de}{dt} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 P_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}, \\ \rho T \frac{ds}{dt} &= - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + D.\end{aligned}$$

Това е система от шест частни диференциални уравнения с 17 неизвестни: ρ , e , T , s , D , v_{α} , q_{α} , и $P_{\alpha\beta}$. Така става ясно, че за решаване на тази система за необходими предположения за характера на средата или нейното движение, при които тази система би била затворена.

IX. МЕХАНИКА НА ИДЕАЛЕН И ВИСКОЗЕН ФЛУИДИ

58. Уравнения на движението на идеален флуид. Уравнение на Ойлер. Потоци на импулса и пълната енергия

Идеален флуид наричаме непрекъсната среда, за която при всяка деформация, тангенциалните компоненти на тензора на напреженията са пренебрежими в сравнение с нормалните компоненти, а всички нормални компоненти са равни, т.е. $P_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$, където p е налягането на флуида. Налягането p е положително за газове, но може да е положително или отрицателно за течности, тъй като в тях са възможни и свиващи, и разтягащи напрежения. Отсъствието на тангенциални компоненти означава липса на сили между успоредно движещи се слоеве, т.е. отсъствие на вътрешно триене (вискозитет), а заедно с това отсъства топлообмен ($q_\alpha = 0$) и дисипация на енергия ($D = 0$). Моделът на идеален флуид е приложим в много задачи за движение на течности и газове, за които вискозитетът е пренебрежим.

Уравненията на движението на идеален флуид се получават от уравненията за движение на непрекъсната среда с отчитане на $q_\alpha = 0$ и $D = 0$ във вида

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0, \\ \rho \frac{dv_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \rho f_\alpha, \\ \rho \frac{de}{dt} &= -p \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}, \\ \frac{ds}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнението за изменение на импулса се нарича уравнение на Ойлер. Третото уравнение - първият закон на термодинамиката, може лесно да се приведе към по-познатия вид $de = -pd(1/\rho)$. Последното уравнение има решение $s = s_0$, т.е. движението на идеалния флуид е изоентропийно.

Тъй като в механиката на непрекъснатите среди се изучават локално равновесни състояния, тази система може да се допълни с термодинамичните уравнения на състоянието

$$\begin{aligned}e &= e(\rho, T), \\ p &= p(\rho, T),\end{aligned}$$

наречени съответно калорично и термично уравнения. С това системата уравнения за движение на идеален флуид е затворена - 8-те скаларни уравнения позволяват определянето по принцип на 8-те скаларни функции ρ , T , p , e , s и v_α . Към системата уравнения трябва да се добавят начални и гранични условия.

За да изведем потоците на импулса и пълната енергия, записваме горните уравнения, с използване на уравнението за изменение на механичната енергия, във вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho v_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) = \rho f_\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + e \right) \right] + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + h \right) v_\alpha \right] = \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Тук е предположено, че обемните сили са потенциални и е въведена енталпията на единица маса $h = e + p/\rho$. Тогава, ясно е, че

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p \delta_{\alpha\beta}, \quad E_\alpha = \rho \left(\frac{v^2}{2} + u + h \right) v_\alpha$$

са плътности на потока на импулса и на енергията. Последният е сума от плътността на потока на пълната енергия и мощността на силите на налягането ρv .

59. Статика на идеален флуид

За идеален флуид в покой ($v_\alpha = 0$), уравнението на Ойлер се свежда до т.нар. уравнение на хидростатиката

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}.$$

Да разгледаме няколко прости решения:

- ако обемните сили могат да се пренебрегнат, то получаваме $p = const$, т.е. налягането е еднакво във всички точки (закон на Паскал);
- ако флуидът е несвиваема течност ($\rho = const$) и се намира в хомогенното поле на тежестта ($\mathbf{f} = \mathbf{g}$), то разполагайки началото на координатната ос Oz на повърхността на течността и насочвайки оста вертикално надолу, получаваме $\partial p / \partial x = 0$, $\partial p / \partial y = 0$, $\partial p / \partial z = \rho g$. Оттук следва

$$p = p_0 + \rho g x_3,$$

където p_0 е налягането при $z = 0$. Тази формула определя хидростатичното налягане върху повърхността на течността.

- ако флуидът е насвиваема течност и в нея се намира неподвижно тяло, то силата, с която течността действа върху тялото (с обем V , повърхност S и маса m) е

$$\mathbf{F} = -\iint_S p dS = -\iiint_V \text{grad} p dV = -m\mathbf{g}.$$

Следователно, течността действа върху неподвижно потопено тяло със сила, равна по големина на теглото на изместената от тялото течност, и насочена противоположно на силата на тежестта (закон на Архимед).

- ако флуидът е газ в топлинно равновесие ($T = \text{const}$) и се намира в хомогенното поле на тежестта, то използвайки уравнението на състоянието на идеалния газ $p = \rho kT / M$ (M е масата на молекула от газа), за ос Oz , насочена вертикално нагоре, получаваме $\partial p / \partial x = 0$, $\partial p / \partial y = 0$, $\partial p / \partial z = (kT / m) \partial \rho / \partial z = \rho g$. Оттук следва израз за разпределение на плътността във височина

$$\rho = \rho \exp \left[-\frac{mg}{kT} (z - z_0) \right],$$

който се нарича барометрична формула.

- ако флуидът е газ или течност в топлинно равновесие ($T = \text{const}$) и се намира в хомогенното поле на тежестта, диференциалът на гибсовия потенциал на единица маса $G = e - Ts + p / \rho$ е

$$dG = -s dT + \frac{1}{\rho} dp.$$

Оттук се вижда, че $\nabla p = \rho \nabla G$ така, че уравнението на хидростатиката приема вида $\nabla G = \mathbf{g}$.

За $\mathbf{g} = \text{const}$, насочено в отрицателна посока на оста Oz , имаме $\mathbf{g} = -\nabla(gz)$. Следователно

$$\nabla(G + gz) = 0,$$

откъдето намираме, че навсякъде във флуида е постоянна сумата на гибсовия потенциал и потенциалната енергия на единица маса.

- ако флуидът се удържа заедно от нютонови гравитационни сили с потенциал φ , удовлетворяващ уравнението $\Delta \varphi = 4\pi\gamma\rho$ (γ е гравитационната константа), то силата на единица маса е $-\nabla\varphi$. Уравнението на хидростатиката приема вида $\nabla p = -\rho \nabla\varphi$. Разделяме двете страни на това равенство на ρ и прилагаме операцията div . С резултат получаваме

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = -4\pi\gamma\rho.$$

Ако флуидът не се върти, равновесната му форма ще бъде сфера, а разпределението на плътността и налягането ще бъдат сферично-симетрични. Тогава горното уравнение, написано в сферични координати, ще приеме вида

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi\gamma\rho.$$

60. Стационарно течение на идеален флуид. Интеграл на Бернули

Стационарно наричаме такова течение на флуид, при което полето на скоростта, плътността и налягането остават неизменни, т.е. \mathbf{v} , ρ и p не зависят явно от времето t .

Да разгледаме стационарно течение на идеален флуид при наличие на стационарни потенциални обемни сили, задавани с $\mathbf{f} = -\nabla u$. При тези условия уравнението за изменение на пълната енергия на малка частица добива вида

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u + h \right) v_{\alpha} \right] = 0,$$

където $h = e + p/\rho$ е енталпията на единица маса. Предвид формулата за произволно стационарно скаларно поле или компонента на векторно/тензорно поле $f(\mathbf{r})$:

$\rho df/dt = \partial(\rho f)/\partial t + \operatorname{div}(\rho f\mathbf{v})$, при $\partial(\rho f)/\partial t = 0$ и $f = v^2/2 + u + h$, горното уравнение може да се трансформира до

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u + h \right) = 0.$$

Оттук получаваме интеграла на Бернули

$$\frac{v^2}{2} + u + h = \text{const}.$$

Това равенство показва, че сумата на кинетичната енергия, потенциалната енергия във външно поле и енталпията се запазва по траекторията на дадена частица на флуида.

Да въведем понятието токова линия като линия, във всяка точка на която векторът на скоростта е допирателен. Токовата линия се определя от диференциалните уравнения

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$

При стационарно течение на флуид токовите линии остават неизменни с времето и съвпадат с траекториите на частиците на флуида. Следователно, интегралът на Бернули може да се изкаже така: сумата от кинетичната енергия, потенциалната енергия във външно поле и енталпията е константа по токовите линии като константата е изобщо различна за различните токови линии.

Да разгледаме стационарно течение на несвиваем флуид. За несвиваем флуид първият принцип на термодинамиката $Tds = de + pd(1/\rho)$, при $ds = 0$ и $d\rho = 0$, дава $de = 0$. Затова можем да изпуснем вътрешната енергия от интеграла на Бернули и да го запишем като

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Като пример за приложение на интеграла на Бернули за несвиваем флуид, да разгледаме изтичане на течност от съд с височина h през малка дупка на дъното на съда. Насочваме оста Oz вертикално нагоре с O - на дъното на съда. Считаме скоростта на частиците при свободната повърхност за равна на нула, а скоростта им при преминаване през дупката означаваме с v . Интегралът на Бернули за две точки от токова линия - близо до свободната повърхност и близо до дупката, дава

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = gz + \frac{p}{\rho}.$$

Оттук, за скоростта на изтичане на течността получаваме формулата на Торичели

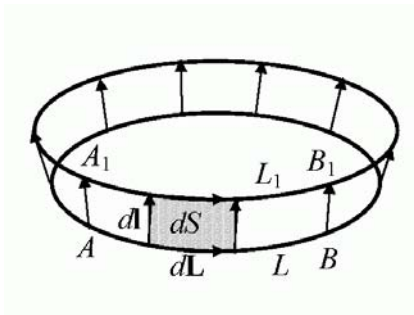
$$v = \sqrt{2gz}.$$

61. Теорема на Томсън за запазване на циркулацията на скоростта. Потенциално течение. Интеграл на Коши

Да разгледаме течение на идеален флуид при наличие на потенциални обемни сили $\mathbf{f} = -\nabla u$. При тези условия е в сила теоремата на Томсон: циркулацията на скоростта по материален контур се запазва, т.е.

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \text{const}.$$

При доказателството на теоремата използваме, че изменението на Γ с времето се дължи на изменение на скоростта \mathbf{v} и на изменение на L . Нека за време dt контурът L се премества до положение L_1 . Тогава изменението на Γ е



$$d\Gamma = \int_L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{L} + \int_{L_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} - \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}.$$

За да намерим разликата на циркулациите по L_1 и L , да разгледаме най-напред част AB от L , която се премества до положение A_1B_1 от L_1 . Да приложим теоремата на Стокс за контура A_1B_1BA

$$\int_{A_1B_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} - \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} - \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_B dt) + \mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{v}_A dt) = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS.$$

Извършваме преход от AB към L и от A_1B_1 към L_1 и виждаме, че търсената разлика на циркулациите по L_1 и L е равна на интеграла по S . За да намерим последния, използваме, че $\mathbf{n} dS = \mathbf{v} dt \times d\mathbf{L}$ и намираме

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS = dt \int_L (\mathbf{v} \times d\mathbf{L}) \cdot \text{rot} \mathbf{v} = dt \int_L (\text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{L}.$$

Тогава

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_L \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} + \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS = \int_L \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{L} = \int_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{L},$$

където е взето предвид, че

$$\text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{v^2}{2} + \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)$$

и, че интеграл по контур от градиент на функция е нула. Подинтегралната функция преобразуваме като използваме уравнението на Ойлер $\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla p - \rho \nabla u$. От първия принцип на термодинамиката $Tds = de + pd(1/\rho)$, изоентропийността на течението $ds = 0$, и определението на енталпията $h = e + p/\rho$, следва $dh = de + pd(1/\rho) + (1/\rho)dp = (1/\rho)dp$ или $\nabla h = (1/\rho)\nabla p$. Тогава уравнението на Ойлер става $d\mathbf{v}/dt = -(1/\rho)\nabla p - \nabla u = -\nabla(h+u)$ и следователно

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\int_L \nabla(h+u) \cdot d\mathbf{L} = 0.$$

С това теоремата на Томсон е доказана.

От тази теорема произтича важното следствие за запазване на вихровото движение на идеален флуид (вихър се нарича величината $\text{rot} \mathbf{v} = 2\omega$). Наистина, от теоремата на Томсон, предвид $\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS$, следва

$$\Gamma = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS = \text{const},$$

т.е. потокът на вихъра се запазва при движението на флуида. Това може да се изкаже нагледно така: вихърът се пренася заедно с движещия се флуид.

Оттук получаваме като следствие, че ако в началния момент $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ във всички точки от флуида (такова поле се нарича безвихрово или потенциално), то това ще остане вярно и в следващите моменти. Така безвихровото (потенциалното) течение ще остане такова. За полето на скоростта при потенциално течение може да се въведе потенциал φ

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Заместваме \mathbf{v} в уравнението на Ойлер във вида $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla(h+u)$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^3 v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (h+u).$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \right)^2 + h + u \right] = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + u = f(t),$$

където $f(t)$ е произволна функция, еднаква за всички точки от флуида. Последното равенство дава т.нар. интеграл на Коши. В частния случай на стационарно течение, интегралът на Коши съвпада с интеграла на Бернули

$$\frac{v^2}{2} + h + u = C$$

с константа C , която е еднаква за всички точки от флуида. Това е частен резултат за стационарно потенциално течение. Напомняме, че интегралът на Бернули е в сила за по-общия случай на стационарно течение, когато C е една и съща само за точките на дадена токова линия (траектория на частица).

62. Уравнения на движението на вискозен флуид. Уравнение на Навие-Стокс

Вискозен флуид наричаме непрекъснатата среда, в която тензорът на напреженията има наред с нормални компоненти, изобщо казано, и тангенциални компоненти. Последните се обуславят от силите на взаимодействие между успоредно движещи се слоеве на флуида и зависят от скоростта на относителното им движение. Това явление се нарича вътрешно триене (вискозитет); то се придружава с дисипация на енергия и потоци на топлина.

Силите на вътрешно триене отчитаме като добавим към тензора на напреженията за идеален флуид члена $\tau_{\alpha\beta}$

$$P_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}.$$

Тъй като членът $\tau_{\alpha\beta}$ трябва да определя сила, зависеща от скоростта на относителното движение на съседни слоеве от флуида, то той трябва да е пропорционален на производната на скоростта по координатите. От симетричността на $\tau_{\alpha\beta}$, следва, че той трябва да е хомогенна линейна форма спрямо $v_{\alpha\beta}$. За намиране на израз за $\tau_{\alpha\beta}$ отбелязваме, че при деформацията на частиците на флуида се изменят изобщо казано както формата, така и обема им. При това, всяка деформация може да се представи като сума от деформация на хлъзгане, при която се изменя само формата като $\sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha\alpha} = 0$, и т.нар. деформация на всестранно свиване, при която се изменя само обема на частиците като $\varepsilon_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta}$. Съответно,

скоростта на всяка деформация $v_{\alpha\beta}$ може да се представи като сума от девиатор и сферичен тензор така

$$v_{\alpha\beta} = \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} \right) + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} .$$

Използвайки това разделяне на деформациите, можем да представим $\tau_{\alpha\beta}$ като линейната комбинация

$$\tau_{\alpha\beta} = 2\eta \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} ,$$

където скаларните коефициенти η и ζ се наричат първи и втори коефициенти на вискозност.

За да получим уравненията на движението на вискозен флуид, изхождаме от уравненията на движението за произволна непрекъсната среда. Преди всичко, уравнението за непрекъснатост остава неизменно.

В уравнението за изменение на импулса заместваме $P_{\alpha\beta}$ с формулата по-горе като преминаваме от $v_{\alpha\beta}$ към $\partial v_{\alpha} / \partial x_{\beta}$

$$\rho \frac{dv_{\alpha}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}} + \rho f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\eta \left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right] .$$

Аналогично, уравнението за изменение на вътрешната енергия получаваме във вида

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + D - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} ,$$

където

$$D = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \tau_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

е дисипативната функция. Може да се докаже, че

$$D = 2\eta \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} \right)^2 + \zeta \left(\sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma\gamma} \right)^2$$

Тогава, от $D > 0$, следва $\eta > 0$ и $\zeta > 0$.

Накрая, уравнението за изменение на ентропията може да се получи във вида

$$\rho T \frac{ds}{dt} = D - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} .$$

Четири уравнения представляват уравненията на движението на вискозен флуид. Системата уравнения става затворена, ако се допълни с уравненията на състоянието

$$e = e(\rho, T), \quad p = p(\rho, T),$$

а също и с емпиричния закон на Фурие

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

където κ е коефициента на топлопроводност ($\kappa > 0$).

Уравненията на движението на вискозен флуид се упростиават, ако η и ζ се считат за константи. Тогава

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\eta \left(\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right] = \sum_{\beta=1}^3 \left[\eta \frac{\partial^2 v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right]$$

и

$$\rho \frac{dv_{\alpha}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}} + \rho f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \left[\eta \frac{\partial^2 v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right]$$

или във векторна форма

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \text{grad div} \mathbf{v}.$$

Това уравнение се нарича уравнение на Навие-Стокс.

Х. МЕХАНИКА НА ИДЕАЛНО ЕЛАСТИЧНО ТЯЛО

63. Основни уравнения на идеално еластично тяло. Закон на Хук.

Тензор на еластичността

Идеалното еластично тяло е модел на твърда деформируема среда, за която напреженията в дадена точка и даден момент зависят от деформацията (и температурата) в същата точка и същия момент, и състоянията му са локално равновесни, а процесите в него са термодинамично обратими ($D = 0$).

Да получим основните уравнения на идеално еластично тяло. Преди всичко, в отличие от флуидите, преместването $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_0$ на частиците на тялото остава малко през цялото време ($\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t_0)$). Както ще видим по-долу, в повечето случаи от практическо значение, тензорът на напреженията зависи от тензора на деформациите, но не от скоростта на деформациите. Ето защо е удобно да се използва преместването вместо скоростта за описание на динамиката на тялото.

Заедно с преместването, малка е и скоростта и можем да напишем

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \approx \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt} &= \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\varepsilon_{\alpha\beta} \approx \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t} = v_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Уравненията на движението на идеално еластично тяло получаваме, изхождайки от уравненията на движението на произволна непрекъсната среда като заместим скоростта с преместването. Преди всичко, плътността на тялото се изменя малко в сравнение с плътността ρ_0 на недеформираното тяло. Тогава, уравнението за непрекъснатост записваме като $d\rho/\rho = -\text{div}\mathbf{v}dt = -\text{div}\mathbf{u}$, интегрираме го и предвид $\rho \approx \rho_0$, получаваме

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\text{div}\mathbf{u}.$$

Уравнението за изменение на импулса, предвид $\rho \approx \rho_0$, записваме като

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \sum_\beta \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho_0 f_\alpha.$$

Уравненията за изменение на вътрешната енергия и на ентропията, при $\rho \approx \rho_0$, $E = \rho_0 e$, $S = \rho_0 s$ (E, S - енергия и ентропия на единица обем), преработваме до вида

$$dE = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + TdS.$$

Системата от получените три уравнения представлява система уравнения на движението на идеално еластично тяло.

Последното уравнение позволява да се определят $P_{\alpha\beta}$ и T

$$P_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_\varepsilon.$$

Чрез трансформация на Лежандър $F = E - TS$ получаваме друга термодинамична функция - свободната енергия F . За нея $dF = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} - SdT$ и

$$P_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right)_T, \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\varepsilon.$$

Да разгледаме случая, когато деформацията на тялото и изменението на температурата са достатъчно малки, а напреженията зависят линейно от тях:

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} C_{\alpha\beta,\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} - \alpha_{\alpha\beta} (T - T_0).$$

Коефициентите $C_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ се наричат модули на еластичност, а $\alpha_{\alpha\beta}$ - коефициенти на термоеластичност; T_0 е температурата на недеформираното тяло. Това съотношение представлява закона на Хук в най-общ вид. В случая свободната енергия има вида

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} C_{\alpha\beta,\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} - \alpha_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} (T - T_0) + F_0(T).$$

Както се вижда, еластичните свойства на едно тяло се определят от тензор от четвърти ранг $C_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, който се нарича тензор на еластичността. В общия случай, един такъв тензор има $3^4 = 81$ независими компоненти. В конкретния случай, $C_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ има симетрия спрямо размятане на индекси $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\gamma \leftrightarrow \delta$ и $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$, и максималният брой на независимите компоненти е 21. Ако тялото има някаква симетрия, броят на независимите компоненти може да е по-малък от 21.

64. Деформация на изотропно тяло. Модули на Ламе. Уравнение на Ламе

Да разгледаме деформацията на изотропно тяло при постоянна температура.

Деформацията на изотропно тяло може да се представи като сума от деформация на хлъзгане и деформация на всестранно свиване. При първата се изменя само формата, но не и обемът, и следователно тя се определя от девиатор. При втората, формата остава същата, но се променя обемът; такава деформация се определя от диагонален тензор на деформациите с еднакви диагонални елементи, т.е. от сферичен тензор. Математически, това разбиване на всяка деформация като сума от деформация на хлъзгане и всестранно свиване се записва като сумата на девиатор и сферичен тензор така

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} \right) + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} .$$

Това води до представяне на тензора на напреженията като линейна комбинация от тензорите на деформация на хлъзгане и всестранно свиване

$$P_{\alpha\beta} = 2\mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} \right) + K \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} .$$

Величините K и μ се наричат съответно модул на всестранно свиване и модул на хлъзгане.

На тензора на напреженията отговаря свободна енергия, давана от

$$F = \mu \sum_{\alpha\beta} \left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} \right)^2 + \frac{K}{2} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma}^2 .$$

В състояние на термодинамично равновесие, т.е. при $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, свободната енергия има минимум $F = 0$. Следователно, свободната енергия трябва да е положително-дефинитна форма на $\varepsilon_{\alpha\beta}$, откъдето

$$K > 0, \mu > 0 .$$

За практическите приложения е удобно да обърнем закона на Хук. За целта намираме сумата на диагоналните елементи на $P_{\alpha\beta}$

$$\sum_{\gamma} P_{\gamma\gamma} = 3K \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma\gamma} .$$

Тогава, от закона на Хук получаваме

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \left(P_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} P_{\gamma\gamma} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} P_{\gamma\gamma} .$$

Накрая, в предположение за постоянни K и μ , можем да получим уравнението за изменение на импулса за изотропно тяло, т.нар. уравнение на Ламе. За целта пресмятаме

$$\sum_{\beta} \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = 2\mu \sum_{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \left(K - \frac{2\mu}{3}\right) \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \frac{\partial \varepsilon_{\gamma\gamma}}{\partial x_{\beta}} = \left(\frac{\mu}{3} + K\right) \sum_{\beta} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \mu \sum_{\beta} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2}.$$

С използване на този резултат, достигаме до уравнението на Ламе

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{3} + K\right) \sum_{\beta} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \mu \sum_{\beta} \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} + \rho_0 f_{\alpha}$$

или във векторен вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{3} + K\right) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}.$$

Често пъти вместо K се използва величината $\lambda = K - 2\mu/3$; λ и μ се наричат модули на Ламе.

Замяната на K с λ води до уравнението на Ламе във вида

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f}.$$

65. Уравнение за равновесие на изотропни тела. Хомогенни деформации

Да разгледаме деформацията на изотропно тяло, намиращо се в покой при постоянна температура. Такава деформация се подчинява на уравнението

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} = 0$$

Важен практически случай е този, при който деформациите се предизвикват от повърхностни сили. Тогава, уравнението за равновесие е

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = 0,$$

където външните повърхностни сили се отчитат чрез граничните условия: ако \mathbf{f}^S е зададена външна повърхностна сила, то тя трябва да се уравновесява от силата, предизвикана от напреженията в тялото. Следователно, в равновесие трябва да се изпълнява $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} dS_{\beta} = f_{\alpha}^S dS$ или, предвид $dS_{\beta} = n_{\beta} dS$ (\mathbf{n} е външен единичен вектор към повърхността S),

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} n_{\beta} = f_{\alpha}^S.$$

Най-прост случай на деформация на хомогенно тяло е т.нар. хомогенна деформация, при която компонентите на тензора на деформациите са постоянни в цялото тяло. Тогава постоянни са и компонентите на тензора на напреженията и техните компоненти могат да се

определят от граничните условия. Да разгледаме няколко примера на хомогенни деформации. Ще предположим, че е в сила законът на Хук

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \left(P_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} P_{\gamma\gamma} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} P_{\gamma\gamma}.$$

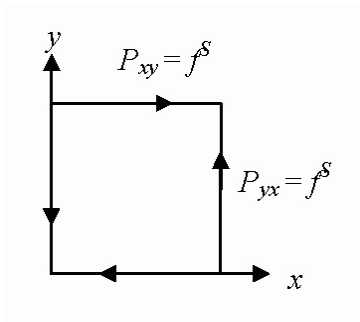
Нека тялото е подложено на всестранно равномерно свиване. Това означава, че на единица площ от околната повърхност на тялото действа една и съща сила сила, т.е.

$P_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$, където p е налягането. Тогава, от закона на Хук следва $\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha} = -p/K$ или

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}.$$

Следователно, при такава деформация се променя само обемът на тялото като относителното изменение на обема зависи само от налягането и модула на всестранно свиване.

Да разгледаме деформация на хлъзгане на тяло с форма на куб.

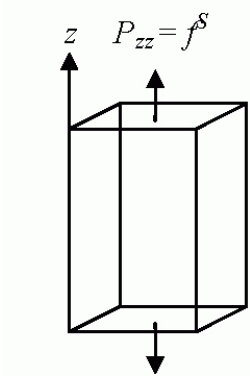


Нека осите на координатната система са ориентирани по ръбовете на куба и върху стените му действат тангенциални сили f^S (вж. фиг.). Очевидно, отлични от нула компоненти на $P_{\alpha\beta}$ са $P_{xy} = P_{yx} = f^S$. Тогава

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{f^S}{2\mu},$$

т.е. компонентите $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}$ зависят само от външната сила и модула на хлъзгане μ .

Да разгледаме разтягане (свиване) на пръчка с форма на паралелепипед, върху основите на който действат равни по големина нормални сили f^S (вж. фиг.). Ориентираме осите на координатната система по ръбовете на паралелепипеда.



Тогава, отлична от нула е само компонентата $P_{zz} = f^S$ на тензора на напреженията и

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K} \right) f^S, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K} \right) f^S.$$

От тези съотношения се вижда, че разтягането на пръчката по дължина се съпровожда с напречно свиване. Отношението на относителното свиване и относителното разтягане се нарича

коэффициент на Поасон ν и се дава с

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}.$$

От $K > 0$ и $\mu > 0$, следва

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

Относителното разтягане е удобно да се представи във вида

$$\varepsilon_{zz} = \frac{f^s}{E},$$

където

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}$$

се нарича модул на Юнг. Лесно се получават μ, K чрез ν, E

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

66. Еластични вълни в изотропни среди

Изменението на положението на частиците на еластично тяло с времето е свързано с изменение на температурата на тялото. Обаче разпространението на еластични вълни по тялото става достатъчно бързо в сравнение с топлообмена между частиците. Затова еластичните вълни могат да се считат за изоентропийни процеси. При такива процеси вместо обичайните (изотермични) стойности на еластичните модули трябва да се подразбират адиабатните им стойности.

Динамиката на еластична среда се определя от уравнението на Ламе

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \frac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u}.$$

Да разгледаме плоска вълна в неограничена среда, за която $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$. Тогава горното уравнение приема вида

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_\beta \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta} + \mu \sum_\beta \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2}.$$

Оттук получаваме

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0.$$

Тук

$$c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{E}{(1+\nu)},$$

Горните уравнения са вълнови уравнения в едно измерение, а c_l и c_t са скоростите на тези вълни за отделните компоненти на \mathbf{u} . Така еластичната вълна представлява две независимо разпространяващи се вълни. В едната от тях (u_x), преместването е насочено по посока на разпространението на вълната; такава вълна се нарича надлъжна; тя се разпространява със скорост c_l . В другата вълна (u_y, u_z), преместването е в равнина, перпендикулярна на посоката на разпространение; такава вълна се нарича напречна; тя се разпространява със скорост c_t .

Имаме

$$\frac{c_l^2}{c_t^2} = 2 \frac{(1-\nu)}{1-2\nu}.$$

Предвид $-1 \leq \nu \leq 1/2$, получаваме, че $c_l > c_t \sqrt{2}$.

Литература

1. Н. Goldstein, Classical Mechanics (Голдстейн, Г., Классическая механика, рус.).
2. И. Златев, Теоретична механика.
3. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. 1, Механика (рус.).