Учебно помагало

за задачи по ММФ-1

Гл. ас. Петко Митев

I. ВЕКТОРЕН И ТЕНЗОРЕН АНАЛИЗ

Тема: Алгебра на векторни и тензорни величини. Производни полета

Теоретичен минимум

***Означения:** $u, v, \ldots$ - скалари (*константни*);
$A, B, C, \ldots$ - вектори (*константни*);
Φ, Ψ - тензори (*константни*);
$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

1) Скаларно произведение на два вектора

☞ $\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_k . B_k}$ $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$, $\vec{A}.\vec{A} = A^2$, $|A| = \sqrt{A^2} = \sqrt{A_k . A_k}$.

2) Векторно произведение на два вектора

☞ $(\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$, или още ☞ $\boxed{(\vec{A} \times \vec{B})_i = -A_m \varepsilon_{min} B_n}$.

☞ $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$, ☞ $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.

3) Тензорно произведение на два вектора

☞ $\left\{\vec{A}, \vec{B}\right\} = \begin{vmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{vmatrix}$, и още ☞ $\boxed{\left\{\vec{A}, \vec{B}\right\}_{ij} = A_i B_j}$.

4) Векторно произведение на вектор с тензор

☞ $\boxed{(A.\Phi)_i = A_j \, \Phi_{ji}}$, и ☞ $\boxed{(\Phi.A)_i = \Phi_{ij} \, A_j}$.

5) Тензорно произведение на вектор с тензор

☞ $\boxed{(A \times \Phi)_{ij} = -A_m \varepsilon_{min} \Phi_{nj}}$ и ☞ $\boxed{(\Phi \times A)_{ij} = -\Phi_{im} \varepsilon_{mjn} A_n}$.

6) Тензорно произведение на два тензора

☞ $\boxed{(\Phi.\psi)_{ij} = \Phi_{ik} \, \psi_{kj}}$.

Полезни съотношения:

☞ следа (*шпур*) на тензор: $Sp\Phi = \Phi_{ii} \equiv \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}$, ☞ $\Phi_{ij}^{tr} = \Phi_{ji}$.

☞ $\delta_{ii} \equiv \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

☞ $\varepsilon_{lik}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{im}\,\delta_{kn} - \delta_{in}\,\delta_{km}$, $\varepsilon_{imn}.\varepsilon_{mnj} = 2.\delta_{ij}$, $\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{ijk} = 6$.

♦ **Многократни произведения на вектори и тензори**
А.) Двойно векторно произведение на три вектора

☞ $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}}$ и ☞ $\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{C})\vec{A}}$.

Б.) Смесено произведение на три вектора

☞ $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$, и още ☞ $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C})=\left| \begin{matrix} (\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} \\ \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) \end{matrix} \right.$.

Свойства: $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C})=(\vec{C}.\vec{A}.\vec{B})=(\vec{B}.\vec{C}.\vec{A})$, но $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C})=-(\vec{B}.\vec{A}.\vec{C})=-(\vec{A}.\vec{C}.\vec{B})$.

В.) Векторно-тензорни произведения на три вектора

☞ $\boxed{\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}=(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}}$, ☞ $\boxed{\{\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\}=\vec{A}\times\{\vec{B},\vec{C}\}}$, ☞ $\boxed{\{\vec{A},\vec{B}\times\vec{C}\}=\{\vec{A},\vec{B}\}\times\vec{C}}$

Г.) По-сложно дефинирани произведения на два и повече вектори

$\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})^2\equiv(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}^2\vec{B}^2-(\vec{A}.\vec{B})^2}$ и

$\boxed{(\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q})=(\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q})-(\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P})}$.

🕮 **Производни (*диференциални*) полета**

$$\boxed{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij},\quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\equiv 0,\quad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_j}\equiv 0,\quad \delta_{ij}A_j=A_i,\quad \delta_{ij}\Phi_{jk}=\Phi_{ik},\quad \delta_{sk}\varepsilon_{ikj}=\varepsilon_{isj}}$$

① **Градиент** $grad$ **от скаларно поле (*с векторен аргумент*)**

☞ $\boxed{grad_i\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$, или още ☞ $\boxed{grad\,u=\nabla u\equiv\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)}$

Свойства:

☞ $\boxed{grad(u\,v)=u\,grad\,v+v\,grad\,u}$;

☞ $\boxed{grad(U.V)=U.Grad\,V+U\times rot\,V+V.Grad\,U+V\times rot\,U}$.

☞ $\boxed{grad\,r=\dfrac{\vec{r}}{r}=\vec{r}_0}$, ☞ $\boxed{grad\,(\vec{A}.\vec{r})=\vec{A}}$, ☞ $\dfrac{\partial u(r)}{\partial n}=\vec{n}.grad\,u(r)$.

Ако V е векторно поле, то

☞ $grad\,|V| \quad\rightarrow\quad grad_i\,|V|=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{V_kV_k}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{V_kV_k}}2V_k\dfrac{\partial V_k}{\partial x_i}=\dfrac{V_k}{|V|}Grad_{ik}V$,

т.е.

👍 $$grad\,|V|=\frac{(Grad\,V).V}{|V|}.$$

② **Дивергенция** div **от векторно поле**

☞ $\boxed{divU = \dfrac{\partial U_i}{\partial x_i}}$, или още ☞ $\boxed{divU = \nabla.U = \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3}}$.

Свойства:

☞ $\boxed{div(uU) = u\ divU + U.grad\,u}$, ☞ $\boxed{div(U \times V) = V.rotU - U.rotV}$, ☞ $\boxed{div\,\vec{r} = 3}$.

③ **Ротация** *rot* **от векторно поле**

☞ $\boxed{rot_i\,U = -\,\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial U_n}{\partial x_m}}$, или още ☞ $\boxed{rotU = \nabla \times U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}}$.

Свойства:

☞ $\boxed{rot(uU) = u\,rot\,U - U \times grad\,u}$; ☞ $\boxed{rot\,\vec{r} = 0}$.

☞ $\boxed{rot\,(U \times V) = U\,divV - V\,divU - U\,.Grad\,V + V\,.Grad\,U}$.

④ **Градиент** *Grad* **от векторно поле**

☞ $\boxed{Grad_{ij}\,U = \dfrac{\partial U_j}{\partial x_i} \equiv \{\nabla, U\}_{ij}}$, или още ☞ $\boxed{Grad\,U = \{\nabla, U\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial U_3}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}}$

Свойства:

☞ $Grad\,(uU) = u\,Grad\,U + \{grad\,u, U\}$; ☞ $Grad\,\vec{r} = \delta$ - *единичен тензор.*

⑤ **Дивергенция** *Div* **от тензорно поле**

☞ $\boxed{Div_i\,\Phi = \dfrac{\partial \Phi_{ji}}{\partial x_j}}$, или още ☞ $\boxed{Div\,\Phi = \nabla.\Phi}$ - *вектор.*

⑥ **Ротация** *Rot* **от тензорно поле**

☞ $\boxed{Rot_{ij}\,\Phi = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial \Phi_{nj}}{\partial x_m}}$, или още ☞ $\boxed{Rot\,\Phi = \nabla \times \Phi}$ - *тензор.*

❖ **Лапласов оператор,** приложен спрямо:

А) скаларно поле

☞ $\boxed{\Delta u = div\,grad\,u = \nabla.(\nabla u) = \nabla.\nabla u = \nabla^2 u}$ **- скалар.**

Б) векторно поле

☞ $\boxed{\Delta U = grad\,divU - rot\,rot\,U}$ **- вектор.**

❖ **Многократни производни полета**

а) $div\, rotU = \nabla.(\nabla \times U) = (\nabla.\nabla.U) = (\underbrace{\nabla \times \nabla}_{0}).U \equiv 0$;

б) $rot\, grad\, u = \nabla \times \nabla u \equiv (\nabla \times \nabla)\, u \equiv 0$,

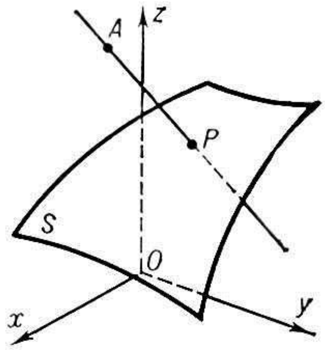
обаче:

в) $rot\, rot\, U = \nabla \times (\nabla \times U) \neq 0$.

❖ Разложение на функция с векторен аргумент в ред на Тейлър

$$F(\vec{r} + \vec{a}) = F(\vec{r}) + (\vec{a}\nabla)F(\vec{r}) + \frac{1}{2!}(\vec{a}\nabla)^2 F(\vec{r}) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\vec{a}\nabla)^n F(\vec{r}) \equiv e^{(\vec{a}\nabla)} F(\vec{r}).$$

❖ Производна на скаларна функция с векторен аргумент в дадена посока (*нормална производна*)



Нека $f = f(\vec{r})$, а $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ е единичен вектор. По дефиниция за производна на f в направление $\vec{n}$, която се бележи с $\frac{\partial f}{\partial n}$, представлява частното от нарастването на функцията $\Delta f = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$ при едно безкрайно малко преместване $d\vec{r} = |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}$ в посока $\vec{n}$, разделено на големината $|\,d\vec{r}\,|$ на това преместване, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})}{|\,d\vec{r}\,|} = \frac{\partial f}{|\,d\vec{r}\,|} \equiv \frac{\partial f}{|\,d\vec{r}\,|}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{|\,d\vec{r}\,|}.$$

По определение $\frac{\partial f}{\partial x_i} = grad_i\, f$. А ако вземем под внимание още, че $d\vec{r} = |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n} \equiv |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}_1 + |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}_2 + |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}_3$, то очевидно за коя да е проекция на този вектор на безкрайно-малкото преместване ще имаме $dx_i = |\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}_i$, откъдето ще следва $\frac{dx_i}{|\,d\vec{r}\,|} = \frac{|\,d\vec{r}\,|\;\vec{n}_i}{|\,d\vec{r}\,|} = \vec{n}_i$. След заместването на тези производни в израза за производната по направление, ще имаме

☞ $$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{|\,d\vec{r}\,|} = grad_i\; f.\vec{n}_i = \vec{n}.grad\;\, f.$$

❖ Тензори

☞ транспониран тензор: $\Phi_{ij}^{tr} = \Phi_{ji}$.

☞ симетричен и антисиметричен тензори:

✓ за симетричен тензор: $\Phi_{ji} = +\Phi_{ij}$;

✓ за антисиметричен тензор: $\Phi_{ji} = -\Phi_{ij}$.

☞ Представяне на произволен тензор чрез сума от симетричен и антисиметричен тензори:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{2}\Phi_{ij} + \frac{1}{2}\Phi_{ij} = \frac{1}{2}\Phi_{ij} + \frac{1}{2}\Phi_{ij} + \underbrace{\frac{1}{2}\Phi_{ji} - \frac{1}{2}\Phi_{ji}}_{0} =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\Phi_{ij}+\frac{1}{2}\Phi_{ji}\right)+\left(\frac{1}{2}\Phi_{ij}-\frac{1}{2}\Phi_{ji}\right)=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Phi_{ij}+\Phi_{ji}\right)}_{\Phi_{ij}{}^{S}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Phi_{ij}-\Phi_{ji}\right)}_{\Phi_{ij}{}^{A}}.$$

Нека покажем, че $\Phi_{ij}{}^{S}$ и $\Phi_{ij}{}^{A}$ са действително симетричен и антисиметричен тензори съответно. За целта нека разменим индексите им, т.е. транспонираме тензорите:

$$\Phi_{ji}{}^{S}=\frac{1}{2}\left(\Phi_{ji}+\Phi_{ij}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\Phi_{ij}+\Phi_{ji}\right)=\Phi_{ij}{}^{S}\quad\Rightarrow \text{ симетричен тензор.}$$

$$\Phi_{ji}{}^{A}=\frac{1}{2}\left(\Phi_{ji}-\Phi_{ij}\right)\equiv-\frac{1}{2}\left(\Phi_{ij}-\Phi_{ji}\right)=-\Phi_{ij}{}^{A}\quad\Rightarrow \text{ антисиметричен тензор.}$$

☞ Представяне на вектор чрез антисиметричен тензор Ψ_{mn} :

$$F_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{\min}\Psi_{mn}.$$

✵ **Задача:** Да се докаже, че $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$.

Доказателство: по определение

$$(A\times B)_i=-\varepsilon_{\min}A_mB_n=\varepsilon_{imn}A_mB_n=-\varepsilon_{inm}A_mB_n=\varepsilon_{nim}B_nA_m=$$
$$=-(-\varepsilon_{nim}B_nA_m)=-B\times A,\ \text{к.т.д.}$$

✵ **Задача:** Да се докажат следните съотношения за символите на Леви-Чевита:

☞ $\varepsilon_{lik}.\varepsilon_{lmn}=\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}$, ☞ $\varepsilon_{imn}.\varepsilon_{mnj}=2.\delta_{ij}$, ☞ $\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{ijk}=6$.

Доказателство:

$$\varepsilon_{lik}.\varepsilon_{lmn}=\det\begin{pmatrix}\delta_{ll} & \delta_{lm} & \delta_{\ln}\\ \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{pmatrix}=\delta_{ll}(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})+\delta_{lm}(\delta_{in}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{kn})+\delta_{\ln}(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})=$$
$$=3(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})+(\delta_{in}\delta_{kl}\delta_{lm}-\delta_{il}\delta_{lm}\delta_{kn})+(\delta_{il}\delta_{\ln}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}\delta_{\ln})=$$
$$=3(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})+(\delta_{in}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kn})+(\delta_{in}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kn})=$$
$$=3(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})-2(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})=(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}).$$

За другите две съотношения:

☞ $\varepsilon_{imn}.\varepsilon_{mnj}=\varepsilon_{mni}.\varepsilon_{mnj}=\ldots$ по първата формула … $=$

$$=\delta_{nn}\delta_{ij}-\delta_{nj}\delta_{in}=3\delta_{ij}-\delta_{in}\delta_{nj}=3\delta_{ij}-\delta_{ij}=2\delta_{ij}.$$

Накрая по току-що доказаната формула имаме:

☞ $\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{ijk}=2\delta_{kk}=2.3=6$.

✵ **Задача:**

Да се докажат формулите за двойно векторно произведение на три вектора

☞ $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}}$, ☞ $\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{C})\vec{A}}$,

Доказателство:

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_i=-\varepsilon_{\min}A_m(\vec{B}\times\vec{C})_n=-\varepsilon_{\min}A_m(-\varepsilon_{pnq}B_pC_q)=$$

$$= \varepsilon_{\min} . \varepsilon_{pnq} A_m B_p C_q = -\varepsilon_{nmi} . \varepsilon_{npq} A_m B_p C_q =$$
$$= -(\delta_{mp}\delta_{iq} - \delta_{mq}\delta_{ip}) A_m B_p C_q = -\delta_{mp}\delta_{iq} A_m B_p C_q + \delta_{mq}\delta_{ip} A_m B_p C_q =$$
$$= -(\delta_{mp} A_m)(\delta_{iq} C_q) B_p + A_m(\delta_{ip} B_p)(\delta_{mq} C_q) = A_m C_m B_i - A_p B_p C_i =$$
$$= (\vec{A}.\vec{C})\vec{B}_i - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}_i = \left[(\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}\right]_i ,$$

с което доказателството е завършено.

Формулата $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C})\,\vec{A}$ се доказва аналогично, и очевидно $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$, което показва че при двойно векторно произведение **<u>не е в сила</u>** асоциативния закон.

✸ **Задача:** Да се докажат свойствата на смесено произведение на три вектора

☞ $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}) = (\vec{C}.\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{C}.\vec{A})$, и ☞ $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}) = -(\vec{B}.\vec{A}.\vec{C}) = -(\vec{A}.\vec{C}.\vec{B})$,

Доказателство: нека докажем, напр., че $(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}) = (\vec{C}.\vec{A}.\vec{B})$:

$$(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B})_m . \vec{C}_m = -\varepsilon_{imj} A_i B_j C_m = -\varepsilon_{imj} C_m A_i B_j =$$
$$= \varepsilon_{mij} C_m A_i B_j = -\varepsilon_{mji} C_m A_i B_j = (-\varepsilon_{mji} C_m A_i) B_j = (\vec{C} \times \vec{A})_j B_j =$$
$$= (\vec{C} \times \vec{A}).\vec{B} = (\vec{C}.\vec{A}.\vec{B}) \text{, к.т.д.}$$

Още по-елементарно това може да бъде доказано с помощта на свойството на детерминантите, с които се представя смесеното произведение на три вектора, че те променят знака на стойността си при размяна местата на кои да е два реда от нея:

$$(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Така горното равенство се явява пряк резултат от факта, че двукратна размяна на местата на два реда в детерминантата не променя изобщо стойността на тази детерминанта, респективно на самото смесено произведение.

✸ **Задача:**

Да се докажат следните формули за векторно-тензорни произведения на три вектора

А) ☛ $\boxed{\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\} = (\vec{A}.\vec{B})\,\vec{C}}$, и ☞ $\boxed{(\vec{A}.\vec{B})\,\vec{C} = \vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}}$

Доказателство:

$$[\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}]_i = A_j\{\vec{B},\vec{C}\}_{ji} = A_j B_j C_i = (\vec{A}.\vec{B})C_i = [(\vec{A}.\vec{B})C]_i \,,$$

а за обратното

$$[(\vec{A}.\vec{B})C]_i = (\vec{A}.\vec{B})C_i = A_j B_j C_i = A_j\{\vec{B},\vec{C}\}_{ji} = [\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}]_i \,.$$

Б) ☞ $\boxed{\{\vec{A} \times \vec{B},\vec{C}\} = \vec{A} \times \{\vec{B},\vec{C}\}}$, и ☞ $\boxed{\vec{A} \times \{\vec{B},\vec{C}\} = \{\vec{A} \times \vec{B},\vec{C}\}}$

Доказателство:

$$\{\vec{A} \times \vec{B},\vec{C}\}_{ij} = (\vec{A} \times \vec{B})_i C_j = -\varepsilon_{\min} A_m B_n C_j = -A_m \varepsilon_{\min}\{\vec{B},\vec{C}\}_{nj} = [\vec{A} \times \{\vec{B},\vec{C}\}]_{ij}$$

В) ☞ $\boxed{\{\vec{A},\vec{B}\times\vec{C}\}=\{\vec{A},\vec{B}\}\times\vec{C}}$.

Доказателство:

$$\{\vec{A},\vec{B}\times\vec{C}\}_{ij}=A_i(\vec{B}\times\vec{C})_j=-A_i\varepsilon_{mjn}B_mC_n=-A_iB_m\varepsilon_{mjn}C_n=-\{\vec{A},\vec{B}\}_{im}\varepsilon_{mjn}C_n=[\{\vec{A},\vec{B}\}\times\vec{C}]_{ij}$$

✸ **Задача:**

Да се докажат следните формули:

☞ $\boxed{(\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q})=(\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q})-(\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P})}$

☞ $\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})^2\equiv(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}^2\vec{B}^2-(\vec{A}.\vec{B})^2}$

Доказателство 1: $(\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q})=(\vec{M}\times\vec{N})_k(\vec{P}\times\vec{Q})_k=$

$=(-\varepsilon_{mkn}M_mN_n)(-\varepsilon_{pkq}P_pQ_q)=\varepsilon_{mkn}\varepsilon_{pkq}M_mN_nP_pQ_q=\varepsilon_{kmn}\varepsilon_{kpq}M_mN_nP_pQ_q=$

$=(\delta_{mp}\delta_{nq}-\delta_{mq}\delta_{np})M_mN_nP_pQ_q=\delta_{mp}\delta_{nq}M_mN_nP_pQ_q-\delta_{mq}\delta_{np}M_mN_nP_pQ_q=$

$=M_mN_nP_mQ_n-M_mN_nP_nQ_m=(M_mP_m)(N_nQ_n)-(M_mQ_m)(N_nP_n)=$

$=(\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q})-(\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P}$, к.т.д.

Доказателство 2: $(\vec{A}\times\vec{B})^2\equiv(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{B})_k(\vec{A}\times\vec{B})_k=$

$=(-\varepsilon_{mkn}A_mB_n)(-\varepsilon_{pkq}A_pB_q)=\varepsilon_{mkn}\varepsilon_{pkq}A_mB_nA_pB_q=\varepsilon_{kmn}\varepsilon_{kpq}A_mB_nA_pB_q=$

$=(\delta_{mp}\delta_{nq}-\delta_{mq}\delta_{np})A_mB_nA_pB_q=\delta_{mp}\delta_{nq}A_mB_nA_pB_q-\delta_{mq}\delta_{np}A_mB_nA_pB_q=$

$=A_mB_nA_mB_n-A_mB_nA_nB_m=(A_mA_m)(B_nB_n)-(A_mB_m)(B_nA_n)=\vec{A}^2\vec{B}^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$

***Забележка:** *Тази формула може да бъде получена като частен случай на първата при* $M\equiv P\to A$ *и* $N\equiv Q\to B$.

Задачата може да бъде решена и чрез свойствата на смесено и двойно векторно произведения:

$(\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q})=(\vec{M}\times\vec{N})_k(\vec{P}\times\vec{Q})_k=(\vec{M}\times\vec{N}).\vec{Z}=(\vec{M}.\vec{N}.\vec{Z})=$

$=\vec{M}.(\vec{N}\times\vec{Z})=\vec{M}.[\vec{N}\times(\vec{P}\times\vec{Q})]=\vec{M}.[(\vec{N}.\vec{Q})\vec{P}-(\vec{N}.\vec{P})\vec{Q}]=$

$=(\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q})-(\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P}$, к.т.д.

✸ **Задача:**

Да се докажат следните формули:

☞ $\boxed{grad\ r=\frac{\vec{r}}{r}}$, и ☞ $\boxed{grad\ (\vec{A}.\vec{r})=\vec{A}}$.

Доказателство 1:

$$grad_i\ r\equiv grad_i\,|\,\vec{r}\,|=\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_k{}^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k{}^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_k{}^2)^{\frac{1}{2}-1}.2x_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i}=\frac{x_k}{\sqrt{x_k{}^2}}\delta_{ik}=\frac{x_i}{r}=\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)_i$$

Доказателство 2:

$$grad_i\,(\vec{A}.\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x_i}(A_kx_k)=A_k\frac{\partial x_k}{\partial x_i}=A_k\delta_{ik}=\left(\vec{A}\right)_i$$

☞ $\frac{\partial u(r)}{\partial n}=\vec{n}.grad\ u(r)$ - нормална производна.

✸ **Задача:**

Да се докаже следната формула за градиент:

☞ $\boxed{grad(U.V)=U.Grad\,V+U\times rot V+V.Grad\,U+V\times rot U}$.

Доказателство чрез правилата за работа с „набла”-оператор:

$grad(U.V)=\nabla(U.V)=\nabla(U_C.V)+\nabla(U.V_C)$.

Трябва да извършим такива преобразувания, че **„набла”-операторът да действа** (*директно*) **върху неиндексирана величина**, като при това индексираната трябва да е **пред него**. За целта използваме две неща:

- формулата за векторно-тензорно произведение на три вектора $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}=\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}$, и

- развитието на двойно векторно произведение $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$, като формулата за него ще приложим, изисквайки на първо място в нея (*т.е. най-вляво*) да стои индексираната величина. Така ще имаме:

$$U_C\times(\nabla\times V)=(U_C.V)\nabla-(U_C.\nabla)V\equiv\nabla(U_C.V)-(U_C.\nabla)V,$$

откъдето

$$\nabla(U_C.V)=(U_C.\nabla)V+U_C\times(\nabla\times V)=U_C\{\nabla,V\}+U_C\times(\nabla\times V).$$

По аналогичен начин преработваме и втория член

$$V_C\times(\nabla\times U)=(V_C.U)\nabla-(V_C.\nabla)U\equiv\nabla(V_C.U)-(V_C.\nabla)U,$$

откъдето

$$\nabla(V_C.U)=(V_C.\nabla)U+V_C\times(\nabla\times U)=V_C\{\nabla,U\}+V_C\times(\nabla\times U).$$

Заместваме с така разработените компоненти, и получаваме окончателно

$$grad(U.V)=\nabla(U_C.V)+\nabla(U.V_C)=U_C\{\nabla,V\}+U_C\times(\nabla\times V)+V_C\{\nabla,U\}+V_C\times(\nabla\times U)=$$
$$=U.Grad\,V+U\times rot\,V+V.Grad\,U+V\times rot\,U,$$ к.т.д.

✸ **Задача:** Да се определят: (а) $grad\,r^{\alpha}=?$, (б) $grad\,(A.r)^5=?$

(а) $grad\,r^{\alpha}=\alpha\,r^{\alpha-1}grad\,r=grad\,r^{\alpha}=\alpha\,r^{\alpha-1}\dfrac{\vec{r}}{r}=\alpha\,r^{\alpha-2}\vec{r}$.

(б) $grad\,(A.r)^5=5(A.r)^4\underbrace{grad\,(A.r)}_{A}=5(A.r)^4A$.

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. 720[б]) Да се докаже, че $grad(A.(r.\Phi))=(\Phi.A)$.

Доказателство: ако (*за удобство*) въведем скаларната величина

(1) $u=A.(r.\Phi)=A_k(r.\Phi)_k=A_k(x_j\Phi_{jk})\equiv A_kx_j\Phi_{jk}$, то

(2) $grad_i(A.(r.\Phi))\equiv grad\,u=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_kx_j\Phi_{jk})=A_k\Phi_{jk}\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i}=A_k\Phi_{jk}\delta_{ij}=$

$=A_k\Phi_{ik}=\Phi_{ik}A_k=(\Phi.A)_i$.

Щом $grad_i(A.(r.\Phi))=(\Phi.A)_i$, то очевидно $grad(A.(r.\Phi))=(\Phi.A)$.

✸ **Задача:** (Стр. 67/Зад. 728[в]) да се определи $grad\,(A\times r)^4$.

Решение: погрешно би било да приложим директно диференциране, т.е. да запишем $grad\,(A\times r)^4=4(A\times r)^3grad\,(A\times r)$, понеже $grad\,(A\times r)$ не е дефиниран (*градиент се прилага само спрямо скаларно поле*!). Правилният подход е най-напред да представим

(1) $\quad (A\times r)^4=\{\underbrace{(A\times r)^2}_{\text{скалар}}\}^2,$

и едва тогава

(2) $\quad grad\,(A\times r)^4=grad\,\{(A\times r)^2\}^2=2(A\times r)^2\,grad\,(A\times r)^2.$

Нека определим $grad\,(A\times r)^2$. Понеже в предишна задача вече сме доказали, че

(3) $\quad (A\times r)^2=A^2r^2-(A.r)^2$, то

(4) $\quad grad\,(A\times r)^2=grad\,\{A^2r^2-(A.r)^2\}=grad\,\{A^2r^2\}-grad\,(A.r)^2=$

$=A^2grad\,\{r^2\}-2(A.r)\underbrace{grad\,(A.r)}_{A}=A^2 2r\,grad\,r-2(A.r)A=$

$=2A^2r\dfrac{\vec{r}}{r}-2(A.r)A=2\{A^2\vec{r}-(A.\vec{r})A\}=2\{A\times(r\times A)\}.$

Ако заместим $grad\,(A\times r)^2$ от (4) в (2), получаваме

(5) $\quad grad\,(A\times r)^4=2(A\times r)^2\,grad\,(A\times r)^2=4(A\times r)^2\{A\times(r\times A)\}.$

✸ **Задача:** (Стр. 67/Зад. 729[а]) да се определи $grad\,|A\times r|$.

Решение:

$$grad\,|A\times r|=grad\sqrt{(A\times r)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(A\times r)^2}}grad\,(A\times r)^2=\frac{1}{2|A\times r|}grad\,(A\times r)^2.$$

Но $grad\,(A\times r)^2$ вече бе определен в предишна задача, и той е точно

$$grad\,(A\times r)^2=2\{A\times(r\times A)\},$$

следователно

$$grad\,|A\times r|=\frac{1}{2|A\times r|}grad\,(A\times r)^2=\frac{2\{A\times(r\times A)\}}{2|A\times r|}=\frac{A\times(r\times A)}{|A\times r|}.$$

✸ **Задача:** да се пресметне $grad\;Sp\,\underbrace{(\{(\Phi.r),r\}.\Phi)}_{\text{тензор }T}=?$

Решение: нека най-напред определим шпура $Sp\,T$:

(1) $\quad Sp\,T=T_{ii}=\delta_{ij}T_{ij}=\delta_{ij}(\{(\Phi.r),r\}.\Phi)_{ij}=\delta_{ij}\{(\Phi.r),r\}_{ik}\Phi_{kj}=$

$=(\Phi.r)_i x_k\Phi_{kj}\delta_{ij}=(\Phi.r)_i x_k\Phi_{ki}=(\Phi.r)_i(r.\Phi)_i=\underbrace{(\Phi.r).(r.\Phi)}_{\text{скалар}}.$

Сега вече търсим градиента от този скалар:

(2) $\quad grad_i\;Sp\,(\{(\Phi.r),r\}.\Phi)=grad_i\,[(\Phi.r).(r.\Phi)]=\dfrac{\partial}{\partial x_i}[(\Phi.r)_k(r.\Phi)_k]=$

$=\dfrac{\partial}{\partial x_i}[(\Phi_{km}x_m)(x_n\Phi_{nk})]=\underbrace{\Phi_{nk}\Phi_{km}}_{\Phi_{nm}}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_m x_n)=\Phi_{nm}\left(\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i}x_n+x_m\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}\right)=$

$=\Phi_{nm}(\delta_{im}x_n+x_m\delta_{in})=\Phi_{nm}\delta_{im}x_n+\Phi_{nm}x_m\delta_{in}=\Phi_{ni}x_n+\Phi_{im}x_m=$

$= x_n\Phi_{ni} + \Phi_{im}x_m = (r.\Phi)_i + (\Phi.r)_i = [(r.\Phi) + (\Phi.r)]_i$, следователно
$grad_i\ Sp\ (\{(\Phi.r), r\}.\Phi) = (r.\Phi) + (\Phi.r)$.

✸ **Задача:** да се пресметне $grad\ Sp\ \underbrace{(A\times\{r, A\})}_{\text{тензор } T} = ?$

Решение: нека най-напред определим шпура $Sp\,T$:

(1) $\quad Sp\,T = Sp\,(A\times\{r, A\}) = \delta_{ij}(A\times\{r, A\})_{ij} = \delta_{ij}(-\varepsilon_{\min}A_m\{r, A\}_{nj}) =$

$= -\varepsilon_{\min}\delta_{ij}(A_m x_n A_j) = (-\varepsilon_{\min}A_m x_n)\delta_{ij}A_j = (A\times r)_i A_i = (A\times r).\ A$.

Сега вече определяме

(2) $\quad grad_i\ Sp\,(A\times\{r, A\}) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A\times\{r, A\}) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}[(A\times r).\ A] =$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{mkn}A_m x_n)A_k = -\varepsilon_{mkn}A_m A_k\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\varepsilon_{mkn}A_m A_k\delta_{in} = -\varepsilon_{mki}A_m A_k =$

$= \varepsilon_{mik}A_m A_k = -(-\varepsilon_{mik}A_m A_k) = -(\underbrace{A\times A}_{0})_i \equiv 0$, следователно $Sp\,(A\times\{r, A\}) = 0$.

✸ **Задача:** да се пресметне $grad\,|(A.\{r, A\})\times(r\times A)| = ?$

Решение: ще използваме доказана вече формула за векторно-тензорни произведения

(1) $\quad A.\{B, C\} = (A.B)C$,

с помощта на която представяме вектора $A.\{r, A\}\times(r\times A)$ във вида

(2) $\quad A.\{r, A\}\times(r\times A) = (A.r)[A\times(r\times A)]$.

Но

(3) $\quad A\times(r\times A) = A^2 r - (A.r)A,$

следователно

(4) $\quad A.\{r, A\}\times(r\times A) = (A.r)[A^2 r - (A.r)A]$.

Очевидно

(5) $\quad |(A.\{r, A\})\times(r\times A)| = |(A.r)|\,|A^2 r - (A.r)A| = (A.r)\,|A^2 r - (A.r)A| =$

$= (A.r)\sqrt{A^4 r^2 - 2A^2 r.(A.r)A + (A.r)^2 A^2} = |A|(A.r)\sqrt{A^2 r^2 - 2(A.r)(r.A) + (A.r)^2} =$

$= |A|(A.r)\sqrt{A^2 r^2 - (A.r)^2} = |A|(A.r)\sqrt{(A\times r)^2} = |A|(A.r)\,|A\times r|,$

където сме използвали, че

(6) $\quad (A\times B)^2 = A^2 B^2 - (A.B)^2$.

Тогава

(7) $\quad grad\,|(A.\{r, A\})\times(r\times A)| = grad\,|A|(A.r)\,|A\times r| = |A|\,grad\,(A.r)\,|A\times r| =$

$\quad = |A|\{(A.r)grad\,|A\times r| + |A\times r|\underbrace{grad\,(A.r)}_{A}\}$.

Нека определим отделно само $grad\,|A\times r|$:

(8) $grad_i \,|\, A\times r \,| = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{(A\times r)^2} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{(A\times r)_k{}^2} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(A\times r)_k{}^2}}\, 2(A\times r)_k \frac{\partial}{\partial x_i}(A\times r)_k = \frac{(A\times r)_k}{|\, A\times r\,|}\frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{mkn}A_m x_n) =$$

$$= -\frac{1}{|\, A\times r\,|}\varepsilon_{mkn}A_m (A\times r)_k \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{1}{|\, A\times r\,|}\varepsilon_{mkn}A_m(A\times r)_k \delta_{in} =$$

$$= -\frac{1}{|\, A\times r\,|}\varepsilon_{mki}A_m(A\times r)_k = \frac{1}{|\, A\times r\,|}\varepsilon_{mik}A_m(A\times r)_k = -\frac{1}{|\, A\times r\,|}[-\varepsilon_{mik}A_m(A\times r)_k] =$$

$= -\dfrac{[A\times(A\times r)]_i}{|\, A\times r\,|}$, откъдето следва, че

(9) $grad \,|\, A\times r \,| = -\dfrac{A\times(A\times r)}{|\, A\times r\,|} = \dfrac{(A\times r)\times A}{|\, A\times r\,|}$.

Заместваме (9) в (7) и получаваме

(10) $grad \,|\,(A.\{r,A\})\times(r\times A)\,| = |\, A\,|\left((A.r)\dfrac{(A\times r)\times A}{|\, A\times r\,|} + |\, A\times r\,|\, A\right)$.

✸ **Задача:** Да се пресметне

(1) $grad \exp(|\, r.\{r,A\}\,|\, r) = ?$

Решение: отново съгласно доказаната формула

(2) $A.\{B,C\} = (A.B)C$

имаме

(3) $|\, r.\{r,A\}\,| = |\,(r.r)A\,| = \left| r^2 A \right| = r^2 \,|\, A\,|$.

Тогава

(4) $grad \exp(|\, r.\{r,A\}\,|\, r) = grad \exp(|\, A\,|\, r^3) = \exp(|\, A\,|\, r^3) grad\, (|\, A\,|\, r^3) =$

$$= |\, A\,| \exp(|\, A\,|\, r^3) grad\, (r^3) = |\, A\,| \exp(|\, A\,|\, r^3)(3r^2 grad\ r) =$$

$$= 3|\, A\,| \exp(|\, A\,|\, r^3) r^2 \frac{\vec{r}}{r} = 3|\, A\,|\, r \exp(|\, A\,|\, r^3)\vec{r}\,.$$

✸ **Задача:** Да се пресметне

(1) $grad\, [Sp\, (\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr}))] = ?$

Решение:

(2) $Sp\, (\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr})) = \delta_{ij}(\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr}))_{ij} = \delta_{ij}\{r,r\}_{ik}.(\Phi.\Phi^{tr})_{kj} =$

$$= \delta_{ij}x_i x_k.\Phi_{km}.\Phi^{tr}{}_{mj} = x_j x_k.\Phi_{km}.\Phi_{jm} = (x_j\Phi_{jm})(x_k\Phi_{km}) = (r.\Phi)^2\,.$$

Тогава

(3) $grad\, [Sp\, (\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr}))] = grad\, (r.\Phi)^2 \equiv grad\, (r.\Phi)_k{}^2$,

следователно

(4) $grad_i\, [Sp\, (\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr}))] = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(r.\Phi)_k{}^2 = 2(r.\Phi)_k \dfrac{\partial (r.\Phi)_k}{\partial x_i} =$

$$=2(r.\Phi)_k \frac{\partial}{\partial x_i}(x_s\Phi_{sk}) = 2(r.\Phi)_k \Phi_{sk}\frac{\partial x_s}{\partial x_i} = 2(r.\Phi)_k \Phi_{sk}\delta_{is} =$$

$$=2(r.\Phi)_k \Phi_{ik} = 2\Phi_{ik}(r.\Phi)_k = 2[\Phi.(r.\Phi)]_i .$$

И така

(5) $\quad grad\,[Sp\,(\{r,r\}.(\Phi.\Phi^{tr}))] = 2[\Phi.(r.\Phi)].$

✸ **Задача:** Да се докажат формулите:

☞ $\boxed{div\,\vec{r} = 3}$ ☞ $\boxed{div(uU) = u\ divU + U.grad\,u}$,

☞ $\boxed{div(U\times V) = V.rotU - U.rotV}$.

Доказателство 1: $div\,\vec{r} = \dfrac{\partial (r)_i}{\partial x_i} \equiv \dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3$.

Доказателство 2:

а) чрез правилата за работа с „набла”-оператор:

$div(uU) = \nabla.(u_C U) + \nabla.(uU_C) = u_C \nabla.U + \nabla u.U_C = u\ divU + grad\,u\,.\,U$, к.т.д.

б) доказателство чрез дефиницията за дивергенция:

$$div(uU) = \frac{\partial (uU)_i}{\partial x_i} = u\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}U_i = u\,divU + grad_i u U_i = u\ divU + grad\,u\,.\,U$$

Доказателство 3:

а) чрез правилата за работа с „набла”-оператор:

$div(U\times V) = \nabla.(U_C \times V) + \nabla.(U\times V_C) = (\nabla.U_C.V) + (\nabla.U.V_C)$.

Разработваме всяко едно от смесените произведения така, че „набла”-операторът да действа винаги първо на неиндексиран вектор:

$(\nabla.U_C.V) = -(U_C.\nabla.V) = -U_C.(\nabla\times V) = -U.rotV$,

$(\nabla.U.V_C) = (V_C \nabla.U) = V_C.(\nabla\times U) = V.rotU$.

След заместване на представянията за тези смесени произведения получаваме, че

$div(U\times V) = (\nabla.U_C.V) + (\nabla.U.V_C) = V.rotU - U.rotV$, к.т.д.

б) доказателство чрез дефиницията за дивергенция:

$$div(U\times V) = \frac{\partial (U\times V)_i}{\partial x_i} = -\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_i}(U_m V_n) =$$

$$= -\varepsilon_{\min}\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i}V_n + \frac{\partial V_n}{\partial x_i}U_m\right) = \left(-\varepsilon_{\min}\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right)V_n + \left(-\varepsilon_{\min}\frac{\partial V_n}{\partial x_i}\right)U_m =$$

$$= \left(-\varepsilon_{inm}\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\right)V_n + \left(\varepsilon_{imn}\frac{\partial V_n}{\partial x_i}\right)U_m = rot_n U.V_n - rot_m V.U_m =$$

$=V.rotU - U.rotV$, к.т.д.

✸ **Задача:** Да се определят:

☞ $\quad div(ur) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(ur)_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(ux_i) = u\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} = u\delta_{ii} = 3u$;

☞ $\quad div(\underbrace{A.r}_{u})B = (A.r)\underbrace{divB}_{0} + B.\underbrace{grad\,(A.r)}_{A} = B.A \equiv A.B$;

☞ $div(\underbrace{A.r}_{u})r = (A.r)\underbrace{divr}_{3} + r.\underbrace{grad\,(A.r)}_{A} = 3A.r + A.r = 4A.r$.

✸ **Задача:**(Стр. 66/Зад. 720[а])

Да се докаже, че $div(r.\Phi) = Sp\Phi$, където $Sp\Phi$ означава шпур (следа) на тензора Φ, т.е. сбор от неговите елементи, разположени по главния му диагонал.

Решение: по определение

$$div(r.\Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(r.\Phi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\Phi_{ji}) = \Phi_{ji}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \Phi_{ji}\delta_{ij} = \Phi_{ii} =$$

$$= \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = Sp\Phi, \qquad \text{к.т.д.}$$

✸ **Задача:**(Стр. 67/Зад. 747[а,в])

Да се докаже, че:

а) $div(A\times r) = 0$, б) $div(A|r|\times r) = 0$

Доказателство (а):

$$div(A\times r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A\times r)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{\min}A_m x_n) = -\varepsilon_{\min}A_m\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\varepsilon_{\min}A_m\delta_{in} = -\underbrace{\varepsilon_{iin}}_{0}A_m = 0$$

Доказателство (б):

$$div(A|r|\times r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A|r|\times r)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{\min}A_m(x_s x_s)^{1/2}x_n) = -\varepsilon_{\min}A_m\frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_s x_s)^{1/2}x_n\} =$$

$$= -\varepsilon_{\min}A_m\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_s x_s}}2x_s\frac{\partial x_s}{\partial x_i}x_n + \sqrt{x_s x_s}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right) = -\varepsilon_{\min}A_m\left(\frac{x_s}{|r|}\delta_{is}x_n + |r|\delta_{in}\right) =$$

$$= -\varepsilon_{\min}A_m\frac{x_s}{|r|}\delta_{is}x_n - \varepsilon_{\min}A_m|r|\delta_{in} = -\varepsilon_{msn}x_n x_s\frac{A_m}{|r|} - \underbrace{\varepsilon_{mnn}}_{0}A_m|r| = -\varepsilon_{msn}x_n x_s\frac{A_m}{|r|} =$$

$$= \varepsilon_{smn}x_s x_n\frac{A_m}{|r|} = -\underbrace{(-\varepsilon_{smn}x_s x_n)}_{(r\times r)_m}\frac{A_m}{|r|} = -(\underbrace{r\times r}_{0})_m A_m\frac{1}{|r|} \equiv 0, \text{ к.т.д.}$$

✸ **Задача:**(Стр. 66/Зад. 722[а]) Да се докаже, че $div(A.\{r,r\}) = 4(A.r)$.

Доказателство:

$$div(A.\{r,r\}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A.\{r,r\})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_j.\{r,r\}_{ji}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_j x_j x_i) = A_j\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j x_i) =$$

$$= A_j\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_i + x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_i}\right) = A_j(\underbrace{\delta_{ij}x_i}_{x_j} + x_j\underbrace{\delta_{ii}}_{3}) = A_j(x_j + 3x_j) = 4A_j x_j = 4A.r\ .$$

✸ **Задача:**(Стр. 68/Зад. 748[а,б]) Да се докаже, че

(а) $div((r\times A)\times B) = -2(A.B)$;

(б) $div((r\times A)\times r) = -2(A.r)$

Доказателство:

(а) съгласно правилото за двойно векторно произведение

(1) $(r\times A)\times B=(B.r)\,A-(A.B)\,r$.

От формулата за дивергенция от „скалар х вектор”, приложена двукратно в дясната страна на (1), следва

$$div((r\times A)\times B)\equiv div\{(B.r)\,A-(A.B)\,r\}=div\{(B.r)\,A\}-div\{(A.B)\,r\}=$$

$$=(B.r)\underbrace{div\,A}_{0}+A.\underbrace{grad\,(B.r)}_{B}-(A.B)\underbrace{div\,r}_{3}-r.\underbrace{grad\,(A.B)}_{0}=A.B-3(A.B)=-2(A.B).$$

(б) отново съгласно правилото за двойно векторно произведение

(2) $(r\times A)\times r=(r.r)\,A-(A.r)\,r=r^2\,A-(A.r)\,r$.

От формулата за дивергенция от „скалар х вектор”, приложена двукратно в дясната страна на (2), следва

$$div((r\times A)\times r)\equiv div\{r^2\,A-(A.r)\,r\}=div\{r^2\,A\}-div\{(A.r)\,r\}=$$

$$=r^2\underbrace{div\,A}_{0}+A.\underbrace{grad\,r^2}_{2r\,grad\,r}-(A.r)\underbrace{div\,r}_{3}-r.\underbrace{grad\,(A.r)}_{A}=A.2r\frac{\vec{r}}{r}-A.r-3(A.r)=$$

$$=2(A.r)-4(A.r)=-2(A.r).$$

✸ **Задача:** Да се определи $div((\{A,r\}.\Phi).r)=?$

Решение: нека въведем (за удобство) вектора $V=(\{A,r\}.\Phi).r$. По дефиниция

(1) $V_i=(\underbrace{(\{A,r\}.\Phi)}_{тензор}.r)_i=(\{A,r\}.\Phi)_{ij}\,x_j=(\{A,r\}_{ik}.\Phi_{kj})\,x_j=A_i x_k\Phi_{kj}x_j\equiv A_i\Phi_{kj}x_k x_j$.

Тогава

(2) $$div((\{A,r\}.\Phi).r)=div\,V=\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i\Phi_{kj}x_k x_j)=A_i\Phi_{kj}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j)=$$

$$=A_i\Phi_{kj}\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}x_j+x_k\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)=A_i\Phi_{kj}(\delta_{ik}x_j+x_k\delta_{ij})=A_i\Phi_{kj}\delta_{ik}x_j+A_i\Phi_{kj}x_k\delta_{ij}=$$

$$=A_i\Phi_{ij}x_j+A_i\Phi_{ki}x_k=(\underbrace{A_i\Phi_{ij}}_{(A.\Phi)_j})x_j+(\underbrace{\Phi_{ki}A_i}_{(\Phi.A)_k})x_k=(A.\Phi)_j\,x_j+(\Phi.A)_k\,x_k=$$

$$=(A.\Phi).r+(\Phi.A).r=\{(A.\Phi)+(\Phi.A)\}.r.$$

✸ **Задача:**(Стр. 66/Зад. 724[в]) Да се докаже, че $div(r\times(\Phi.r))=Sp\,(r\times\Phi)$.

Доказателство: по определение

$$div(r\times(\Phi.r))=\frac{\partial}{\partial x_i}\{r\times\underbrace{(\Phi.r)}_{вектор}\}_i=\frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{\min}x_m(\Phi.r)_n)=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_m\Phi_{nj}x_j)=$$

$$=-\varepsilon_{\min}\Phi_{nj}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_m x_j)=-\varepsilon_{\min}\Phi_{nj}\left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i}x_j+x_m\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)=$$

$$=-\varepsilon_{\min}\Phi_{nj}(\delta_{im}x_j+x_m\delta_{ij})=-\varepsilon_{\min}\Phi_{nj}\delta_{im}x_j-\varepsilon_{\min}\Phi_{nj}x_m\delta_{ij}=$$

$$=-\underbrace{\varepsilon_{mmn}}_{0}\Phi_{nj}x_j-\varepsilon_{mjn}\Phi_{nj}x_m=-x_m\varepsilon_{mjn}\Phi_{nj}=(\underbrace{r\times\Phi}_{тензор})_{jj}=$$

$$=(r\times\Phi)_{11}+(r\times\Phi)_{22}+(r\times\Phi)_{33}=Sp\,(r\times\Phi).$$

✸ **Задача:** Да се докажат следните свойства на ротация

☞ $\boxed{rot\,(uU) = u\,rot\,U - U \times grad\,u}$; ☞ $\boxed{rot\,\vec{r} = 0}$,

☞ $\boxed{rot(U \times V) = U\,divV - V\,divU - U.GradV + V.GradU}$.

Доказателство 1:

а) чрез правилата за формално смятане с „набла”-оператор:

$$rot\,(uU) \equiv \nabla \times (uU) = \nabla \times (u_C U) + \nabla \times (uU_C) = u_C \nabla \times U + \nabla u \times U_C =$$
$$= u\ rot\,U + grad\,u \times U\,.$$

б) доказателство чрез дефиницията за ротация:

$$rot_i\,(uU) = -\varepsilon_{\min} \frac{\partial (uU)_n}{\partial x_m} = -\varepsilon_{\min} \frac{\partial (uU_n)}{\partial x_m} =$$
$$= -\varepsilon_{\min} \frac{\partial u}{\partial x_m} U_n - \varepsilon_{\min} u \frac{\partial U_n}{\partial x_m} = -\varepsilon_{\min} \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} \right) U_n + u \left(-\varepsilon_{\min} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \right) =$$
$$= -\varepsilon_{\min} (grad_m u) U_n + u.rot_i\,U = (gradu \times U)_i + u.rot_i\,U =$$
$$= (gradu \times U + u.rotU)_i \text{, к.т.д.}$$

Доказателство 2:

$rot_i\,\vec{r} = -\varepsilon_{\min} \dfrac{\partial x_n}{\partial x_m} = -\varepsilon_{\min} \delta_{mn} = -\varepsilon_{mim} \equiv 0$ (*следва от свойство на* ε-*символите*).

Доказателство 3:

а) чрез правилата за формално смятане с „набла”-оператор:

$$rot(U \times V) = \nabla \times (U \times V) = \nabla \times (U_C \times V) + \nabla \times (U \times V_C)\,.$$

Преработваме получените изрази чрез формулата за двойно векторно произведение $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$ и чрез формулата $(\vec{A}.\vec{B})\vec{C} = \vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}$:

$$\nabla \times (U_C \times V) = (\nabla.V)U_C - (\nabla.U_C)V = U_C(\nabla.V) - (U_C.\nabla)V =$$
$$= U_C(\nabla.V) - U_C.\{\nabla, V\}\,.$$

Правим същото и за

$$\nabla \times (U \times V_C) = (\nabla.V_C)U - (\nabla.U)V_C = (V_C.\nabla)U - V_C(\nabla.U) =$$
$$= V_C.\{\nabla, U\} - V_C(\nabla.U)\,.$$

Заместваме преработените компоненти в изходното съотношение и получаваме

$$rot(U \times V) = \nabla \times (U_C \times V) + \nabla \times (U \times V_C) = U_C(\nabla.V) - U_C.\{\nabla, V\} + V_C.\{\nabla, U\} - V_C(\nabla.U) =$$
$$= U\,divV - U.GradV + V.Grad - V\,divU\,.$$

б) доказателство чрез дефиницията за ротация:

$$rot_{\,i}\,(U \times V) = -\varepsilon_{\min} \frac{\partial (U \times V)_n}{\partial x_m} = -\varepsilon_{\min} \frac{\partial}{\partial x_m} (-\varepsilon_{pnq} U_p V_q) =$$
$$= \varepsilon_{\min} \varepsilon_{pnq} \frac{\partial}{\partial x_m} (U_p V_q) = \varepsilon_{\min} \varepsilon_{pnq} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_m} V_q + \frac{\partial V_q}{\partial x_m} U_p \right) =$$
$$= -\varepsilon_{nmi} \varepsilon_{npq} \left(V_q \frac{\partial U_p}{\partial x_m} + U_p \frac{\partial V_q}{\partial x_m} \right) = -(\delta_{mp}\delta_{iq} - \delta_{mq}\delta_{ip}) \left(V_q \frac{\partial U_p}{\partial x_m} + U_p \frac{\partial V_q}{\partial x_m} \right) =$$

$$=-\delta_{mp}\delta_{iq}\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x_m}+U_p\frac{\partial V_q}{\partial x_m}\right)+\delta_{mq}\delta_{ip}\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x_m}+U_p\frac{\partial V_q}{\partial x_m}\right)=$$

$$=-\delta_{mp}\delta_{iq}V_q\frac{\partial U_p}{\partial x_m}-\delta_{mp}\delta_{iq}U_p\frac{\partial V_q}{\partial x_m}+\delta_{mq}\delta_{ip}V_q\frac{\partial U_p}{\partial x_m}+\delta_{mq}\delta_{ip}U_p\frac{\partial V_q}{\partial x_m}=$$

$$=-(\delta_{iq}V_q)\frac{\partial(U_p\delta_{mp})}{\partial x_m}-(\delta_{mp}U_p)\frac{\partial(V_q\delta_{iq})}{\partial x_m}+(\delta_{mq}V_q)\frac{\partial(U_p\delta_{ip})}{\partial x_m}+(\delta_{ip}U_p)\frac{\partial(V_q\delta_{mq})}{\partial x_m}=$$

$$=-(\delta_{iq}V_q)\frac{\partial(U_p\delta_{mp})}{\partial x_m}-(\delta_{mp}U_p)\frac{\partial(V_q\delta_{iq})}{\partial x_m}+(\delta_{mq}V_q)\frac{\partial(U_p\delta_{ip})}{\partial x_m}+(\delta_{ip}U_p)\frac{\partial(V_q\delta_{mq})}{\partial x_m}=$$

$$=-V_i\frac{\partial U_m}{\partial x_m}-U_m\frac{\partial V_i}{\partial x_m}+V_m\frac{\partial U_i}{\partial x_m}+U_i\frac{\partial V_m}{\partial x_m}=-V_i\,divU-U_m\,Grad_{mi}V+V_mGrad_{mi}U+U_i\,divV=$$

$=(-V\,divU-U.Grad\,V+V.Grad+U\,divV)_i$, к.т.д.

✸ **Задача:** (Стр. 67/Зад. 747[б]) Да се докаже, че $rot\,(A\times r)=2A$.

Доказателство:

$$rot_i\,(A\times r)=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}(A\times r)_n=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}(-\varepsilon_{pnq}A_px_q)=\varepsilon_{\min}\varepsilon_{pnq}A_p\frac{\partial x_q}{\partial x_m}=$$

$$=-\varepsilon_{\min}\varepsilon_{pqn}A_p\delta_{mq}=-(\varepsilon_{\min}\varepsilon_{pmn})A_p=-(\underbrace{\delta_{mp}\delta_{im}}_{\delta_{ip}}-\underbrace{\delta_{mm}}_{3}\delta_{ip})A_p=-(-2\delta_{ip})A_p=2\delta_{ip}A_p=2A_i$$

Щом $rot_i\,(A\times r)=2A_i$, то следователно $rot\,(A\times r)=2A$, к.т.д.

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. 722[б]) Да се докаже, че $rot\,(A.\{r,r\})=A\times r$.

Доказателство: означаваме (*за удобство*) $V=A.\{r,r\}$. Очевидно

(1) $\quad V_n=(A.\{r,r\})_n=A_k\{r,r\}_{kn}=A_kx_kx_n$.

Тогава

(2) $$rot_i(V)=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial V_n}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}(A_kx_kx_n)=-\varepsilon_{\min}A_k\frac{\partial}{\partial x_m}(x_kx_n)=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_m}x_n+x_k\frac{\partial x_n}{\partial x_m}\right)=-\varepsilon_{\min}A_k(\delta_{km}x_n+x_k\delta_{mn})=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k\delta_{km}x_n-\varepsilon_{\min}A_kx_k\delta_{mn}=-\varepsilon_{kin}A_kx_n-\underbrace{\varepsilon_{nin}}_{0}A_kx_k=-\varepsilon_{kin}A_kx_n=(A\times r)_i,$$

откъдето доказателството на $rot\,(A.\{r,r\})=A\times r$ следва непосредствено.

✸ **Задача:** (Стр. 68/Зад. 748[в,г]) Да се докаже, че

(в) $\quad rot((A\times r)\times B)=A\times B$;

(г) $\quad rot((A\times r)\times r)=3(A\times r)$;

Доказателство:

(в) $$rot_i((A\times r)\times B)=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}\{(A.B)r-(B.r)A\}_n=$$

$$=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}\{(A.B)r-(B.r)A\}_n=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}\{(A_kB_k)x_n-(B_sx_s)A_n\}=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_kB_k\frac{\partial x_n}{\partial x_m}+\varepsilon_{\min}B_sA_n\frac{\partial x_s}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}A_kB_k\delta_{mn}+\varepsilon_{\min}B_sA_n\delta_{ms}=$$

$$=-\underbrace{\varepsilon_{nin}}_{0}A_kB_k+\varepsilon_{\min}B_mA_n=\varepsilon_{\min}B_mA_n=-(-\varepsilon_{\min}B_mA_n)=-(B\times A)=A\times B\,.$$

(г) $\quad rot_i((A\times r)\times r)=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\{(A.r)r-r^2A\}_n=$

$$=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}\{(A.r)r-r^2A\}_n=-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_m}\{(A_kx_k)x_n-r^2A_n\}=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k\frac{\partial}{\partial x_m}(x_kx_n)+\varepsilon_{\min}A_n\frac{\partial}{\partial x_m}(x_s{}^2)=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_m}x_n+x_k\frac{\partial x_n}{\partial x_m}\right)+\varepsilon_{\min}A_n2x_s\frac{\partial x_s}{\partial x_m}=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k(\delta_{mk}x_n+x_k\delta_{mn})+2\varepsilon_{\min}A_nx_s\delta_{ms}=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_k\delta_{mk}x_n-\varepsilon_{\min}A_kx_k\delta_{mn}+2\varepsilon_{\min}A_nx_m=$$

$$=-\varepsilon_{\min}A_mx_n-\underbrace{\varepsilon_{nin}}_{0}A_kx_k+2\varepsilon_{\min}x_mA_n=-\varepsilon_{\min}A_mx_n-2(-\varepsilon_{\min}x_mA_n)=$$

$$=A\times r-2(r\times A)=A\times r+2(A\times r)=3(A\times r)\,,\qquad \text{к.т.д.}$$

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. 721[а,б,в])

По дефиниция ако A е вектор, то с него може да бъде свързан един антисиметричен тензор от вида

(1) $\quad \{A\}_{ij}=-\varepsilon_{imj}A_m$.

Да се докаже, че:

(а) $\quad Grad\ (A\times r)=\{A\}$;

(б) $\quad Rot\,\{A,r\}=\{A\}$;

(в) $\quad Rot\,\{r,r\}=\{r\}$.

Доказателство:

(а) $\quad Grad_{ij}\ (A\times r)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(A\times r)_j=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{mjn}A_mx_n)=-\varepsilon_{mjn}A_m\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}=$

$=-\varepsilon_{mji}A_m=-\varepsilon_{imj}A_m=\{A\}_{ij}$ съгласно (1), откъдето следва $Grad\ (A\times r)=\{A\}$.

(б) $\quad Rot_{ij}\ \{A,r\}=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial\{A,r\}_{nj}}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial(A_nx_j)}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}A_n\dfrac{\partial x_j}{\partial x_m}=$

$=-\varepsilon_{\min}A_n\delta_{mj}=-\varepsilon_{jin}A_n=-\varepsilon_{inj}A_n=\{A\}_{ij}$, т.е. $Rot_{ij}\ \{A,r\}=\{A\}_{ij}$, откъдето следва $Rot\,\{A,r\}=\{A\}$.

(в) $\quad Rot_{ij}\ \{r,r\}=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial\{r,r\}_{nj}}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial(x_nx_j)}{\partial x_m}=-\varepsilon_{\min}\left(\dfrac{\partial x_n}{\partial x_m}x_j+x_n\dfrac{\partial x_j}{\partial x_m}\right)=$

$$= -\varepsilon_{\min}(\delta_{mn}x_j + x_n\delta_{mj}) = -\varepsilon_{\min}\delta_{mn}x_j - \varepsilon_{\min}x_n\delta_{mj} = -\underbrace{\varepsilon_{nin}}_{0}x_j - \varepsilon_{jin}x_n =$$

$$= -\varepsilon_{jin}x_n = -\varepsilon_{inj}x_n = \{r\}_{ij},$$

т.е. $Rot_{ij}\{r,r\} = \{r\}_{ij}$, откъдето следва $Rot\{r,r\} = \{r\}$.

✸ **Задача:** Да се докажат свойствата:

☞ $Grad\,\vec{r} = \delta$, ☞ $Grad\,(uU) = u\,Grad\,U + \{grad\,u, U\}$

Доказателство 1: следва непосредствено от матричното представяне на $Grad U$ за случая $U \equiv \vec{r}$, когато $U_1 = x_1$, $U_2 = x_2$ и $U_3 = x_3$, и с отчитане на $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

Доказателство 2:

$$Grad\,(uU) = \nabla(uU) = \nabla(u_C U) + \nabla(uU_C) = u_C \nabla U + \nabla u\, U_C = u\,Grad\,U + \{grad\,u, U\}$$

или

$$Grad_{ij}\,(uU) = \frac{\partial (uU)_j}{\partial x_i} = u\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}U_j = u\,Grad_{ij}\,U + (grad_i\,u)\,U_j =$$

$= [u\,Grad\,U + \{grad\,u, U\}]_{ij}$, следователно $Grad\,(uU) = u\,Grad\,U + \{grad\,u, U\}$.

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. 723[а,б,в,г]) Да се докаже, че:

(а) $Grad\,(r.\Phi) = \Phi$;

(б) $Grad\,(A.\{B,r\}) = (A.B)\,r$;

(в) $Grad\,(A.\{r,r\}) = \{A,r\} + (A.r)\,\delta$;

(г) $Div\{A,r\} = A$.

Доказателство:

(а) $$Grad_{ij}\,(r.\Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(r.\Phi)_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k\Phi_{kj}) = \Phi_{kj}\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \Phi_{kj}\delta_{ik} = \Phi_{ij},$$

откъдето верността на равенството $Grad\,(r.\Phi) = \Phi$ следва непосредствено.

(б) $$Grad_{ij}\,(A.\{B,r\}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A.\{B,r\})_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_k\{B,r\}_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_k B_k x_j) =$$

$$= A_k B_k \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = A_k B_k \delta_{ij} = (A.B)\,\delta_{ij}.$$

Щом $Grad_{ij}\,(A.\{B,r\}) = (A.B)\,\delta_{ij}$, то очевидно $Grad\,(A.\{B,r\}) = (A.B)\,\delta$, където с δ е означен единичен тензор.

(в) $$Grad_{ij}\,(A.\{r,r\}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A.\{r,r\})_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_k\{r,r\}_{kj}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_k x_k x_j) =$$

$$= A_k\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = A_k\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}x_j + x_k\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) = A_k(\delta_{ik}x_j + x_k\delta_{ij}) =$$

$$= A_k\delta_{ik}x_j + A_k x_k\delta_{ij} = A_i x_j + A_k x_k \delta_{ij} = \{A,r\}_{ij} + (A.B)\,\delta_{ij} = [\{A,r\} + (A.B)\,\delta]_{ij},$$

откъдето доказателството следва непосредствено.

(г) $\quad Div_i\{A,r\} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\{A,r\}_{ji} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(A_j x_i) = A_j\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = A_j\delta_{ij} = A_i\,,\quad$ к.т.д.

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. 725[а,б,в]) Да се докаже, че:

(а) $\quad Div(A\times\{B,r\}) = A\times B\,;$

(б) $\quad Div\{r,r\} = 4r\,;$

(в) $\quad Div(A\times\{r,r\}) = A\times r\,.$

Доказателство:

(а) $$Div_i(\underbrace{A\times\{B,r\}}_{\textit{тензор}}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(A\times\underbrace{\{B,r\}}_{\textit{тензор}})_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\varepsilon_{mjn}A_m\{B,r\}_{ni}) =$$

$$= -\varepsilon_{mjn}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_m B_n x_i) = -\varepsilon_{mjn}A_m B_n\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{mjn}A_m B_n\delta_{ij} =$$

$$= -\varepsilon_{\min}A_m B_n = (A\times B)_i\,.$$

Щом $Div_i(A\times\{B,r\}) = (A\times B)_i$, то $Div(A\times\{B,r\}) = A\times B$.

(б) $$Div_i\{r,r\} = \frac{\partial}{\partial x_j}\{r,r\}_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j}\{x_j x_i\} = \frac{\partial x_j}{\partial x_j}x_i + x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_j} =$$

$$= \underbrace{\delta_{jj}}_{3}x_i + x_j\delta_{ij} = 3x_i + x_i = 4x_i = 4(\vec{r})_i\,.$$

Щом $Div_i\{r,r\} = 4(r)_i$, то $Div\{r,r\} = 4r$.

(в) $$Div_i(A\times\{r,r\}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(A\times\underbrace{\{r,r\}}_{\textit{тензор}})_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\varepsilon_{mjn}A_m\{r,r\}_{ni}) =$$

$$= -\varepsilon_{mjn}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_m x_n x_i) = -\varepsilon_{mjn}A_m\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_j}x_i + x_n\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) = -\varepsilon_{mjn}A_m(\delta_{nj}x_i + x_n\delta_{ij}) =$$

$$= -\varepsilon_{mjn}A_m\delta_{nj}x_i - \varepsilon_{mjn}A_m x_n\delta_{ij} = -\underbrace{\varepsilon_{mnn}}_{0}A_m x_i - \varepsilon_{\min}A_m x_n = -\varepsilon_{\min}A_m x_n = (A\times r)_i\,.$$

Щом $Div_i(A\times\{r,r\}) = (A\times r)_i$, то $Div(A\times\{r,r\}) = A\times r$.

✸ **Задача:** Да се пресметне

(1) $\quad Div((A\times r)\times\{r,A\}) = ?$

Решение: с помощта на формулата

(2) $\quad A\times\{B,C\} = \{A\times B,C\}$

представяме тензора $(A\times r)\times\{r,A\}$ във вида

(3) $\quad (A\times r)\times\{r,A\} = \{[(A\times r)\times r],A\} = \{[(A.r)r - r^2 A],A\}.$

Нека определим търсената дивергенция

(4) $$Div_i\{[(A.r)r - r^2 A],A\} = \frac{\partial}{\partial x_j}\{[(A.r)r - r^2 A],A\}_{ji} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}[(A.r)\,r - r^2 A]_j\,A_i = A_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}[(A.r)\,x_j - r^2 A_j] =$$

$$= A_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}(A_k x_k x_j - r_s{}^2 A_j) = A_i A_k\,\frac{\partial}{\partial x_j}(x_k x_j) - A_i A_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}(r_s{}^2) =$$

$$= A_i A_k(\delta_{jk} x_j + x_k \underbrace{\delta_{jj}}_{3}) - A_i A_j\,2r_s\,\frac{\partial r_s}{\partial x_j} = A_i A_j x_j + 3A_i A_k x_k) - 2A_i A_j r_s \delta_{js} =$$

$$= (A.r)A_i + 3(A.r)A_i - 2A_i A_j r_j = 4(A.r)A_i - 2(A.r)A_i = 2(A.r)A_i\,.$$

И така

(5) $\quad Div\,((A\times r)\times\{r, A\}) = 2(A.r)A.$

✸ **Задача:** Да се пресметне

(1) $\quad Div\,(\,\underbrace{(\{r,r\}.\{A,r\})\times(\Phi.r)}_{Тензор\ T}\,) = ?$

Решение: по определение

(1) $\quad Div_i\,T = \dfrac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\,(\underbrace{\{r,r\}.\{A,r\}}_{\Psi})\times\underbrace{(\Phi.r)}_{V}\,)_{ji} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(\Psi\times V)_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Psi_{jm}\varepsilon_{\min} V_n) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}[-\varepsilon_{\min}(\{r,r\}.\{A,r\})_{jm}(\Phi.r)_n] = -\varepsilon_{\min}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\{r,r\}_{js}\{A,r\}_{sm}(\Phi_{np}.x_p) =$$

$$= -\varepsilon_{\min}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j x_s A_s x_m \Phi_{np} x_p) = -\varepsilon_{\min} A_s \Phi_{np}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j x_s x_m x_p) =$$

$$= -\varepsilon_{\min} A_s \Phi_{np}(\delta_{jj} x_s x_m x_p + x_j \delta_{js} x_m x_p + x_j x_s \delta_{jm} x_p + x_j x_s x_m \delta_{jp}) =$$

$$= -3\varepsilon_{\min} A_s \Phi_{np} x_s x_m x_p - \varepsilon_{\min}\underbrace{A_s\delta_{js}}_{A_j}\Phi_{np} x_j x_m x_p - \underbrace{\varepsilon_{\min}\delta_{jm}}_{\varepsilon_{jin}} A_s \Phi_{np} x_j x_s x_p -$$

$$- \varepsilon_{\min} A_s \underbrace{\Phi_{np}\delta_{jp}}_{\Phi_{nj}} x_j x_s x_m = -3\varepsilon_{\min}(A_s x_s)(\Phi_{np} x_p) x_m - \varepsilon_{\min}(A_j x_j)(\Phi_{np} x_p) x_m -$$

$$- \varepsilon_{jin}(A_s x_s)(\Phi_{np} x_p) x_j - \varepsilon_{\min}(A_s x_s)(\Phi_{nj} x_j) x_m =$$

$$= -3(A.r)\,\varepsilon_{\min}\,(\Phi.r)_n\,x_m - (A.r)\,\varepsilon_{\min}\,(\Phi.r)_n\,x_m -$$

$$-(A.r)\,\varepsilon_{jin}\,(\Phi.r)_n\,x_j - (A.r)\,\varepsilon_{\min}\,(\Phi.r)_n\,x_m =$$

$$= (A.r)[4(-\varepsilon_{\min}\,x_m(\Phi.r)_n) + (-\varepsilon_{jin}\,x_j(\Phi.r)_n) + (-\varepsilon_{\min}\,x_m(\Phi.r)_n)] \equiv$$

$$\equiv (A.r)\,6(-\varepsilon_{\min}\,x_m(\Phi.r)_n) = 6(A.r)(r\times(\Phi.r)).$$

И така

(2) $\quad Div\,(\,(\{r,r\}.\{A,r\})\times(\Phi.r)\,) = 6(A.r)(r\times(\Phi.r)).$

✸ **Задача:** Да се определи

(1) $\quad rot\,(\underbrace{Rot\{\underbrace{Div\,(\underbrace{\underbrace{A\times(\Phi.\{A,r\})}_{тензор})}_{вектор}, r\}}_{тензор} .\,r}_{вектор}) = ?$

Решение: Нека най-напред определим Div:

(2) $\quad Div_i\,(A\times(\Phi.\{A,r\})) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(A\times(\Phi.\{A,r\}))_{ji} =$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_j}[-A_m\varepsilon_{mjn}(\Phi.\{A,r\})_{ni}] = -A_m\varepsilon_{mjn}\dfrac{\partial}{\partial x_j}[\Phi_{ns}\{A,r\}_{si}] =$

$= -A_m\varepsilon_{mjn}\Phi_{ns}\dfrac{\partial}{\partial x_j}(A_s x_i) = -A_m\varepsilon_{mjn}\Phi_{ns}A_s\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = -A_m\varepsilon_{mjn}(\Phi.A)_n\delta_{ij} =$

$= -\varepsilon_{\min}A_m(\Phi.A)_n = [A\times(\Phi.A)]_i$, следователно

(3) $\quad Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})) = A\times(\Phi.A)$.

Продължаваме нататък с намирането на

(4) $\quad Rot_{ij}\,\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})), r\} = \underbrace{Rot}_{ij}\ \{(A\times(\Phi.A)),r\} =$

$= -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\{(A\times(\Phi.A)),r\}_{nj} = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}[(A\times(\Phi.A))_n x_j] =$

$= -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}\{(A\times(\Phi.A)),r\}_{nj} = -\varepsilon_{\min}\,(A\times(\Phi.A))_n\dfrac{\partial x_j}{\partial x_m} =$

$= -\varepsilon_{\min}\,(A\times(\Phi.A))_n\delta_{mj} = -\varepsilon_{jin}\,(A\times(\Phi.A))_n = -\varepsilon_{inj}\,(A\times(\Phi.A))_n$.

И така: $Rot_{ij}\,\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})), r\} = -\varepsilon_{inj}\,(A\times(\Phi.A))_n$. Тогава векторът $Rot\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})), r\}.r$ ще има i-та компонента

(5) $\quad V_i = Rot_{ij}\,\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})), r\}.x_j = -\varepsilon_{inj}\,(A\times(\Phi.A))_n x_j =$

$= \varepsilon_{nij}\,(A\times(\Phi.A))_n x_j = \varepsilon_{nij}\,(-(\Phi.A)\times A)_n x_j = -\varepsilon_{nij}\,((\Phi.A)\times A)_n x_j =$

$= [((\Phi.A)\times A)\times r]_i$.

Накрая определяме

(5) $\quad rot_i\,(Rot\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})), r\}.r) = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}V_n =$

$= -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}[((\Phi.A)\times A)\times r]_n = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}[-\varepsilon_{pnq}\,((\Phi.A)\times A)_p x_q] =$

$= \varepsilon_{\min}\varepsilon_{pnq}((\Phi.A)\times A)_p\dfrac{\partial x_q}{\partial x_m} = -\varepsilon_{\min}\varepsilon_{pqn}((\Phi.A)\times A)_p\delta_{mq} =$

$= -\underbrace{\varepsilon_{\min}\varepsilon_{pmn}}((\Phi.A)\times A)_p = -(\delta_{mp}\delta_{im} - \underbrace{\delta_{mm}}_{3}\delta_{ip})((\Phi.A)\times A)_p =$

$= 3\delta_{ip}\,((\Phi.A)\times A)_p - \underbrace{\delta_{mp}\delta_{im}}_{\delta_{ip}}((\Phi.A)\times A)_p = 2\delta_{ip}\,((\Phi.A)\times A)_p =$

$=2((\Phi.A)\times A)_i$. И така

(6) $\quad rot_i\,(Rot\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})),r\}.r)=2((\Phi.A)\times A)_i$,

следователно

(7) $\quad rot\,(Rot\{Div\,(A\times(\Phi.\{A,r\})),r\}.r)=2((\Phi.A)\times A)\equiv 2(\Phi.A)\times A$.

Лапласов оператор

✸ **Задача:** Да се докаже следната формула за оператора на Лаплас от векторно поле

☞ $\boxed{\Delta U = grad\ divU - rot\ rot\,U}$.

Доказателство: ако развием двойното векторно произведение $\nabla\times(\nabla\times U)$, ще имаме:

$$\nabla\times(\nabla\times U)=\nabla(\nabla.U)-(\nabla.\nabla)U,$$

следователно

$$(\nabla.\nabla)U=\nabla(\nabla.U)-\nabla\times(\nabla\times U)\equiv grad\,(\nabla.U)-rot\,(\nabla\times U),$$

или още

$$\nabla^2 U = grad\,(divU)-rot\,(rot\,U)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta U = grad\,divU - rot\,rot\,U}.$$

✸ **Задача:** Да се докаже, че лапласов оператор $\Delta\dfrac{1}{r}\equiv\Delta\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=0$.

Доказателство: ще използваме представяне на r в декартови координати:

(1) $\quad r=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$.

По дефиниция

(2) $\quad \Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)$,

затова ще ни трябват производните (*първа и втора*) на $\left(\dfrac{1}{r}\right)$ по x, y и z съответно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\equiv-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}2(x-x_0)=-\frac{1}{r^2}\frac{(x-x_0)}{r}=-\frac{(x-x_0)}{r^3},\ \text{т.е.}$$

(3) $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{(x-x_0)}{r^3}$.

По аналогичен начин се доказва, че

(4) $\quad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{(y-y_0)}{r^3}$ и (5) $\quad \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{(z-z_0)}{r^3}$.

След това определяме и **вторите** производни:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^3}(x-x_0)\right)=-\frac{(-3)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(x-x_0)-\frac{1}{r^3}.1=$$

$$=\frac{3}{r^4}\frac{(x-x_0)}{r}(x-x_0)-\frac{1}{r^3}=\frac{3(x-x_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\ \text{т.е.}$$

(6) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(x-x_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}.$$

По аналогичен начин определяме

(7) $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(y-y_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$ и (8) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(z-z_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}.$$

Накрая с така намерените втори производни образуваме лапласовия оператор

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(x-x_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}=$$

$$=\frac{3[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=\frac{3r^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\equiv 0,$$

с което доказахме, че действително

(9) $$\boxed{\Delta\frac{1}{r}\equiv\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=0}.$$

✸ **Задача:** (Стр. 66/Зад. $724^{б}$) Да се определи $\Delta(r.\Phi.r)=?$

Решение: величината $(r.\Phi)$ е вектор, който при скаларно произведение $(r.\Phi.r)$ с радиус-вектора дава скалара

(1) $$(r.\Phi.r)=(r.\Phi).r=(r.\Phi)_k.x_k=x_j\Phi_{jk}x_k.$$

По определение лапласов оператор от скалар се дава с

(2) $$\Delta u = div\ grad\ u,$$

затова нека най-напред определим градиента от скалара (1)

(3) $$grad_i(r.\Phi.r)=\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\Phi_{jk}x_k)=\Phi_{jk}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_jx_k)=\Phi_{jk}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_k+x_j\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)=$$

$$=\Phi_{jk}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}x_k+x_j\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)=\Phi_{jk}(\delta_{ij}x_k+x_j\delta_{ik})=\Phi_{jk}\delta_{ij}x_k+\Phi_{jk}x_j\delta_{ik}=$$

$$=\Phi_{ik}x_k+\Phi_{ji}x_j=\Phi_{ik}x_k+x_j\Phi_{ji}=(\Phi.r)_i+(r.\Phi)_i=[\underbrace{(\Phi.r)+(r.\Phi)}_{вектор\ V}]_i.$$

Тогава

(4) $$\Delta(r.\Phi.r)=div\ grad\ (r.\Phi.r)\equiv div\ grad\ (V)=div[(\Phi.r)+(r.\Phi)]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}[(\Phi.r)+(r.\Phi)]_i=\frac{\partial}{\partial x_i}[(\Phi.r)_i+(r.\Phi)_i]=\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi_{ik}x_k+\Phi_{ji}x_j)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi_{ik}x_k)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi_{ji}x_j)=\Phi_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_i}+\Phi_{ji}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\Phi_{ik}\delta_{ik}+\Phi_{ji}\delta_{ij}=\Phi_{ii}+\Phi_{ii}=$$

$=2\Phi_{ii}=2\,Sp\,\Phi$ („шпур” на тензора Φ).

И така: $\Delta(r.\Phi.r)=2\,Sp\,\Phi$.

✸ **Задача:** (Стр. 68/Зад. $758^{в}$) Да се определи $\Delta\,(A.r)^2=?$

Решение:

(1) $\Delta\,(A.r)^2 = div\ grad\ (A.r)^2$

(2) $grad\ (A.r)^2 = 2(A.r)\underbrace{grad\ (A.r)}_{A} = 2(A.r)A$.

(3) $\Delta\,(A.r)^2 = div\,[2(A.r)A] = \dfrac{\partial}{\partial x_i}[2(A.r)A]_i = 2\dfrac{\partial}{\partial x_i}[A_k x_x A_i] = 2A_k A_i \dfrac{\partial x_x}{\partial x_i} =$

$= 2A_k A_i \delta_{ik} = 2A_k A_k = 2(A.A) \equiv 2A^2$.

✸ **Задача:** (Стр. 68/Зад. 759) Да се определи $\Delta\,[(A\times r).(B\times r)] = ?$

Решение:

(1) $\Delta\,u = div\ grad\ u$.

(2) $grad_i\ u = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A\times r).(B\times r) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A\times r)_k.(B\times r)_k =$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{mkn}A_m x_n)(-\varepsilon_{pkq}B_p x_q) = \varepsilon_{mkn}\varepsilon_{pkq}A_m B_p \dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_n x_q) =$

$= (\delta_{mp}\delta_{nq} - \delta_{mq}\delta_{np})A_m B_p\left(\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}x_q + x_n\dfrac{\partial x_q}{\partial x_i}\right) = (\delta_{mp}\delta_{nq} - \delta_{mq}\delta_{np})A_m B_p\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) =$

$= (\delta_{mp}\delta_{nq} - \delta_{mq}\delta_{np})A_m B_p\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) = \delta_{mp}\delta_{nq}A_m B_p\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) -$

$- \delta_{mq}\delta_{np}A_m B_p\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) = \delta_{nq}A_m B_m\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) - \delta_{mq}A_m B_n\left(\delta_{in}x_q + x_n\delta_{iq}\right) =$

$= \delta_{nq}A_m B_m\delta_{in}x_q + \delta_{nq}A_m B_m x_n\delta_{iq} - \delta_{mq}A_m B_n\delta_{in}x_q - \delta_{mq}A_m B_n x_n\delta_{iq} =$

$= A_m B_m\delta_{in}x_n + A_m B_m x_n\delta_{in} - A_m B_n\delta_{in}x_m - A_m B_n x_n\delta_{im} =$

$= A_m B_m x_i + A_m B_m x_i - A_m B_i x_m - A_i B_n x_n = 2(A.B)x_i - (A.r)B_i - (B.r)A_i$,

Следователно

(3) $grad\,[(A\times r).(B\times r)] = 2(A.B)r - (A.r)B - (B.r)A$.

Сега остава да определим дивергенция от получения резултат, т.е.

(4) $\Delta\,[(A\times r).(B\times r)] = div\,[2(A.B)r - (A.r)B - (B.r)A] =$

$= \dfrac{\partial}{\partial x_i}[2(A.B)r - (A.r)B - (B.r)A]_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(2A_m B_m x_i - A_m x_m B_i - B_m x_m A_i) =$

$= 2A_m B_m\dfrac{\partial x_i}{\partial x_i} - A_m B_i\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i} - B_m A_i\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i} = 2A_m B_m\underbrace{\delta_{ii}}_{3} - A_m B_i\delta_{im} - B_m A_i\delta_{im} =$

$= 6A_m B_m - A_m B_m - B_m A_m = 4A_m B_m = 4(A.B)$.

И така: $\Delta\,[(A\times r).(B\times r)] = 4(A.B)$.

✸ **Задача:** (Стр. 68/Зад. 758[г]) Да се определи $\Delta\,\underbrace{(A\times r)^2}_{u} = ?$

Решение:

(1) $\Delta\,u = div\ grad\ u$.

(2) $grad\ u = grad\ (A\times r)^2 = grad\ [A^2 r^2 - (A.r)^2] = A^2 grad\ r^2 - grad\ (A.r)^2 =$

$= A^2 2r\ grad\ r - 2(A.r)\underbrace{grad\ (A.r)}_{A} = 2A^2 r\dfrac{\vec{r}}{r} - 2(A.r)A = 2[A^2\vec{r} - (A.r)A]$, т.е.

(3) $\quad grad\ (A\times r)^2 = 2\,[A\times(r\times A)]$.

Тогава

(4) $\quad \Delta\,(A\times r)^2 = div\,\{2\,[A\times(r\times A)]\}\equiv 2div\,[A^2\vec{r}-(A.r)A]=$

$$= 2[A^2\underbrace{div\,\vec{r}}_{3} - div\,[(A.r)A]] = 6A^2 - 2\{(A.r)\underbrace{div\ A}_{0} + A.\underbrace{div\,(A.r)}_{A}\} =$$

$= 6A^2 - 2A^2 = 4A^2$.

И така: $div\,(A\times r)^2 = 4A^2$.

✸ **Задача:** (Стр. 69/Зад. 775) Да се определи $\Delta(r^{-\alpha}\vec{r}) = ?$

Решение: величината $(r^{-\alpha}\vec{r})$ е вектор, следователно прилагаме формулата за Лапласов оператор от векторно поле

(1) $\quad \Delta(r^{-\alpha}\vec{r}) = grad\ div\,(r^{-\alpha}\vec{r}) - rot\ rot\ (r^{-\alpha}\vec{r})$.

Нека предварително „подготвим" нужните производни полета

А) $\quad div\,(r^{-\alpha}\vec{r}) = r^{-\alpha}\underbrace{div\,\vec{r}}_{3} + \vec{r}.grad\ (r^{-\alpha}) = 3r^{-\alpha} - \alpha\, r^{-\alpha-1}\vec{r}.grad\ r =$

$$= 3r^{-\alpha} - \alpha\, r^{-\alpha-1}\vec{r}.\frac{\vec{r}}{r} = 3r^{-\alpha} - \alpha\, r^{-\alpha-1}\frac{r^2}{r} = 3r^{-\alpha} - \alpha\, r^{-\alpha-1}\,r = (3-\alpha)\,r^{-\alpha}.$$

Б) $\quad grad\ div\,(r^{-\alpha}\vec{r}) = grad\,[(3-\alpha)\,r^{-\alpha}] = (3-\alpha)\,grad\,[r^{-\alpha}] =$

$$= -\alpha\, r^{-\alpha-1}(3-\alpha)\,grad\ r = -\alpha\, r^{-\alpha-1}(3-\alpha)\frac{\vec{r}}{r} = -\alpha\,(3-\alpha)\,r^{-\alpha-2}\vec{r}.$$

В) $\quad rot\ (r^{-\alpha}\vec{r}) = r^{-\alpha}\underbrace{rot\ \vec{r}}_{0} + grad\ (r^{-\alpha})\times\vec{r} \equiv grad\ (r^{-\alpha})\times\vec{r} =$

$$= -\alpha\, r^{-\alpha-1}grad\ (r)\times\vec{r} = -\alpha\, r^{-\alpha-1}\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r} = -\alpha\, r^{-\alpha-2}(\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0}) \equiv 0,$$

следователно $rot\ rot\ (r^{-\alpha}\vec{r}) = 0$. Накрая получаваме

$$\Delta(r^{-\alpha}\vec{r}) = grad\ div\,(r^{-\alpha}\vec{r}) - rot\ rot\ (r^{-\alpha}\vec{r}) \equiv grad\ div\,(r^{-\alpha}\vec{r}) = -\alpha\,(3-\alpha)\,r^{-\alpha-2}\vec{r}.$$

✸ **Задача:** (Стр. 69/Зад. 776) Да се определи $\Delta\,[\underbrace{(A\times r)\times(B\times r)}_{\text{вектор } V}] = ?$

Решение: прилагаме формулата за Лапласов оператор от векторно поле

(1) $\quad \Delta[(A\times r)\times(B\times r)] = grad\ div\,[(A\times r)\times(B\times r)] - rot\ rot\ [(A\times r)\times(B\times r)]$.

Очевидно

(2) $\quad (A\times r)\times\underbrace{(B\times r)}_{U} = (A\times r)\times U = (A.U)r - (U.r)A =$

$$= [A.(B\times r)]r - [(B\times r).r]A = \underbrace{(A.B.r)}_{\text{смесено}}r - \underbrace{(B.r.r)}_{0}A = \underbrace{(A.B.r)}_{\text{смесено}}r = [\underbrace{(A\times B).r}_{\text{скалар}}]\,r$$

Нека предварително „подготвим" и нужните производни полета

А) $\quad div\,[(A\times r)\times(B\times r)] = div\,[(A\times B).\vec{r}]\vec{r} = (A\times B).\vec{r}\ \underbrace{div\ \vec{r}}_{3} + \vec{r}.\underbrace{grad\ [(A\times B).\vec{r}]}_{(A\times B)} =$

$$=3(A\times B).\vec{r}+\vec{r}.(A\times B)=4(A\times B).\vec{r}\,.$$

Б) $grad\ div\,[(A\times r)\times(B\times r)]=grad\,[4(A\times B).\vec{r}]=4(A\times B)$.

В) $rot\,[(A\times r)\times(B\times r)]=rot\,[(A\times B).\vec{r}]\vec{r}=[(A\times B).\vec{r}]\,\underbrace{rot\ \vec{r}}_{0}+\{\underbrace{grad\,[(A\times B).\vec{r}]}_{(A\times B)}\}\times\vec{r}=$

$$=(A\times B)\times\vec{r}\,.$$

Г) $rot\ rot\,[(A\times r)\times(B\times r)]=rot\,[(A\times B)\times r]=rot\,[(A.r)B-(B.r)A]=$

$$=rot\,[(A.r)B]-rot\,[(B.r)A]=\{(A.r)\underbrace{rot\ B}_{0}-B\times\underbrace{grad\ (A.r)}_{A}\}-\{(B.r)\underbrace{rot\ A}_{0}-A\times\underbrace{grad\ (B.r)}_{B}\}=$$

$$=-B\times A+A\times B=2\,(A\times B)\,.$$

След тази предварителна подготовка можем да конструираме лапласовия оператор:

$$\Delta[(A\times r)\times(B\times r)]=\underbrace{grad\ div\,[(A\times r)\times(B\times r)]}_{4\,(A\times B)}-\underbrace{rot\ rot\,[(A\times r)\times(B\times r)]}_{2\,(A\times B)}=2\,(A\times B)\,.$$

✸ **Задача:** (Стр. 69/Зад. 778) Да се определи $\Delta[A.\{r,r\}]=?$

Решение: нека най-напред приложим следната формула

(1) $\vec{A}.\{\vec{B},\vec{C}\}=(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

спрямо вектора, от който търсим лапласов оператор

(2) $A.\{r,r\}=(A.r)\,r\,.$

Тогава

(3) $\Delta[A.\{r,r\}]=grad\ div\,[(A.r)\,r]-rot\ rot\,[(A.r)\,r]$

Да „подготвим" предварително нужните производни полета

А) $div\,[(A.r)\,r]=(A.r)\underbrace{div\ r}_{3}+r.\underbrace{grad\ (A.r)}_{A}=3(A.r)+(A.r)=4(A.r)\,.$

Б) $grad\ div\,[(A.r)\,r]=grad\,[4(A.\vec{r})]=4\underbrace{grad\ (A.\vec{r})}_{A}=4A\,.$

В) $rot\,[(A.r)\,r]=(A.r)\underbrace{rot\ r}_{0}+\{\underbrace{grad\ (A.r)}_{A}\}\times r=A\times r\,.$

Г) $rot\ rot\,[(A.r)\,r]=rot\ (A\times r)\,.$

Но $rot_i\,(A\times r)=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}(A\times r)_n=-\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}(-\varepsilon_{pnq}A_p x_q)=$

$$=\varepsilon_{\min}\,\varepsilon_{pnq}A_p\frac{\partial x_q}{\partial x_m}=-\varepsilon_{mni}\,\varepsilon_{pnq}A_p\delta_{mq}=-\varepsilon_{mni}\,\varepsilon_{pnm}A_p=$$

$$=-(\underbrace{\delta_{mp}\delta_{im}}_{\delta_{ip}}-\underbrace{\delta_{mm}}_{3}\delta_{ip})A_p=4\delta_{ip}A_p=4A_i\,,$$

следователно $rot\ rot\,[(A.r)\,r]=rot\ (A\times r)=4A\,.$

Накрая определяме

$$\Delta[A.\{r,r\}]=\underbrace{grad\ div\,[(A.r)\,r]}_{4A}-\underbrace{rot\ rot\,[(A.r)\,r]}_{2A}=2A\,.$$

Тема: Интегрални теореми във векторния анализ

🕮 Теоретичен минимум

✍ Теорема на Гаус. Поток на векторно поле през затворена повърхност

$$\boxed{\int_V div\vec{U}\,dV = \oint_{S_V} \vec{U}.d\vec{S}}$$ - поток на вектора $\vec{U}$ през повърхността.

Операторен вид на теоремата, позволяващ написването на още интегрални теореми, подобни на теоремата на Гаус:

(*) $$\boxed{\int_V dV\,\nabla = \oint_{S_V} d\vec{S}}.$$

а) при прилагане на формула (*) към скаларно поле $u(r)$:

$$\int_V dV\,\nabla u(r) = \oint_{S_V} u(r)\,d\vec{S} \quad\Rightarrow\quad \int_V grad\,u(r)\,dV = \oint_{S_V} u(r)\,d\vec{S}\,.$$

б) при прилагане на формула (*) към векторно поле $\vec{U}(r)$ чрез скаларно умножение:

$$\int_V dV\,\nabla.\vec{U}(r) = \oint_{S_V} d\vec{S}.\vec{U}(r) \quad\Rightarrow\quad \int_V div\vec{U}(r)\,dV = \oint_{S_V} \vec{U}(r).d\vec{S}$$, което изразява точно теоремата на Гаус.

в) при прилагане на формула (*) към векторно поле $\vec{U}(r)$ чрез векторно умножение:

$$\int_V dV\,\nabla\times\vec{U}(r) = \oint_{S_V} d\vec{S}\times\vec{U}(r) \quad\Rightarrow\quad \int_V rot\,\vec{U}(r)\,dV = \oint_{S_V} d\vec{S}\times\vec{U}(r)\,.$$

г) при прилагане на формула (*) към векторно поле $\vec{U}(r)$ чрез тензорно умножение:

$$\int_V dV\,\nabla\vec{U}(r) = \oint_{S_V} \{d\vec{S},\vec{U}(r)\} \quad\Rightarrow\quad \int_V Grad\,\vec{U}\,dV = \oint_{S_V} \{d\vec{S},\vec{U}\}\,.$$

д) при прилагане на формула (*) към тензорно поле $\Phi(r)$ чрез векторно произведение (т.е. вектор х тензор = вектор):

$$\int_V dV\,\nabla.\Phi(r) = \oint_{S_V} (d\vec{S}.\Phi(r)) \quad\Rightarrow\quad \int_V Div\Phi\,dV = \oint_{S_V} (d\vec{S}.\Phi)\,.$$

е) при прилагане на формула (*) към тензорно поле $\Phi(r)$ чрез тензорно произведение (т.е. вектор х тензор = тензор):

$$\int_V dV\,(\nabla\times\Phi(r)) = \oint_{S_V} (d\vec{S}\times\Phi(r)) \quad\Rightarrow\quad \int_V Rot\Phi\,dV = \oint_{S_V} (d\vec{S}\times\Phi)\,.$$

✍ Теорема на Стокс. Циркулация на векторно поле по затворена крива

$$\boxed{\int_S rot\,\vec{U}.d\vec{S} = \oint_{L_S} \vec{U}.d\vec{r}}$$ - циркулация на $\vec{U}$ по затворен контур.

Операторен вид на теоремата, позволяващ написването на още интегрални теореми, подобни на теоремата на Стокс:

(**) $$\boxed{\int_S d\vec{S}\times\nabla = \oint_{L_S} d\vec{r}}$$

а) при прилагане на формула (**) към скаларно поле $u(r)$:

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla u = \oint_{L_S} u\,d\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \int_S d\vec{S}\times grad\,u = \oint_{L_S} u\,d\vec{r}\,.$$

б) при прилагане на формула (**) към векторно поле $\vec{U}(r)$, което умножава скаларно операторното равенство (**):

$$\int_S d\vec{S}\times\nabla.\vec{U} = \oint_{L_S} \vec{U}.d\vec{r}\,.$$

Ако използваме, че $(d\vec{S}\times\nabla).\vec{U} = d\vec{S}.(\nabla\times\vec{U}) \equiv d\vec{S}.rot\,\vec{U}$, то $\boxed{\int_S rot\,\vec{U}.d\vec{S} = \oint_{L_S}\vec{U}.d\vec{r}}$, т.е. самата теорема на Стокс.

в) при прилагане на формула (**) към векторно поле $\vec{U}(r)$, което умножава векторно операторното равенство (**), ще получим:

$$\int_S (d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{U} = \oint_{L_S} d\vec{r}\times\vec{U}\,,$$ и т.н.

✍ Формули на Грин

◆ **Първа формула на Грин** се получава от теоремата на Гаус $\int_V div\vec{U}\,dV = \oint_{S_V}\vec{U}.d\vec{S}$, приложена за векторно поле $\vec{U}(r)$, имащо представянето $\boxed{\vec{U} = grad\,u}$, т.е. потенциално поле. Тогава $div\vec{U} \equiv div\,grad\,u = \Delta u$, което след заместване в теоремата на Гаус, дава $\int_V \Delta u\,dV = \oint_{S_V} grad\,u.d\vec{S}$.

$$\boxed{\int_V \Delta u\,dV = \oint_{S_V}\frac{\partial u}{\partial n}\left|d\vec{S}\right|}$$ - **първа формула на Грин.**

◆ За **втора формула на Грин** се използва пак теоремата на Гаус, но векторното поле $\vec{U}(r)$ се представя не като $\vec{U} = grad\,u$, а във вида $\boxed{\vec{U} = u\,grad\,v - v\,grad\,u}$. Тогава $div\vec{U} = div(u\,grad\,v) - div(v\,grad\,u)$, и получаваме

$$\int_V [u\Delta v - v\Delta u]dV = \oint_{S_V}[u\,grad\,v - v\,grad\,u].\left|d\vec{S}\right|.\vec{n}\,,$$ т.е.

$$\int_V [u\Delta v - v\Delta u]dV = \oint_{S_V}[u(grad\,v.\vec{n}) - v(grad\,u.\vec{n})].\left|d\vec{S}\right|,$$ което с помощта на нормалните производни $(grad\,u.\vec{n}) = \frac{\partial u}{\partial n}$ и $(grad\,v.\vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial n}$ може да се представи във вида

$$\boxed{\int_V [u\Delta v - v\Delta u]dV = \oint_{S_V}[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}].\left|d\vec{S}\right|}$$ - **втора формула на Грин.**

🕮 Соленоидално и потенциално векторни полета

✓ **Опр. 1:** векторно поле $\vec{U}(r)$, за което $\boxed{div\vec{U} \equiv 0}$, се нарича **соленоидално** векторно поле. **НДУ** едно поле да е соленоидално е то да може да се представи във вид на **ротация** от (друго) **векторно поле:** $\boxed{\vec{U} = rot\,\vec{A}}$.

Пример: магнитно поле $\vec{B} = rot\,\vec{A}$.

✓ **Опр. 2**: векторно поле $\vec{U}(r)$, за което $\boxed{rot\,\vec{U} \equiv 0}$, се нарича **потенциално** векторно поле. **НДУ** едно поле да е **потенциално** е то да може да се представи във вид на **градиент от** някакво **скаларно поле:** $\boxed{\vec{U}(r) = grad\,u(r)}$.

Пример: електрично поле $\vec{E} = -grad\,\varphi$.

✸ **Задача (стр. 74/зад. 832[а,б,в]):** Да се докажат равенствата:

(а) $\oint\limits_{S_V} \vec{r}.d\vec{S} = 3v$, където v е обем на областта, заградена от затворената повърхност S_V;

(б) $\oint\limits_{S_V} \vec{A}.\vec{r}.d\vec{S} = 0$, където $\vec{A}.\vec{r}.d\vec{S} = (A \times r).dS$ е смесено произведение на три вектора;

(в) $\oint\limits_{S_V} \vec{r} \times d\vec{S} = 0$.

Решение:

(а) Ако в теоремата на Гаус

(1) $$\int\limits_V div\vec{U}(r)\,dV = \oint\limits_{S_V} \vec{U}(r).d\vec{S}$$

положим формално $U(r) = r$, получаваме

(2) $$\int\limits_V div\,r\,dV = \oint\limits_{S_V} r.d\vec{S},$$

следователно търсеният в задачата интеграл ще бъде

(3) $$\oint\limits_{S_V} r.d\vec{S} = \int\limits_V \underbrace{div\,r}_{3}\,dV = 3\underbrace{\int\limits_V dV}_{v} = 3v, \qquad \text{к.т.д.}$$

(б) Прилагаме отново теоремата на Гаус (1), като този път положим $U = A \times r$, с което получаваме

(4) $$\int\limits_V div(A \times r)\,dV = \oint\limits_{S_V} (A \times r).d\vec{S} \equiv \oint\limits_{S_V} \vec{A}.\vec{r}.d\vec{S}.$$

Така за търсения интеграл получаваме

(5) $$\oint\limits_{S_V} \vec{A}.\vec{r}.d\vec{S} = \int\limits_V div(A \times r)\,dV.$$

Нека пресметнем отделно само $div(A \times r)$:

(6) $$div(A \times r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A \times r)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{\min}A_m x_n) = -\varepsilon_{\min}A_m \frac{\partial x_n}{\partial x_i} =$$
$$= -\varepsilon_{\min}A_m \delta_{in} = -\underbrace{\varepsilon_{mii}}_{0}A_m \equiv 0.$$

След заместването на така намерената дивергенция в дясната страна на (5) твърдението е доказано.

(в) За доказателството на това твърдение ще използваме следната интегрална теорема на Гаус в операторен вид

(7) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla} = \oint\limits_{S_V} d\vec{S}$ $\quad\Big|\ \underbrace{\times\vec{r}}_{\uparrow}$

действаме в-у $\vec{r}$ чрез векторно произведение

(8) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla}\times\vec{r} = \oint\limits_{S_V} d\vec{S}\times\vec{r}$.

Така за търсения в задачата интеграл получаваме

(9) $\oint\limits_{S_V}\vec{r}\times d\vec{S} = -\int\limits_V(\vec{\nabla}\times\vec{r})dv = -\int\limits_V \underbrace{rot\,r}_{0}\,dv = 0$, к.т.д.

✸ **Задача (стр. 74/зад. 833[а,б]):** Да се докажат равенствата:

(а) $\oint\limits_{S_V}(A.r)d\vec{S} = Av$, където v е обем на областта, заградена от затворената повърхност S_V;

(б) $\oint\limits_{S_V}(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r})).d\vec{S} = -2(\vec{A}.\vec{B})\,v$.

Решение:

(а) Използваме отново „операторната” интегрална теорема

(1) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla} = \oint\limits_{S_V} d\vec{S}$,

с която действаме този път върху скаларната величина $(A.r)$:

(2) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla}(A.r) = \oint\limits_{S_V} d\vec{S}(A.r)$,

или още

(3) $\oint\limits_{S_V}(A.r)d\vec{S} = \int\limits_V \vec{\nabla}(A.r)\,dv = \int\limits_V \underbrace{grad\,(A.r)}_{A}\,dv = A\underbrace{\int\limits_V dv}_{v} = A\,v$, к.т.д.

(б) Ако приложим теоремата на Гаус

(4) $\int\limits_V div\vec{U}\,dV = \oint\limits_{S_V}\vec{U}.d\vec{S}$

за случая $\vec{U} = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r})$, получаваме

(5) $\int\limits_V div(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r}))dV = \oint\limits_{S_V}(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r})).d\vec{S}$.

Нека пресметнем отделно $div(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r}))$:

(6) $div(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r})) = div[(A.r)B-(A.B)r] =$
$= div[(A.r)B-(A.B)r] = div[(A.r)B] - div[(A.B)r] =$
$= [(A.r)\underbrace{div\,B}_{0} + B.\underbrace{grad\,(A.r)}_{A}] - [(A.B)\underbrace{div\,r}_{3} + r.\underbrace{div(A.B)}_{0}] =$
$= (B.A) - 3(A.B) = -2(A.B)$.

Заместваме така намерената дивергенция в лявата страна на (5), с което получаваме

(7) $\oint\limits_{S_V}(\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{r})).d\vec{S} = \int\limits_V[-2(A.B)]dV = -2(A.B)\underbrace{\int\limits_V dV}_{v} = -2(A.B)\,v$, к.т.д.

✸ **Задача (стр. 74/зад. 834[а,б,в]):** Да се докажат равенствата:

(а) $\oint\limits_{S_V}\{d\bar{S},r\}=v\,\delta$, където δ е единичен тензор;

(б) $\oint\limits_{S_V}(\Phi.r).dS=v\,Sp\,\Phi$;

(в) $\oint\limits_{S_V}\{d\bar{S},\,A\times r\}=v\{A\}$, където тензорът $\{A\}_{ij}=-\varepsilon_{imj}A_m$.

Решение:

(а) Използваме операторния вид на интегралната теорема на Гаус

(1) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla}=\oint\limits_{S_V}d\vec{S}$,

с която действаме върху $\vec{r}$ тензорно, т.е.

(2) $\int\limits_V dv\,\{\vec{\nabla},r\}=\oint\limits_{S_V}\{d\vec{S},r\}$.

Следователно търсеният в задачата интеграл ще бъде

(3) $\oint\limits_{S_V}\{d\vec{S},r\}=\int\limits_V\{\vec{\nabla},r\}dv\equiv\int\limits_V\underbrace{Grad\,r}_{\delta}\,dv=\delta\int\limits_V dv=\delta\,v$, к.т.д.

(б) Прилагаме теоремата на Гаус

(4) $\int\limits_V div\vec{U}\,dV=\oint\limits_{S_V}\vec{U}.d\vec{S}$

за векторното поле $U=\Phi.r$:

(5) $\int\limits_V div(\Phi.r)\,dV=\oint\limits_{S_V}(\Phi.r).d\vec{S}$,

с което търсеният интеграл добива вида

(6) $\oint\limits_{S_V}(\Phi.r).d\vec{S}=\int\limits_V div(\Phi.r)\,dV$.

Нека определим отделно $div(\Phi.r)$:

(7) $div(\Phi.r)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\Phi.r)_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\Phi_{ik}x_k)=\Phi_{ik}\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}=\Phi_{ik}\delta_{ik}=\Phi_{ii}\equiv Sp\,\Phi$.

След заместване на (7) в дясната страна на (6) получаваме

(8) $\oint\limits_{S_V}(\Phi.r).d\vec{S}=\int\limits_V Sp\,\Phi\,dV=Sp\,\Phi\underbrace{\int\limits_V dV}_{v}=v\,Sp\,\Phi$, к.т.д.

(в) Прилагаме операторната теорема

(9) $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla}=\oint\limits_{S_V}d\vec{S}$,

с която действаме върху $\vec{A}\times\vec{r}$ тензорно, т.е.

(10) $\int\limits_V dv\,\{\vec{\nabla},\vec{A}\times\vec{r}\}=\oint\limits_{S_V}\{d\vec{S},\vec{A}\times\vec{r}\}$.

Така търсеният в условието на задачата интеграл се представя

(11) $\oint\limits_{S_V}\{d\vec{S},\vec{A}\times\vec{r}\}=\int\limits_V\{\vec{\nabla},\vec{A}\times\vec{r}\}dv=\int\limits_V Grad(\vec{A}\times\vec{r})dv$.

Нека пресметнем отделно $Grad(\vec{A}\times\vec{r})$:

(12) $$Grad_{ij}(\vec{A}\times\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A\times r)_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(-\varepsilon_{mjn}A_m x_n) = -\varepsilon_{mjn}A_m\frac{\partial x_n}{\partial x_i} =$$
$$= -\varepsilon_{mjn}A_m\delta_{in} = -\varepsilon_{mji}A_m = -\varepsilon_{imj}A_m = \{A\}_{ij}\,.$$

След заместването на градиента в дясната страна на (11) елементарно се получава равенството, което трябва да се докаже.

✸ **Задача (стр. 74/зад. 835[а]):** Да се докаже равенството:

(1) $\oint\limits_{S_V}\vec{r}(dS.A = Av$, където v е обем на областта, заградена от затворената повърхност S_V.

Решение: нека разгледаме векторното тъждество

(2) $(A\times r)\times dS = (A.dS)r - (r.dS)A,$

от което изразяваме

(3) $r(A.dS) = (A\times r)\times dS + (r.dS)A = (r.dS)A - dS\times(A\times r)\,.$

Ако заместим (3) в (1), получаваме

(4) $$\oint\limits_{S_V}\vec{r}(dS.A = \underbrace{\oint\limits_{S_V}(r.dS)A}_{I_1} - \underbrace{\oint\limits_{S_V}dS\times(A\times r)}_{I_2}\,.$$

За интеграла I_1 прилагаме директно теоремата на Гаус

(5) $$I_1 = A\oint\limits_{S_V}r.dS = A\int\limits_V \underbrace{div\, r}_{3}\, dv = 3A\int\limits_V dv = 3Av\,.$$

За интеграла I_2 ще използваме интегралната теорема $\int\limits_V dv\,\vec{\nabla} = \oint\limits_{S_V}d\vec{S}$, която прилагаме спрямо векторното поле $(A\times r)$ чрез операция за векторно умножение

(6) $$\int\limits_V dv\,\vec{\nabla}\times(A\times r) = \oint\limits_{S_V}d\vec{S}\times(A\times r)\,.$$

Така за I_2 ще имаме

(7) $$I_2 = \oint\limits_{S_V}dS\times(A\times r) = \int\limits_V\nabla\times(A\times r)dv = \int\limits_V \underbrace{rot\,(A\times r)}_{2A}\, dv = 2A\int\limits_V dv = 2Av\,.$$

След заместването на така намерените I_1 и I_2 в (4) получаваме точно $\oint\limits_{S_V}\vec{r}(dS.A = Av$, к.т.д.

✸ **Задача (стр. 77/зад. 864[а,б])** Да се докаже, че

(а) $\oint\limits_L u(r)\,r\,dr = 0,$

(б) $\oint\limits_L (A\times(A\times r))dr = 0$

Решение:

(а) Ако за вектора $U = u(r)\vec{r}$ приложим теоремата на Стокс

(1) $\int\limits_S rotU.dS = \oint\limits_{L_S}U.dr\,,$

ще получим

(2) $\oint\limits_L u(r)\vec{r}.dr = \int\limits_S rot[u(r)\vec{r}].dS$.

Нека пресметнем отделно $rot[u(r)\vec{r}]$:

(3) $rot[u(r)\vec{r}] = u(r)\underbrace{rot\,\vec{r}}_{0} + [grad\ u(r)]\times r = \left(\dfrac{\partial u(r)}{\partial r} grad\ r\right)\times r =$

$= \left(\dfrac{\partial u(r)}{\partial r}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)\times r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u(r)}{\partial r}(\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0}) \equiv 0$,

откъдето след заместване в (2) доказателството следва непосредствено.

(б) Отново прилагаме теоремата на Стокс, но за вектора

(4) $U = A\times(A\times r) = (A.r)A - A^2 r$.

(5) $\oint\limits_{L_S} U.dr = \int\limits_S rotU.dS \quad\Rightarrow\quad \oint\limits_{L_S} A\times(A\times r).dr = \int\limits_S rot[A\times(A\times r)].dS$.

Нека пресметнем отделно $rot[A\times(A\times r)]$:

(6) $rot[A\times(A\times r)] = rot[(A.r)A - A^2 r] = rot[(A.r)A] - rot[A^2 r] =$

$= [(A.r)\underbrace{rot\ A}_{0} + (\underbrace{grad\ (A.r)}_{A})\times A] - [A^2\underbrace{rot\ r}_{0} + (\underbrace{grad\ A^2}_{0})\times r] = A\times A \equiv 0$.

След заместване на ротацията в (5) доказателството следва директно, т.е. $\oint\limits_L (A\times(A\times r))\,dr = 0$.

✸ **Задача (стр. 77/зад. 864[в])** Да се докаже, че

(1) $\oint\limits_L (A\times r)\times dr = 2\vec{A}\times\vec{s}$,

където $\vec{s} = \int\limits_S d\vec{S}$ е т.нар. лицев вектор.

Решение: използваме следната интегрална теорема (от типа на Стокс) в операторен запис

(2) $\int\limits_S dS\times\nabla = \oint\limits_{L_S} dr$.

Нека с оператора (2) „подействаме” върху вектора $(A\times r)$ чрез векторно умножение

(3) $\int\limits_S dS\times\nabla\times(A\times r) = \oint\limits_{L_S} dr\times(A\times r)$,

откъдето получаваме

(4) $\oint\limits_L (A\times r)\times dr = \int\limits_S [\nabla\times(A\times r)]\times dS$, т.е. $\oint\limits_L (A\times r)\times dr = \int\limits_S [rot(A\times r)]\times dS$.

Нека определим отделно $rot(A\times r)$:

(5) $rot_i(A\times r) = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}(A\times r)_n = -\varepsilon_{\min}\dfrac{\partial}{\partial x_m}(-\varepsilon_{pnq}A_p x_q) =$

$= \varepsilon_{\min}\varepsilon_{pnq}A_p\dfrac{\partial x_q}{\partial x_m} = \varepsilon_{\min}\varepsilon_{pnq}A_p\delta_{mq} = \varepsilon_{\min}\varepsilon_{pnm}A_p = \varepsilon_{inm}\varepsilon_{pnm}A_p =$

$$=(\delta_{ip}\underbrace{\delta_{nn}}_{3}-\underbrace{\delta_{in}\delta_{np}}_{\delta_{ip}})A_p=2\delta_{ip}A_p=2A_i\,,$$

откъдето следва, че $rot(A\times r)=2A$. След заместване на ротацията в (4) получаваме

(6) $$\oint_L (A\times r)\times dr=\int_S [rot(A\times r)]\times dS=\int_S 2A\times dS=2A\times\underbrace{\int_S dS}_{\vec{s}}=2A\times\vec{s}\,,$$ к.т.д.

✸ **Задача (стр. 77/зад. 865)** Да се докаже, че

(1) $$\oint_L u\,dv=\oint_S grad\,u\,.grad\,v\,.dS$$

Доказателство:

(1) $$\oint_L u\,dv=\oint_L u\,dv\frac{dr}{dr}=\oint_L u\,dv\frac{dr}{dr}=\oint_L u\left(\frac{dv}{dr}\right).dr\equiv\oint_L \underbrace{u\,grad\,v}_{\text{вектор } U}.dr$$

За контурния интеграл в (1) прилагаме теоремата на Стокс

(2) $$\oint_L (\underbrace{u\,grad\,v}_{U}).dr=\int_S rot\,(\underbrace{u\,grad\,v}_{U}).dS\,.$$

Но $rot\,(u\,grad\,v)=u\,\underbrace{rot\,grad\,v}_{0}+grad\,u\times grad\,v=grad\,u\times grad\,v\,,$

следователно

(3) $$\oint_L u\,.dv=\int_S rot\,(u\,grad\,v).dS=\int_S (grad\,u\times grad\,v).dS\,.$$

Ако в последния интеграл представим смесеното произведение на 3 вектора във стандартния запис $(grad\,u\times grad\,v).dS=(grad\,u\,.grad\,v.dS)$, то (3) добива вида

(4) $$\oint_L u\,dv=\oint_S grad\,u\,.grad\,v\,.dS\,,$$ к.т.д.

✸ **Задача (стр. 77/зад. 866)** Да се докаже, че

(1) $$\oint_L (u\,grad\,v).dr=-\oint_L (v\,grad\,u).dr\,.$$

Доказателство:

В предишната задача доказахме, че

(2) $$\oint_L (u\,grad\,v).dr=\int_S (grad\,u\times grad\,v).dS\,.$$

То може да бъде записано още във вида

(3) $$\oint_L (u\,grad\,v).dr=-\int_S (grad\,v\times grad\,u).dS\,.$$

За да можем да приложим теорема на Стокс спрямо интеграла в дясната страна на (3), е необходимо да получим ротация от някаква функция. За целта използваме, че $rot\,(grad\,u)\equiv 0$ и представяме подинтегралната функция в дясната страна на (3) във вида

(4) $$(grad\,v\times grad\,u)=v\,\underbrace{rot\,(grad\,u)}_{0}+(grad\,v\times grad\,u)\equiv rot\,(v\,grad\,u)\,.$$

Ако с така намереното представяне заместим в (3), ще имаме

(5) $$\oint_L (u\,grad\,v).dr=-\int_S (grad\,v\times grad\,u).dS=-\int_S rot\,(v\,grad\,u).dS\,.$$

За интеграла в най-дясната страна на (5) прилагаме теоремата на Стокс

(6) $\int\limits_S rot\,(v\, grad\, u).dS = \oint\limits_L v\, grad\, u\,.dr$.

След заместване на (6) в (5) получаваме

(7) $\oint\limits_L (u\; grad\; v).dr = -\int\limits_S rot\,(v\, grad\, u).dS = -\oint\limits_L v\, grad\, u\,.dr$, к.т.д.

✷ **Задача (стр. 81/зад. 891)** Да се докаже, че ако $k(\vec{r})$ е дадено скаларно поле, дефинирано и непрекъснато в цялото пространство V_∞ и клонящо към нула достатъчно бързо при $r \to \infty$, то единственото анулиращо се в безкрайност решение на уравнението на Поасон

(1) $\Delta u(\vec{r}) = -k(\vec{r})$

е функцията

(2) $u(\vec{r}) = \int\limits_{V_\infty} \dfrac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} dv^/$.

Доказателство:

Нека най-напред проверим дали функцията (2) удовлетворява уравнението на Поасон (1). За целта нека определим $\Delta u(\vec{r})$, използвайки, че:

(а) операторът на Лаплас Δ действа върху $\vec{r}$, но не и върху $\vec{r}^{\,/}$;

(б) $\Delta \dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,/})$, където $\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,/})$ е делта-функция;

(в) $\int\limits_{V_\infty} F(\vec{r}^{\,/})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,/}) = F(\vec{r})$ - свойство на делта-функцията.

С отчитането на всичко това получаваме

(3) $$\Delta u(\vec{r}) = \Delta\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} dv^/\right) = \int\limits_{V_\infty} \Delta\left(\frac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\right) dv^/ =$$

$$= \int\limits_{V_\infty} \frac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\right) dv^/ = \int\limits_{V_\infty} \frac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi}\{\underbrace{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,/})}_{(б)}\} dv^/ =$$

$$= -\int\limits_{V_\infty} k(\vec{r}^{\,/})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,/})\, dv^/ = -\underbrace{k(\vec{r})}_{(в)},$$

откъдето следва, че функцията (2) действително удовлетворява уравнението на Поасон (1).

Остава да докажем единствеността на решението (2). За целта нека допуснем, че има (*поне*) две различни помежду си функции $u(\vec{r})$ и $v(\vec{r})$, които удовлетворяват уравнението на Поасон, т.е.

($4^а$) $\Delta u(\vec{r}) = -k(\vec{r})$, и

($4^б$) $\Delta v(\vec{r}) = -k(\vec{r})$.

Нека разгледаме функцията $w(\vec{r})$, дефинирана като разлика на $u(\vec{r})$ и $v(\vec{r})$:

(5) $w(\vec{r}) = u(\vec{r}) - v(\vec{r})$.

Тази функция, за разлика от функциите $u(\vec{r})$ и $v(\vec{r})$, следва да удовлетворява уравнението на Лаплас

(6) $\Delta w(\vec{r}) = 0$.

Действително, съгласно ($4^{а,б}$)

(7) $\Delta w(\vec{r}) = \Delta[u(\vec{r}) - v(\vec{r})] = \Delta u(\vec{r}) - \Delta v(\vec{r}) = -k(\vec{r}) - [-k(\vec{r})] = 0$

Идеята на доказателството на единствеността на решението (2) се заключава в това да докажем (покажем), че уравнението на Лаплас (6) допуска само тривиалното решение $w(\vec{r}) \equiv 0$, от което ще следва, че $v(\vec{r}) \equiv u(\vec{r})$, т.е. решението е само едно единствено. Затова нека допуснем обратното, т.е. че уравнението на Лаплас (6) допуска нетривиално решение $w(\vec{r}) \neq 0$, и нека върху тази различна от нула функция подействаме с оператора (операторното равенство)

(8) $\displaystyle\int_{V_\infty} dv\, \nabla = \oint_{S_\infty} d\vec{S}$,

изразяващо теоремата на Гаус-Остроградски в операторна форма. Така получаваме

(9) $\displaystyle\int_{V_\infty} \underbrace{\nabla w(\vec{r})}_{grad\, w(\vec{r})}\, dv = \oint_{S_\infty} w(\vec{r}) d\vec{S}$, т.е.

(10) $\displaystyle\int_{V_\infty} grad\, w(\vec{r})\, dv = \oint_{S_\infty} w(\vec{r}) d\vec{S}$.

В обемния интеграл в лявата страна на (10) функцията $w(\vec{r})$ участва със стойностите си във всяка възможна точка $\vec{r} \in V_\infty$, докато в повърхнинния интеграл вдясно тя участва само със стойностите си върху безкрайната сфера S_∞, върху която тя приема само стойности „нула”. Действително, съгласно условието на задачата решенията на (1) следва да се анулират в безкрайност, следователно

(11) $w(\vec{r})_{|\, r\to\infty} = \underbrace{u(\vec{r})_{|\, r\to\infty}}_{0} - \underbrace{v(\vec{r})_{|\, r\to\infty}}_{0} \equiv 0$.

Щом за $\forall\, \vec{r} \in S_\infty$ функцията $w(\vec{r}) = 0$ (*но това все още не се твърди за* $\forall\, \vec{r} \in V_\infty$), то очевидно повърхнинният интеграл в дясната страна на (10) е тъждествено равен на нула, следователно

(12) $\displaystyle\int_{V_\infty} grad\, w(\vec{r})\, dv = 0$ за $\forall\, \vec{r} \in V_\infty$.

Последното е възможно само тогава, когато $grad\, w(\vec{r}) \equiv 0$ за $\forall\, \vec{r} \in V_\infty$, а това е възможно само ако

(13) $w(\vec{r}) = 0$ за $\forall\, \vec{r} \in V_\infty$.

Щом това е така, то предположението че има две различни решения на (2) се оказа невярно, следователно решението $u(\vec{r})$, даващо се с (1), се оказва единствено, к.т.д.

В заключение нека представим един резултат от решаването на тази задача във вид, в който той може да бъде използван в следваща(та) задача: както следва непосредствено от (1) и (2)

(14) $\displaystyle k(\vec{r}) = -\Delta u(\vec{r}) = -\Delta\left(\int_{V_\infty} \frac{k(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,/}\right|} dv^{/} \right)$.

✸ **Задача (стр. 81/зад. 892)** Да се докаже, че произволно векторно поле $U(\vec{r})$, чиито компоненти са еднозначно дефинирани, притежават непрекъснати първи частни производни по x, y и z във всяка точка и клонят към нула при $r \to \infty$, може да се представи във вида

$$(1)\qquad \boxed{U(\vec{r}) = grad\, u(\vec{r}) + rot\, \vec{V}(\vec{r})},\quad \text{където}$$

$$(2)\qquad \boxed{u(\vec{r}) = -\int\limits_{V_\infty} \frac{div^/\, U(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/},\quad \text{и}$$

$$(3)\qquad \boxed{\vec{V}(\vec{r}) = \int\limits_{V_\infty} \frac{rot^/\, U(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/}.$$

Горното твърдение изразява т.нар. теорема на Хелмхолц. В нея се твърди още, че $div\vec{V}(\vec{r}) \equiv 0$. В (2) и (3) V_∞ означава цялото пространство, а $div^/$ и $rot^/$ са производни полета, за които диференцирането се извършва по компонентите $x^/, y^/$ и $z^/$ на радиус-вектора $\vec{r}^{\,/}$.

Доказателство: използвайки резултат от предната задача можем да запишем (*по аналогия с формула (14) от нея*), че

$$(4)\qquad \vec{U}(\vec{r}) = -\Delta\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right),$$

като това равенство може да се докаже по начина, по който това бе направено в предната задача. Понеже чрез обемния интеграл в (4) се задава един вектор, то лапласовият оператор ще се „разпише" във вида

$$(5)\qquad \vec{U}(\vec{r}) = -grad\ div\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right) + rot\ rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right) =$$

$$= grad\underbrace{\left[-div\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right)\right]}_{\text{скаларно поле } u(\vec{r})} + rot\underbrace{\left[rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right)\right]}_{\text{векторно поле } \vec{V}(\vec{r})},$$

откъдето непосредствено следва представянето от тип (1) но с уточнението, че

$$(6)\qquad u(\vec{r}) = -div\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right),\quad \text{и}$$

$$(7)\qquad \vec{V}(\vec{r}) = rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right).$$

При това от представянето (7) непосредствено се вижда, че

$$(8)\qquad div\,\vec{V}(\vec{r}) = div\, rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^/\right) \equiv 0,\quad \text{к.т.д.}$$

С това основните твърдения в задачата са всъщност доказани и остава да покажем, че представянията (6) и (7) са еквивалентни на (2) и (3) съответно.

Да започнем с представянето (6) за $u(\vec{r})$. Понеже диференцирането (т.е. div) е по $\vec{r}$, а интегрирането (т.е. $dv^/$) е по компонентите на $\vec{r}^{\,/}$, то очевидно двете операции (*диференциране и интегриране*) в горепосочения контекст комутират, т.е.

$$(9)\qquad u(\vec{r}) = -div\int\limits_{V_\infty}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}dv^/ = -\int\limits_{V_\infty} div\left[\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\right]dv^/ .$$

Нека пресметнем отделно

$$div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{1}{4\pi}div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{1}{4\pi}div\left[\underbrace{\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}}_{скалар}\underbrace{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{вектор}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\underbrace{div\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{0} + \vec{U}(\vec{r}^{\,/}).grad\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\right).$$

Но $div\vec{U}(\vec{r}^{\,/}) \equiv 0$, понеже диференцирането е по компонентите на $\vec{r}$, а не на $\vec{r}^{\,/}$, следователно

$$(10)\qquad div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi}.grad\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} .$$

Нека сега пресметнем и

$$div^/\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{1}{4\pi}div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{1}{4\pi}div^/\left[\underbrace{\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}}_{скалар}\underbrace{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{вектор}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\underbrace{div^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{\neq 0} + \vec{U}(\vec{r}^{\,/}).grad^{\,/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\right).$$

Но сега вече $div^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/}) \neq 0$, понеже диференцирането е по компонентите на $\vec{r}^{\,/}$, затова

$$(11)\qquad div^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \frac{div^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} + \frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi}.grad^{\,/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} .$$

Лесно може да се докаже (*покаже*) чрез правилата за диференциране, че

$$(12)\qquad grad^{\,/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = -grad\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} \qquad \Big|\times\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi},$$

или още

$$(13)\quad \frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi}.grad^{/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}=-\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi}.grad\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}.$$

Ако в (13) вземем под внимание (10), получаваме

$$\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi}.grad^{/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}=-div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}.$$

което, след заместване в (11) води до представянето

$$(14)\quad div^{/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}=\frac{div^{/}\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}-div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|},$$

или още

$$(15)\quad \boxed{div\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}=\frac{div^{/}\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}-div^{/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}}.$$

Сега можем да заместим (15) в (9)

$$(16)\quad u(\vec{r})=-div\int_{V_\infty}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}\equiv-\int_{V_\infty}\frac{div^{/}\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}+\underbrace{\int_{V_\infty}div^{/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}}_{I_1}.$$

Нека разгледаме отделно само интеграла I_1. Той, съгласно теоремата на Гаус, се представя чрез повърхнинен интеграл

$$(17)\quad I_1=\int_{V_\infty}div^{/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}=\oint_{S_\infty}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}d\vec{S}^{/},$$

но ако се отчете, че по условие $\lim\limits_{r\to\infty}\vec{U}(\vec{r})=0$ се вижда, че повърхнинният интеграл в (17) е тъждествено равен на нула, следователно $I_1=0$, с отчитането на което (16) добива вида

$$(18)\quad u(\vec{r})=-\int_{V_\infty}\frac{div^{/}\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/},$$

което изразява точно представянето (2), с което доказахме, че (6) и (2) са тъждествени представяния.

Същият прийом прилагаме и за $\vec{V}(\vec{r})$, доказвайки че представянията (7) и (3) са еквивалентни. Действително съгласно (7)

$$(19)\quad \vec{V}(\vec{r})=rot\left(\int_{V_\infty}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}\right)=\int_{V_\infty}rot\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}dv^{/}.$$

Нека пресметнем поотделно $rot\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}$ и $rot^{/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{/}\right|}$ и потърсим връзка между тях:

☞ $$rot\,\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}=\frac{1}{4\pi}rot\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\underbrace{rot\,\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{0}+grad\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\times\vec{U}(\vec{r}^{\,/})\right),\text{ т.е.}$$

(20) $$rot\,\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}=\frac{1}{4\pi}grad\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\times\vec{U}(\vec{r}^{\,/}).$$

Аналогично

☞ $$rot^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}=\frac{1}{4\pi}rot^{\,/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\underbrace{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{\neq 0}+grad^{\,/}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\times\vec{U}(\vec{r}^{\,/})\right).$$

Ако вземем под внимание (12), получаваме

(21) $$rot^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\underbrace{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}_{\neq 0}-grad\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\times\vec{U}(\vec{r}^{\,/})\right),$$

откъдето

(22) $$grad\,\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\times\vec{U}(\vec{r}^{\,/})=\frac{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}-rot^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}.$$

Замествайки (22) в (20) получаваме

(23) $$\boxed{rot\,\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}=\frac{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}-rot^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}}.$$

С така намереното в (23) представяне за ротацията заместваме в (19), с което получаваме

(24) $$\vec{V}(\vec{r})=\int\limits_{V_\infty}rot\,\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}dv^{/}=\int\limits_{V_\infty}\frac{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}dv^{/}-\underbrace{\int\limits_{V_\infty}rot^{\,/}\frac{\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}dv^{/}}_{I_2}.$$

Тук отново с теоремата на Гаус се обосновава, че $I_2=0$, с което достигаме до

(25) $$\vec{V}(\vec{r})=\int\limits_{V_\infty}\frac{rot^{\,/}\vec{U}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}dv^{/},$$

което е точно (3), а това и трябваше да докажем.

С това теоремата на Хелмхолц е доказана напълно.

Нека в качеството на допълнения (илюстрации) към доказаната вече теорема разгледаме следните нейни конкретизации, касаещи избора и вида на векторната функция $\vec{U}(\vec{r})$.

А) Нека $\vec{U}(\vec{r})\equiv\vec{E}(\vec{r})$ - вектор на електричното поле.

По силата на теоремата на Хелмхолц за електричния вектор трябва да е в сила представянето

(26) $\vec{E}(\vec{r}) = grad\, u(\vec{r}) + rot\, \vec{V}(\vec{r})$, където

(27ª) $u(\vec{r}) = -\int\limits_{V_\infty} \dfrac{div^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$, и

(27ᵇ) $\vec{V}(\vec{r}) = \int\limits_{V_\infty} \dfrac{rot^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$.

Но съгласно уравненията на Максуел

(28) $div^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/}) = \dfrac{\rho(\vec{r}^{\,/})}{\varepsilon_0}$,

следователно ($27^{а}$) добива вида

(29) $u(\vec{r}) = -\int\limits_{V_\infty} \dfrac{div^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/} = -\int\limits_{V_\infty} \dfrac{\rho(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/} \equiv -\varphi(\vec{r}^{\,/})$,

където $\varphi(\vec{r}^{\,/})$ е електричен скаларен потенциал.

По аналогичен начин прилагаме уравнението на Максуел

(30) $rot^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/}) = -\dfrac{\partial \vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{\partial t}$

спрямо ($27^{б}$) и получаваме

(31) $\vec{V}(\vec{r}) = \int\limits_{V_\infty} \dfrac{rot^{/}\, \vec{E}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/} = -\int\limits_{V_\infty} \dfrac{1}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\left(\dfrac{\partial \vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{\partial t}\right) dv^{/} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty} \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$.

По силата на ще ни бъде необходима ротацията от този вектор:

(32) $rot\, \vec{V}(\vec{r}) = -\dfrac{\partial}{\partial t} rot \int\limits_{V_\infty} \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty} rot\, \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$.

Ако се позовем на (23), то

(33) $rot\, \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} = \dfrac{rot^{\,/}\, \vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|} - rot^{\,/} \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}$.

Заествайки (33) в (32) получаваме

(34) $rot\, \vec{V}(\vec{r}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty} \dfrac{rot^{\,/}\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/} + \dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty} rot^{\,/} \dfrac{\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$.

Вторият обемен интеграл в (34) чрез теоремата на Гаус се свежда до повърхнинен интеграл по затворената сферична повърхност S_∞, върху която магнитният вектор $\vec{B}(r) \equiv 0$, следователно този интеграл е равен на нула. Така представянето (34) добива вида

(35) $rot\, \vec{V}(\vec{r}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_\infty} \dfrac{rot^{\,/}\vec{B}(\vec{r}^{\,/})}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right|}\, dv^{/}$.

Ако в (35) вземем под внимание уравнението на Максуел

(36) $\quad rot\,'\vec{B}(\vec{r}\,') = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}\,')$,

то (35) добива вида

(37) $\quad rot\,\vec{V}(\vec{r}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{V_\infty} \dfrac{rot\,'\vec{B}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv' = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{V_\infty} \dfrac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv' =$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv'}_{\vec{A}(\vec{r}\,')}\right) = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r}\,')}{\partial t}.$$

В горното уравнение с $\vec{A}(\vec{r}\,')$ е обозначен магнитният векторен потенциал.

Ако намереното в (29) представяне за $u(\vec{r})$ и намереното в (37) представяне за $rot\,\vec{V}(\vec{r})$ заместим в (26), получаваме

(38) $\quad \vec{E}(\vec{r}) = grad\,u(\vec{r}) + rot\,\vec{V}(\vec{r}) = grad\,\{-\varphi(\vec{r})\} - \dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r}\,')}{\partial t}$, т.е.

(39) $\quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\,grad\,\varphi(\vec{r}) - \dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r}\,')}{\partial t}}$.

Б) Нека $\vec{U}(\vec{r}) \equiv \vec{B}(\vec{r})$ - вектор на индукцията на магнитното поле.

По силата на теоремата на Хелмхолц и за магнитния вектор трябва да е в сила представянето

(40) $\quad \vec{B}(\vec{r}) = grad\,u(\vec{r}) + rot\,\vec{V}(\vec{r})$, където

(41^{а}) $\quad u(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{V_\infty}\dfrac{div'\,\vec{B}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv'$, и

(41^{б}) $\quad \vec{V}(\vec{r}) = \displaystyle\int_{V_\infty}\dfrac{rot'\,\vec{B}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv'$.

Но съгласно уравненията на Максуел

(42) $\quad div'\,\vec{B}(\vec{r}\,') = 0$,

следователно (41^{а}) добива вида

(43) $\quad u(\vec{r}) = 0$.

По аналогичен начин прилагаме уравнението на Максуел

(44) $\quad rot'\,\vec{B}(\vec{r}\,') = \mu_0\vec{j}(\vec{r}\,')$

спрямо (41^{б}) и получаваме

(45) $\quad \vec{V}(\vec{r}) = \displaystyle\int_{V_\infty}\dfrac{rot'\,\vec{B}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv' = \displaystyle\int_{V_\infty}\dfrac{\mu_0\vec{j}(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv' = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V_\infty}\dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dv' \equiv \vec{A}(\vec{r})$,

т.е. вектора $\vec{V}(\vec{r})$ съвпада (за този случай) с магнитния векторен потенциал.

Ако намереното в (43) представяне за $u(\vec{r})$ и намереното в (45) представяне за $\vec{V}(\vec{r})$ заместим в (26), получаваме

(46) $\quad \vec{B}(\vec{r}) = grad\, u(\vec{r}) + rot\,\vec{V}(\vec{r}) \equiv rot\ \vec{A}(\vec{r})$.

✸ **Задача (стр. 80/зад. 890)** Да се докаже следното твърдение:

T₁: Нека $u(\vec{r})$ е скаларно поле (*функция*), дефинирано и имащо непрекъснати втори частни производни по x, y, z във всяка точка на една област V и повърхността й S_V, и нека $\vec{r}_0$ е произволна дадена **вътрешна точка** на V. Да се докаже, че

$$(1) \qquad u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \oint_{S_V} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} - u(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} \right) \left| d\vec{S} \right| \ - \ \int_V \frac{\Delta u(\vec{r})}{r} dV \right\},$$

където $r = \left| \vec{r} - \vec{r}_0 \right|$.

Доказателство на T₁:

За доказателството на твърдение **T₁** ще използваме една теорема от векторния анализ, известна като **втора формула на Грин**, която гласи:

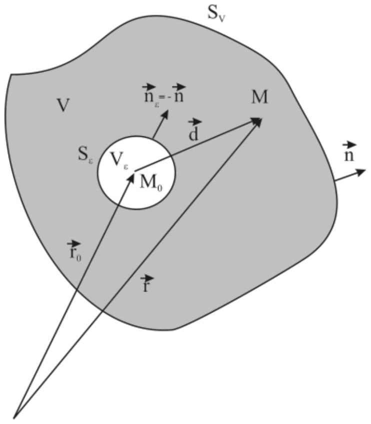
T: за скаларни функции $u(\vec{r})$ и $v(\vec{r})$, дефинирани и имащи непрекъснати втори частни производни по x, y, z във всяка точка на една област V и повърхността й S_V, е изпълнено равенството

$$(2) \qquad \int_V [u(\vec{r})\Delta v(\vec{r}) - v(\vec{r})\Delta u(\vec{r})] dV = \oint_{S_V} \left[u(\vec{r})\frac{\partial v(\vec{r})}{\partial n} - v(\vec{r})\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right] \left| d\vec{S} \right|.$$

В (2) със $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ и $\frac{\partial v(\vec{r})}{\partial n}$ са обозначени т.нар. **нормални производни**, т.е. производни в (*по*) посока на единичния вектор $\vec{n}$ към повърхността S_V в дадена нейна точка с радиус-вектор $\vec{r}$, като $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} = \vec{n}.grad\, u(\vec{r})$ и $\frac{\partial v(\vec{r})}{\partial n} = \vec{n}.grad\, v(\vec{r})$.

За да докажем **T₁**, ще приложим втората формула на Грин за функция $v(\vec{r})$, имаща представянето

$$(3) \qquad v(\vec{r}) = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_0 \right|}.$$



Очевидно $v(\vec{r})$ е дефинирана за всички точки на областта V, <u>с изключение на точката</u> $\vec{r}_0$. Но тогава можем да разгледаме сферична повърхност S_ε с център тази точка, и такъв радиус $\varepsilon \neq 0$, че S_ε да принадлежи **изцяло** на областта V. Следователно в областта V', заключена между затворените повърхнини S_V и S_ε (*виж чертежа*), както и върху самите повърхнини, полето (*функцията*) $v(\vec{r})$ ще бъде (*вече*) еднозначно дефинирана и непрекъснато диференцируема.

При тези обстоятелства за областта V' и за затворената й граница (S_V + S_ε) можем да приложим **<u>втората формула на Грин</u>**, която следва да изглежда така:

$$(4) \quad \int_{V'} [u\Delta\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta u] dV = \oint_{S_V + S_\varepsilon} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left| d\vec{S} \right| \equiv \oint_{S_V} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left| d\vec{S} \right| + \oint_{S_\varepsilon} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left| d\vec{S} \right|.$$

Лесно може да се установи, че прилагането на Лапласов оператор към функцията $v(\vec{r})=\frac{1}{r}\equiv\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ има за резултат следното представяне чрез делта-функцията на Дирак $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$:

(5) $$\Delta v(\vec{r})\equiv\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=-4\pi.\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}-4\pi, & \vec{r}=\vec{r}_0\\ 0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0\end{cases}.$$

Това лесно може да бъде доказано, ако се изходи от уравнението на Поасон за точков заряд q

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

където, както е известно от електродинамиката, обемната плътност на точков заряд се дава с $\rho=q.\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$. Следователно трябва да е в сила равенството

$$\Delta\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}=-\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}_0)}{\varepsilon_0}\equiv-\frac{q.\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}{\varepsilon_0},$$

откъдето след съкращения получаваме точно

$$\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0).$$

Понеже разглежданията, които правим, се отнасят за областта V', **несъдържаща точка** $\vec{r}_0$, то по силата на (5) следва да приемем, че

(6) $$\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\equiv\Delta\frac{1}{r}=0$$

за всяка точка от областта V'. /*Твърдението* (6) *бе доказано и в предна задача*/.

С отчитането на (6) уравнение (4) може да бъде записано във вида

(7) $$-\int_{V'}\frac{1}{r}\Delta u\,dV=\oint_{S_V}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]|d\vec{S}|+\oint_{S_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]|d\vec{S}|.$$

Понеже външната нормала $\vec{n}$ към сферата S_ε, **разглеждана като съставна част от повърхнината** S_V+S_ε, заграждаща обема V, е противоположна по посока (*виж чертежа*) на вектора $\vec{r}-\vec{r}_0$, то можем да запишем, че върху сферата S_ε

(8) $$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r},$$

с отчитането на което интегралът по S_ε в (7) ще добие вида

(9) $$\oint_{S_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]|d\vec{S}|=\oint_{S_\varepsilon}\left[-u\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]|d\vec{S}|=$$
$$=\oint_{S_\varepsilon}\left[-u\left(-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]|d\vec{S}|=\oint_{S_\varepsilon}\left[\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]|d\vec{S}|.$$

С отчитането на (9) представянето (7) добива вида

(10) $$-\int_{V'}\frac{1}{r}\Delta u\,dV=\oint_{S_V}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]|d\vec{S}|+\oint_{S_\varepsilon}\left[\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]|d\vec{S}|,$$ или още

$$(11)\qquad -\int\limits_{V'} \frac{1}{r}\Delta u\, dV = \oint\limits_{S_V}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\left|d\vec{S}\right| + \oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{u}{r^2}\left|d\vec{S}\right| + \oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left|d\vec{S}\right|,$$

Нека видим какво е поведението на членовете (*интегралите*) в (11) при граничен преход $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon \neq 0$). Непосредствено се убеждаваме, че при този граничен преход:

$$(12)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int\limits_{V'}\frac{1}{r}\Delta u\, dV\right) = -\int\limits_{V}\frac{1}{r}\Delta u\, dV,$$

$$(13)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{S_\varepsilon}\left[\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]\left|d\vec{S}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{u}{r^2}\left|d\vec{S}\right| + \lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left|d\vec{S}\right|.$$

А ако вземем под внимание, че $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(\vec{r}) = u(\vec{r}_0)$, както и че $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|d\vec{S}\right| = \underset{\varepsilon\to 0}{4\pi\varepsilon^2} \to 0$, то при $r \to \varepsilon$

$$(14)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{u(\vec{r})}{r^2}\left|d\vec{S}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{u(\vec{r}_0)}{\varepsilon^2}.(4\pi\varepsilon^2)\right) = 4\pi u(\vec{r}_0), \text{ и}$$

$$(15)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left|d\vec{S}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\right)\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_0}\right].(4\pi\varepsilon^2)\right\} = 4\pi\left[\left(\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\right)\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_0}\right].\varepsilon \to 0,$$

където е отчетено, че функцията $u(\vec{r})$, по условие, е дефинирана и има непрекъснати частни производни по x, y, z във всяка точка на областта V, към която очевидно спада и т. $\vec{r} = \vec{r}_0$, както и че очевидно $\left(\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\right)\Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \neq \infty$.

С отчитането на (12), (14) и (15) формула (11), след извършен граничен преход в (*над*) нея, добива вида

$$(16)\qquad -\int\limits_{V}\frac{1}{r}\Delta u\, dV = \oint\limits_{S_V}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\left|d\vec{S}\right| + 4\pi u(\vec{r}_0),$$

откъдето следва, че стойността на скаларната функция $u(\vec{r})$ в точка $\vec{r}_0$ от областта V **или** границата й S_V, ще се дава с представянето:

$$(17)\qquad u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{-\oint\limits_{S_V}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\left|d\vec{S}\right| - \int\limits_{V}\frac{1}{r}\Delta u\, dV\right\}, \text{ или още}$$

$$(18)\qquad \boxed{u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\left\{\oint\limits_{S_V}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right]\left|d\vec{S}\right| - \int\limits_{V}\frac{1}{r}\Delta u\, dV\right\}},$$

с което твърдение $\mathbf{T_1}$, т.е. (1), е доказано.

🕮

Тема: Собствени стойности и собствени вектори на тензор

🕮 Теоретичен минимум

✓ **Определение:** Когато един тензор Φ, един вектор $\vec{A}$ и един скалар a са свързани помежду си чрез зависимостта

$\boxed{\Phi_{ij}A_j = a\,A_i}$, или още $\boxed{\Phi.A = a\,A}$,

то векторът $\vec{A}$ се нарича **собствен вектор,** а скаларът a - **собствена стойност** на **тензора** Φ. Самата задача за тяхното намиране се нарича задача за **собствените стойности** и **собствените вектори** на **тензор**.

Ако тензорът Φ е зададен, а векторът $\vec{A}$ и скаларът a са неизвестни, то задачата за тяхното намиране се свежда до решаването на следната линейна (*приводима към хомогенна*) система от уравнения

$$\left|\begin{aligned} &\Phi_{11}A_1 + \Phi_{12}A_2 + \Phi_{13}A_3 = a.A_1 \\ &\Phi_{21}A_1 + \Phi_{22}A_2 + \Phi_{23}A_3 = a.A_2 \\ &\Phi_{31}A_1 + \Phi_{32}A_2 + \Phi_{33}A_3 = a.A_3 \end{aligned}\right. , \text{ или още } \left|\begin{aligned} &(\Phi_{11}-a)A_1 + \Phi_{12}A_2 + \Phi_{13}A_3 = 0 \\ &\Phi_{21}A_1 + (\Phi_{22}-a)A_2 + \Phi_{23}A_3 = 0 \\ &\Phi_{31}A_1 + \Phi_{32}A_2 + (\Phi_{33}-a)A_3 = 0 \end{aligned}\right. .$$

За да има тази хомогенна система нетривиално решение, е необходимо и достатъчно нейната детерминанта да бъде равна на нула, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_{11}-a & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22}-a & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33}-a \end{vmatrix} = 0 .$$

Полученото по този начин алгебрично уравнение, наречено **характеристично** или **секулярно**, е едно кубично уравнение за определянето на a, и следователно то има **три корена**. Очевидно собствените стойности на тензор Φ от трети ранг са 3, като на всяка от тях съответства по един собствен вектор $\vec{A}$, определен като решение на линейната хомогенна система след заместване в нея на a с всяка една от намерените вече три възможни (*собствени*) стойности.

✸ **Задача:** (Стр. 63/Зад. 643[б]) Да се намерят **собствените стойности** и **собствените вектори** на тензора

$$(1) \qquad \Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Решение: уравнението за собствените стойности на тензора има вида

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Нека развием детерминантата, чрез която се представя горното кубично уравнение, по елементите на първия й стълб

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1] - 1[(1-\lambda)-(-1)] = 0 \text{, т.е.}$$

$$-\lambda[2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-1]-[1-\lambda+1]=0 \qquad \Big|\times(-1)$$

$$\lambda(\lambda^2-3\lambda+1)+2-\lambda=0 ,$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+2-\lambda=0 ,$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+2=0 .$$

Ако полиномът $P(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+2$ разделим с полинома $Q(\lambda)=\lambda-1$ по правилото (*схемата*) на Хорнер, ще получим, че

(4) $\quad \dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}=\lambda^2-2\lambda-2, \qquad$ т.е.

(5) $\quad \lambda^3-3\lambda^2+2=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-2)$.

Така кубичното уравнение (3) добива вида

(6) $\quad (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-2)=0$.

Един корен на това уравнение е

(7) $\quad \lambda_1=1$.

Другите два корена са решения на квадратното уравнение $\lambda^2-2\lambda-2=0$, за което $D=(-2)^2-4(-2)=12=(2\sqrt{3})^2$, така че

(8) $\quad \lambda_{2,3}=\dfrac{2\pm(2\sqrt{3})}{2}=1\pm\sqrt{3}$.

И така трите собствени стойности на тензора Φ са

(9) $\quad \lambda_1=1, \qquad \lambda_2=1+\sqrt{3}, \qquad \lambda_3=1-\sqrt{3}$.

Нека определим трите собствени вектора, съответстващи на трите собствени стойности (9).

На собствената стойност $\lambda_1=1$ ще съответства собствен вектор $\vec{A}(A_1,A_2,A_3)$, чиито три компоненти се явяват решения на системата уравнения

(10) $$\left|\begin{array}{l}(\Phi_{11}-\lambda_1)A_1+\Phi_{12}A_2+\Phi_{13}A_3=0\\ \Phi_{21}A_1+(\Phi_{22}-\lambda_1)A_2+\Phi_{23}A_3=0,\\ \Phi_{31}A_1+\Phi_{32}A_2+(\Phi_{33}-\lambda_1)A_3=0\end{array}\right.$$

или в конкретния случай

(11) $$\left|\begin{array}{l}(0-1)A_1+1.A_2-1.A_3=0\\ 1.A_1+(2-1)A_2+1.A_3=0,\\ 0.A_1+1.A_2+(1-1)A_3=0\end{array}\right. \qquad \text{т.е.} \qquad \left|\begin{array}{l}-A_1+A_2-A_3=0\\ A_1+A_2+A_3=0.\\ \phantom{-A_1+{}}A_2\phantom{{}+A_3}=0\end{array}\right.$$

Щом $A_2=0$, то от първите две уравнения на системата получаваме

(12) $$\left|\begin{array}{l}-A_1-A_3=0\\ A_1+A_3=0\end{array}\right..$$

Но това са две идентични уравнения, т.е. системата е неопределена и допуска безброй много решения от вида

(13) $\quad A_3=\xi \qquad$ и $\qquad A_1=-\xi$,

където $\xi\neq 0$ е произволен скалар. Така за собствения вектор на тензора Φ, съответстващ на собствената стойност $\lambda\equiv\lambda_1=1$ получаваме

(14) $\quad \vec{A}(A_1,A_2,A_3)=\vec{A}(-\xi,0,\xi)$.

По аналогичен начин се определят и другите два собствени вектора, съответстващи на собствените стойности $\lambda_2=1+\sqrt{3}$ и $\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

II. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

📖

Тема: Диференциални уравнения с разделени променливи. Хомогенни ОДУ от първи ред. Уравнения, приводими към хомогенни

🕮 Теоретичен минимум

(1.1) $\dfrac{dx}{dt} = X(x).T(t)$.

Функцията

(1.2) $\Phi(t,x) = \int \dfrac{dx}{X(x)} - \int T(t)\,dt$.

представлява **пръв интеграл** на уравнението (1.1), а **общото решение** на това уравнение се дава с равенството

(1.3) $\Phi(t,x) = C$.

Винаги следва да се проверява дали не се пропуска решение на ОДУ при $X(t) = 0$!

2.) Хомогенни ОДУ от първи ред

(2.1) $\dfrac{dx}{dt} = F\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

С полагане: $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ се получава УРП $\dfrac{du}{F[u]-u} = \dfrac{1}{t}dt$, което се интегрира

(2.2) $\int \dfrac{du}{F[u]-u} = \ln|C.t|$.

Следва да се провери за изгубени решения на ДУ, явяващи се решения на алгебричното уравнение $F[u]-u=0$.

3.) Уравнения, приводими към хомогенно

(3.1) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{ax+bt+c}{a_1x+b_1t+c_1}\right)$.

Ако $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ се полага $\left| \begin{aligned} x &= \xi + \alpha \\ t &= \eta + \beta \end{aligned} \right.$, в резултат от което се получава ДУ $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\xi + b\eta + (a.\alpha + b.\beta + c)}{a_1\xi + b_1\eta + (a_1.\alpha + b_1.\beta + c_1)}\right)$. Константите α и β в него се избират така, че свободните членове в числителя и знаменателя да се анулират, т.е. α и β се определят като решения на системата $\left| \begin{aligned} a.\alpha + b.\beta + c &= 0 \\ a_1.\alpha + b_1.\beta + c_1 &= 0 \end{aligned} \right.$. При такъв избор на константите α и β уравнението се превръща в уравнение $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right)$, което след почленно деление с η се трансформира в хомогенно ОДУ

(3.2) $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right) + b}{a_1\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right) + b_1}\right)$.

Друг вариант на полагане за такива ДУ се основава на факта, че щом детерминантата $\Delta = 0$, то с точност до константа $ax + bt$ и $a_1 x + b_1 t$ съвпадат, т.е. $ax + bt = \lambda\,(a_1 x + b_1 t)$, поради което е логично да положим напр.

(3.3) $a_1 x + b_1 t = u(t)$, и следователно (3.4) $ax + bt = \lambda . u(t)$.

✷ **Задача:** да се реши уравнението $x'^{\,3} + 2x'^{\,2} - x' - 2 = 0$.

Решение: нека положим (*най-вече за удобство*) $x' = u$. Така достигаме до следното кубично алгебрично уравнение

(1) $u^3 + 2u^2 - u - 2 = 0$

За да го решим, нека разложим полинома в лявата страна на (1) на прости множители. Чрез схема на Хорнер установяваме, че

(2) $u^3 + 2u^2 - u - 2 \;:\; u - 1 \;=\; u^2 + 3u + 2$.

Така уравнението (1) добива вида

(3) $(u-1)(u^2 + 3u + 2) = 0$

Квадратният тричлен $u^2 + 3u + 2$ на свой ред се разлага на прости множители

(4) $u^2 + 3u + 2 = (u+1)(u+2)$,

с което (3) добива вида

(5) $(u-1)(u+1)(u+2) = 0$.

От решаването на (5) получаваме следните 3 ОДУ

(6[а]) $x' = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t + C$;

(6[б]) $x' = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -t + C$;

(6[в]) $x' = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -2t + C$.

✷ **Задача** (Стр. 7/ Зад. 33) Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $t.x' - t - x - t.tg^2\left(\dfrac{x}{t}\right) = 0$.

Решение: нека разделим двете страни на горното уравнение с t (при $t \neq 0$), след което го представим в нормален вид (*т.е. решено относно производната*)

(2) $x' = 1 + \dfrac{x}{t} + tg^2\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

Представено в този вид, то е очевидно хомогенно ОДУ, за което правим полагането

(3) $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$, т.е. $x = u.t$, тогава

(4) $x' = u'.t + u$.

Заместваме (3) и (4) в (2)

(5) $u'.t + u = 1 + u + tg^2 u$, или още

(6) $u'.t = 1 + tg^2 u = 1 + \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

Така достигаме до следното УРП

(7) $\cos^2 u\, du = \dfrac{dt}{t} \qquad \Big| \int$

(8) $\int \cos^2 u\, du = \int \dfrac{dt}{t} + \ln C$;

$\int \dfrac{1+\cos 2u}{2}\, du = \ln t + \ln C$;

$\dfrac{1}{2}\int du + \dfrac{1}{2}\int \cos 2u\, du = \ln(Ct)$;

$\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\int \cos 2u\, d(2u) = \ln(Ct)$;

$\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2u = \ln(Ct) \qquad \leftarrow\ u = \dfrac{x}{t}$;

$\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2x}{t} = \ln(C.t)$.

✸ **Задача** (Стр. 8/ Зад. 69) Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $(4x - 2t - 1)\, x' + t - 2x - 4 = 0$.

Решение: нека представим уравнението в нормален вид (*решено относно* x')

(2) $x' = \dfrac{2x - t + 4}{4x - 2t - 1}$ при $4x - 2t - 1 \neq 0$.

Понеже детерминантата

(3) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

то даденото уравнение е приводимо към хомогенно чрез полагане (напр.)

(4) $2x - t = u(t)$,

при което $x = \dfrac{1}{2}(u + t)$, и

(5) $x' = \dfrac{1}{2}(u' + 1)$.

След заместване на (4) и (5) в (2) получаваме

(6) $\dfrac{1}{2}(u' + 1) = \dfrac{u+4}{2u-1}$, т.е.

$u' = \dfrac{2u+8}{2u-1} - 1 = \dfrac{(2u+8)-(2u-1)}{2u-1} = \dfrac{9}{2u-1}$;

$\dfrac{2u-1}{9}\, du = dt$ т.е. УРП

$\int \dfrac{2u-1}{9}\, du = \int dt + C$;

$\dfrac{2}{9}\dfrac{u^2}{2} - \dfrac{1}{9}u = t + C'$;

$\dfrac{1}{9}(u^2 - u) = t + C'$;

(7) $u(u-1)=9t+C$.

Ако заместим $u=2x-t$ от (4) в (7)1 получаваме решението

(8) $(2x-t)(2x-t-1)=9t+C$.

✸ **Задача** Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $x\,x^{//}+x^{/\,2}+1=0$.

Решение: лявата страна на горното уравнение може да се представи като производна по t от функцията ($x\,x^{/}+t$). Действително

(2) $\dfrac{d}{dt}[x\,x^{/}+t]=x^{/}\,x^{/}+x\,x^{//}+1\equiv x^{/\,2}+x\,x^{//}+1$.

С отчитането на този факт уравнение (1) добива вида

(3) $d(x\,x^{/}+t)=0$,

решението на което е

(4) $x\,x^{/}+t=C_1$.

Представяме (4) в нормален вид

(5) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{C_1-t}{x}$, или още (6) $x\,dx=(C_1-t)\,dt$.

Интегрираме това УРП и получаваме общото решение на (1)

(7) $\int x\,dx=\int(C_1-t)\,dt+C_2$, т.е.

(8) $\dfrac{x^2}{2}=C_1 t-\dfrac{t^2}{2}+C_2$.

Тема: Линейни ОДУ от първи ред. Уравнение на Бернули

Теоретичен минимум

4. Линейно ОДУ от първи ред

(4.1) $\dfrac{dx}{dt}=A(t).x+B(t)$

Общо решение:

(4.2) $x(t,C)=e^{\int A(t)\,dt}\left\{\int B(t).e^{-\int A(t)\,dt}dt+C\right\}$.

5. Уравнение на Бернули

(5.1) $\dfrac{dx}{dt}=A(t).x+B(t).x^n$, за $n\neq 0,1$.

С полагане $y=x^{1-n}$ то се свежда до линейно ДУ

(5.2) $\dfrac{dy}{dt}=A^*(t).y+B^*(t)$

с коефициенти $A^*(t)=A(t)(1-n)$ и $B^*(t)=B(t)(1-n)$. Неговото общо решение се дава с

(5.3) $y(t,C)=e^{\int A^*(t)\,dt}\left\{\int B^*(t).e^{-\int A^*(t)\,dt}dt+C\right\}$, а общото решение $x(t)$ на уравнението на Бернули се изразява от полагането:

(5.4) $x(t,C) = y(t,C)^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

✸ **Задача** (Стр. 9 / Зад. 81) Да се интегрира уравнението

(1) $tx' - x = t^2 e^t \sqrt{1-e^t}$.

Решение: ако представим уравнението в нормален вид

(2) $x' = \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{A(t)} x + (\underbrace{t e^t \sqrt{1-e^t}}_{B(t)})$

се вижда непосредствено, че то е линейно ОДУ, и неговото решение се дава с

(3) $x(t,C) = e^{\int A(t)dt}\left(\int B(t) e^{-\int A(t)dt} dt + C\right) =$

$$= e^{\int \frac{dt}{t}}\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, e^{-\int \frac{dt}{t}} dt + C\right) = e^{\ln t}\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, e^{-\ln t} dt + C\right) =$$

$$= t\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, t^{-1} dt + C\right) = t\left(\int e^t \sqrt{1-e^t}\, dt + C\right) =$$

$$= t\left(-\int \sqrt{1-e^t}\, d(-e^t) + C\right) = t\left(-\int (1-e^t)^{\frac{1}{2}} d(1-e^t) + C\right) =$$

$$= t\left(-\frac{2}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} + C\right) = -\frac{2t}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} + C.t .$$

✸ **Задача** (Стр. 11/ Зад. 107) Интегрирайте уравнението: $t^2 x' - tx = x^2$.

Решение: при $t \neq 0$ уравнението е представимо във вида

(1) $x' = \left(\frac{1}{t}\right) x + \left(\frac{1}{t^2}\right) x^2$.

В този си вид даденото уравнение е бернулиево с $n = 2$, затова полагаме

(2) $y = x^{1-n} = \frac{1}{x}$.

С направеното полагане то се свежда до линейното ДУ

(3) $\frac{dy}{dt} = A^*(t).y + B^*(t)$

с коефициенти $A^*(t) = A(t)(1-n) = -\frac{1}{t}$ и $B^*(t) = B(t)(1-n) = -\frac{1}{t^2}$, или

(4) $\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{1}{t}\right) y + \left(-\frac{1}{t^2}\right)$.

Общото решение на това линейно ОДУ се дава с

(5) $\quad y(t,C)=e^{\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt}\left(\int\left(-\frac{1}{t^2}\right).e^{-\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt}dt+C\right)=$

$$=e^{-\int\frac{dt}{t}}\left(-\int t^{-2}.e^{\int\frac{dt}{t}}dt+C\right)=e^{-\ln t}\left(-\int t^{-2}.e^{\ln t}dt+C\right)=$$

$$=t^{-1}\left(-\int t^{-2}.t\,dt+C\right)=-t^{-1}\left(\int t^{-1}dt+C\right)=-t^{-1}(\ln t+C)=-\frac{(\ln t-C^*)}{t}.$$

Общото решение $x(t)$ на уравнението на Бернули се изразява от полагането:

(6) $\quad x(t,C)=y(t,C)^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}=\frac{1}{y(t,C)}=-\frac{t}{\ln t-C^*}=\frac{t}{C^*-\ln t}.$

Както се вижда от полагането (2) направените дотук разглеждания са валидни за $x\neq 0$. С непосредствена проверка в самото уравнение се установява, че $x=0$ е също решение на даденото ОДУ.

✸ **Задача** (Стр. 11/ Зад. 112) Интегрирайте уравнението:

(1) $\quad x^{/}.\cos t=\sin t.x+x^4$.

Решение: при $t\neq 0$ уравнението е представимо във вида

(2) $\quad x^{/}=\underbrace{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)}_{A(t)}x+\underbrace{\left(\frac{1}{\cos t}\right)}_{B(t)}x^4.$

Очевидно това е бернулиево ОДУ с $n=4$, затова полагаме

(3) $\quad y=x^{1-n}=x^{-3}$.

С направеното полагане (2) се свежда до линейното ДУ

(4) $\quad \frac{dy}{dt}=A^*(t).y+B^*(t)$

с коефициенти $A^*(t)=A(t)(1-n)=-3\frac{\sin t}{\cos t}$ и $B^*(t)=B(t)(1-n)=-3\frac{1}{\cos t}$, или

(4) $\quad \frac{dy}{dt}=\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)y+\left(-\frac{3}{\cos t}\right).$

Общото решение на това линейно ОДУ се дава с

(5) $\quad y(t,C)=e^{\int\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)dt}\left(\int\left(-\frac{3}{\cos t}\right).e^{-\int\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)dt}dt+C\right)=$

$$=e^{\int\frac{3d(\cos t)}{\cos t}}\left(-3\int\frac{1}{\cos t}.e^{-\int\frac{3d(\cos t)}{\cos t}}dt+C\right)=e^{3\ln\cos t}\left(-3\int\frac{e^{-3\ln\cos t}}{\cos t}.dt+C\right)=$$

$$=e^{\ln\cos^3 t}\left(-3\int\frac{e^{-\ln\cos^3 t}}{\cos t}.dt+C\right)=\cos^3 t\left(-3\int\frac{1}{\cos t\cos^3 t}.dt+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\left(-3\int\frac{dt}{\cos^4 t}+C\right)=\cos^3 t\left(-3\int\underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}}_{tg^2 t+1}\left(\underbrace{\frac{dt}{\cos^2 t}}_{d\,tg\,t}\right)+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\left(-3\int(tg^2 t+1)\,d\,(tg\,t)+C\right)=\cos^3 t\left(-3(\frac{1}{3}tg^3 t+tg\,t)+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\,(-tg^3 t-3tg\,t+C)=C\cos^3 t-tg^3 t.\cos^3 t-3tg\,t.\cos^3 t=$$

$$=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t.\cos^2 t=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t.(1-\sin^2 t)=$$

$$=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t+3\sin^3 t=C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t.$$

И така общото решение на (4) се дава с

(6) $\quad y(t,C)=C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t$.

А общото решение на (1) с отчитане на полагането $y=x^{-3}$, т.е. $x=y^{-1/3}$, се дава с

(7) $\quad x(t,C)=\{C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t\}^{-\frac{1}{3}}$.

С непосредствена проверка в самото уравнение се установява, че $x=0$ е също решение на даденото ОДУ.

Тема: ДУ, които се решават след предварително диференциране. Уравнения на Лагранж и Клеро

Теоретичен минимум

6.А. Уравнение на Лагранж:

(6.1) $\quad x=A\left(x'\right).t+B\left(x'\right)$.

С полагане $\boxed{p=x'}$ и диференциране на самото уравнение то добива вида $\frac{dt}{dp}=\frac{A'(p)}{p-A(p)}.t+\frac{B'(p)}{p-A(p)}$. Разглеждано като ОД уравнение от първи ред относно „функцията” $t=t(p)$ то е линейно уравнение, имащо решение

$$t(p,C)=e^{\int A_0(p)\,dp}\left\{\int B_0(p).e^{-\int A_0(p)\,dp}dp+C\right\}.$$

С така намерената функция $t=t(p,C)$ се замества в изходното уравнение и се получава $x=A(p).t(p,C)+B(p)\equiv x(p,C)$. По този начин представянето

(6.2) $\quad \left|\begin{array}{l} t=t(p,C) \\ x=x(p,C) \end{array}\right.$

задава **параметрично решението на уравнението на Лагранж.** „Изгубени” решения биха могли да се получат, ако $\boxed{p-A(p)=0}$. Последните са **особени решения**.

6.Б. Уравнение на Клеро

(6.3) $\quad x=(x').t+B\left(x'\right)$.

Уравнението на Клеро се явява **частен случай на уравнението на Лагранж**, за което $A(x^{/}) \equiv x^{/}$, т.е. $A(p) - p = 0$. С полагане $\boxed{p = x^{/}}$ и диференцирате на самото уравнение то добива вида $\dfrac{dp}{dt}.\left[t + B^{/}(p)\right] = 0$, което се „разпада” на следните две уравнения:

(А) $\dfrac{dp}{dt} = 0$ и (Б) $t + B^{/}(p) = 0$.

Решението на първото от тях е $x(t,C) = C.t + B(C)$, което представлява **общо решение (общ интеграл)** на уравнението на Клеро. От другото уравнение (Б) се получава (*в параметричен вид*) **особеното решение**

$$(6.4)\qquad \left| \begin{array}{l} t = -B^{/}(p) \\ x = -p.B^{/}(p) + B(p) \end{array} \right. .$$

✸ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 202) Да се интегрира уравнението: $2tx^{/} - x = \ln x^{/}$.

Решение: ако запишем даденото уравнение във вида

$$(1)\qquad x = (\underbrace{2x^{/}}_{A(x^{/})})t + (\underbrace{-\ln x^{/}}_{B(x^{/})})$$

се вижда непосредствено, че то е ДУ на Лагранж. За да го решим, полагаме $x^{/}(t) = p(t)$, след което диференцираме (1)

$$x^{/} = 2x^{/} + 2t\,(x^{/})^{/} + \frac{-1}{x^{/}}(x^{/})^{/},\quad \text{или още}\quad x^{/} = \left(\frac{1}{x^{/}} - 2t\right)(x^{/})^{/},$$ което с

отчитане на направеното полагане може да бъде записано във вида

$$(2)\qquad p = \left(\frac{1}{p} - 2t\right)p^{/},\quad \text{или още}\qquad (3)\qquad p^2 = (1 - 2pt)\frac{dp}{dt}.$$

Разглеждано като ДУ относно „функция” $t = t(p)$ с аргумент p то може да бъде записано във вида

$$(4)\qquad \frac{dt}{dp} = \frac{1 - 2pt}{p^2} = \left(-\frac{2}{p}\right)t + \frac{1}{p^2},$$

а представено в този си вид уравнение (4) е линейно ОДУ от първи ред, чието общо решение се дава с

$$t(p,C) = e^{\int\left(-\frac{2}{p}\right)dp}\left(\int\left(\frac{1}{p^2}\right).e^{-\int\left(-\frac{2}{p}\right)dp}dt + C\right) =$$

$$= e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{2\int\frac{dp}{p}}dt + C\right) = e^{-2\ln p}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{2\ln p}dt + C\right) =$$

$$= e^{\ln p^{-2}}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{\ln p^2}dt + C\right) = \frac{1}{p^2}\left(\int\frac{1}{p^2}.p^2dt + C\right) = \frac{1}{p^2}(p + C).$$

И така получихме

(5) $\quad t(p,C)=\dfrac{1}{p^2}(p+C)$.

Ако с така намерената функция $t=t(p)$ заместим в изходното ДУ (1), отчитайки полагането $x^{/}(t)=p(t)$, получаваме

(6) $\quad x(p,C)=2p\dfrac{1}{p^2}(p+C)-\ln p=2+\dfrac{2}{p}C-\ln p$.

Уравненията (5) и (6) изразяват в параметричен вид интегралната крива на ДУ (1).

✸ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 206) Да се интегрира уравнението: $xx^{/}-t.x^{/\,2}=1$.

Решение: нека решим даденото ДУ относно неизвестната функция x. За целта делим двете му страни с $x^{/}\neq 0$.

(1) $\quad x=x^{/}t+\dfrac{1}{x^{/}}\equiv A(x^{/})t+B(x^{/})$.

Очевидно това е уравнение на Клеро, затова полагаме $x^{/}(t)=p(t)$ и диференцираме двете страни на (1)

(2) $\quad x^{/}=x^{/}+t.(x^{/})^{/}-\dfrac{1}{x^{/\,2}}(x^{/})^{/}$,

откъдето следва уравнението

(3) $\quad \underbrace{\left(t-\dfrac{1}{p^2}\right)}_{0}\underbrace{\dfrac{dp}{dt}}_{0}=0$.

Общото решение на ДУ (1) се дава с решението на

(4) $\quad \dfrac{dp}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad p=C, \quad$ но $p=\dfrac{dx}{dt}$, $\quad$ следователно

(5) $\quad \dfrac{dx}{dt}=C \quad\Rightarrow\quad x(t,C)=C.t+const\,(C)$.

Интеграционната $const\,(C)$ може да бъде определена от (1), ако в него заместим (формално) $C\to x^{/}$. Така получаваме представянето $x=C.t+\dfrac{1}{C}$, сравняването на което с (5) води до заключението, че $const\,(C)=\dfrac{1}{C}$. С отчитането на този факт общото решение (5) ще добие вида

(6) $\quad x(t,C)=C.t+\dfrac{1}{C}$ $\quad$ /*уравнение на сноп прави с променлив ъглов коефициент*/

Както следва от (3), особеното решение на (1) се задава със съотношението

(7) $\quad t-\dfrac{1}{p^2}=0$, т.е. $\quad t=\dfrac{1}{p^2}$.

Заместваме така намереното представяне (7) за t в уравнение (1) и получаваме, отчитайки полагането $x^{/}=p$

(8) $$x = p.\left(\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}.$$

Така параметричното уравнение на особеното решение се дава с

(9) $$\left| \begin{aligned} t &= \frac{1}{p^2} \\ x &= \frac{2}{p} \end{aligned} \right. .$$

Елиминирането на параметъра не винаги е възможно, но в дадения случай се извършва елементарно: изразяваме $p = \frac{1}{\sqrt{t}}$ и заместваме в $x = \frac{2}{p}$:

(10) $$x = \frac{2}{p} = 2\sqrt{t}$$ - особеното решение на даденото ДУ.

✸ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 209) Да се интегрира уравнението

(1) $$2x - x'^{\,2} = t^2 + t.x'.$$

Решение: даденото уравнение не спада към нито един от двата класически вида (*уравнение на Лагранж и уравнение на Клеро*), но въпреки това може да бъде интегрирано чрез техниката на предварително диференциране. За целта най-напред полагаме

(2) $$x'(t) = p(t),$$

с което даденото уравнение, решено относно неизвестната функция x добива вида

(1') $$x = \frac{1}{2}[p^2 + t.(t+p)],$$

след което го диференцираме по t:

$$2x' - 2x'(x')' = 2t + x' + t.(x')',$$ или още

$$p - 2p.p' = 2t + t.p',$$

$$p - 2t = (2p + t)\frac{dp}{dt},$$ откъдето при $p - 2t \neq 0$

(3) $$\frac{dt}{dp} = \frac{2p + t}{p - 2t} \equiv \frac{2 + \frac{t}{p}}{1 - 2\frac{t}{p}}.$$

Полагаме

(4) $$u(t) = \frac{t}{p(t)},$$ т.е. $t = p.u$ и

(5) $$\frac{dt}{dp} = \frac{d}{dp}(p.u) = u + p\frac{du}{dp}$$

След отчитането на (4) и (5) в (3) достигаме до следното ДУ

(6) $$u + p\frac{du}{dp} = \frac{2+u}{1-2u},$$ откъдето следва

$$p\frac{du}{dp}=\frac{2+u}{1-2u}-u\equiv\frac{2+u}{1-2u}-u\frac{1-2u}{1-2u}=\frac{(2+u)-u(1-2u)}{1-2u}=\frac{2+u-u+2u^2}{1-2u}=\frac{2(1+u^2)}{1-2u},$$

(7) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1-2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dp}{p}.$$

Интегрираме това ДУ с РП

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u.du}{1+u^2}=\ln p+\ln C;$$

$$\frac{1}{2}arctg\ u-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=\ln(C.p);$$

$$\frac{1}{2}arctg\ u-\frac{1}{2}\ln\ (1+u^2)=\ln(C.p) \qquad \Big|\times 2$$

$$arctg\ u=\ln\ (1+u^2)+2\ln(C.p);$$

$$arctg\ u=\ln\ [(1+u^2)(C.p)^2]$$

Ако отчетем полагането $u=\dfrac{t}{p}$, получаваме

$$arctg\ \frac{t}{p}=\ln\left[\left(1+\frac{t^2}{p^2}\right)C^2p^2\right],\text{или още}$$

(8) $$arctg\ \frac{t}{p}=\ln\left[C^2(t^2+p^2)\right].$$

Обобщение на решението:

а) уравнение ($1^/$) дава $x=x(t,p)$

б) уравнение (8) дава $t=t(p,C)$,

с което е намерено параметрично представяне на общото решение.

„Изпуснати” решения биха могли да дойдат от делението с $p-2t$. Ако $p-2t=0$, то $x^/=2t$, т.е. $dx=2t\,dt$, следователно $x=t^2+const$ е уравнението на изгубеното решение. Би могло да се провери дали $x=t^2+const$ не следва от общото решение, но това би било трудоемка задача предвид на това, че (8) е трансцедентно уравнение.

Тема: Уравнения на пълен диференциал. Интегриращ множител

Теоретичен минимум

7. Уравнения на пълен диференциал

Общ вид:

(7.1) $$P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0.$$

Ако е изпълнено условието

(7.2) $$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t},$$

уравнението е **уравнение на пълен диференциал**, т.е. лявата му страна е $d\Phi(t,x)$ и един негов **пръв интеграл** ще бъде

(7.3) $\Phi(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t} P(t,x)\,dt+\int\limits_{x_0}^{x} Q(t,x)\,dx,$

а **общото** му **решение** се представя с $\Phi(t,x)=C$.

Интегриращ множител

Ако горното условието не е изпълнено, то уравнение не е уравнение на пълен диференциал. За него се търси такава функция $\mu=\mu(t,x)$, наречена **интегриращ множител,** която умножавайки двете страни на уравнението го превръща в уравнение на пълен диференциал, за което

(7.4) $\frac{\partial}{\partial x}[\mu(t,x).P(t,x)]=\frac{\partial}{\partial t}[\mu(t,x).Q(t,x)],$

Намирането на функцията $\mu=\mu(t,x)$ от горното уравнение в **общия случай** е твърде **трудна задача**. Затова е по-удобно да се започне с някои частни случаи.

А) Първи случай: $\mu=\mu(t)$.

Интегриращият множител в този случай е

(7.5) $\mu(t)=e^{\int f(t)dt}$, където $f(t)=\frac{1}{Q(t,x)}\left[\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}\right]$.

Б) Втори случай: $\mu=\mu(x)$.

Интегриращият множител в този случай е

(7.6) $\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$, където $g(x)=\frac{1}{P(t,x)}\left[\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]$.

✸ **Задача** (Стр. 13/ Зад. 149) Да се интегрира уравнението:

(1) $t.x' \cos^{-2} x+tg\, x-3t^2=0$

Решение:

$\left(\frac{t}{\cos^2 x}\right)\frac{dx}{dt}+(tg\, x-3t^2)=0 \qquad \Big|\times dt$

(2) $\underbrace{(tg\, x-3t^2)}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{\left(\frac{t}{\cos^2 x}\right)}_{Q(t,x)}dx=0.$

Нека проверим дали това е уравнение на пълен диференциал, т.е. дали

(3) $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}.$

☞ $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(tg\, x-3t^2)=\frac{1}{\cos^2 x};$

☞ $\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}.$

Очевидно условието (3) е изпълнено и това е ДУ на пълен диференциал, чийто пръв интеграл се явява

(4) $\Phi(t,x)=\int\limits_0^t P(t,x)\,dt+\int\limits_0^x Q(t,x)\,dx=\int\limits_0^t (tg\,x-3t^2)\,dt+\int\limits_0^x\left(\dfrac{t}{\cos^2 x}\right)dx=$

$=tg\,x\int\limits_0^t dt-3\int\limits_0^t t^2\,dt+t\int\limits_0^x \dfrac{dx}{\cos^2 x}=t\,.\,tg\,x-t^3+t\int\limits_0^x d(tg\,x)=2t\,.\,tg\,x-t^3.$

Общото решение на това ДУ се представя с $\Phi(t,x)=C$, т.е.

(5) $2t\,.\,tg\,x-t^3=C$.

✸ **Задача** (Стр. 14/ Зад. 161) Да се интегрира уравнението:

(1) $e^x(1+x^/)+e^{-t}(\ln x+\dfrac{t}{x}.x^/)=0$.

Решение: нека представим уравнението във вида $P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0$:

$$e^x+e^x.x^/+\frac{\ln x}{e^t}+\frac{t}{x.e^t}.x^/=0,$$

$$\left(e^x+\frac{t}{x.e^t}\right).\frac{dx}{dt}+\left(e^x+\frac{\ln x}{e^t}\right)=0 \qquad \Big|\times dt.x.e^t$$

$$(x.e^xe^t+t).dx+(x.e^xe^t+x.\ln x)\,dt=0,$$

(2) $\underbrace{(x.e^xe^t+x.\ln x)}_{P(t,x)}dt+\underbrace{(x.e^xe^t+t)}_{Q(t,x)}.dx=0$.

Нека най-напред проверим дали (2) не е уравнение на пълен диференциал, т.е. дали

(3) $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$.

☞ $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x.e^xe^t+x.\ln x)=e^xe^t+x.e^xe^t+\ln x+\underbrace{x.x^{-1}}_{1}$.

☞ $\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}(x.e^xe^t+t)=x.e^xe^t+1$.

Очевидно $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\neq\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$, следователно (2) не е уравнение на пълен диференциал, т.е. налага се да търсим интегриращ множител $\mu=\mu(x,t)$. А такъв се търси най-често за следните два частни случая:

А) $\mu=\mu(t)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(4) $\dfrac{1}{Q(t,x)}\left[\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}-\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}\right]\equiv f(t)$.

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $\dfrac{1}{(x.e^xe^t+t)}\Big[(e^xe^t+x.e^xe^t+\ln x+1)-(x.e^xe^t+1)\Big]=\dfrac{e^xe^t+\ln x}{(x.e^xe^t+t)}\neq\underbrace{f(t)}_{само}$.

Б) $\mu=\mu(x)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(5) $\dfrac{1}{P(t,x)}\left[\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]\equiv g(x)$.

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $\frac{1}{(x.e^x e^t + x.\ln x)}\left[(x.e^x e^t +1)-(e^x e^t + x.e^x e^t + \ln x +1)\right] = \frac{-(e^x e^t + \ln x)}{x.(e^x e^t + \ln x)} = -\frac{1}{x} = g(x)$.

Щом това е така, то функцията

(6) $\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$

се явява интегриращ множител на (2). Умножаваме с $\mu(x) = \frac{1}{x}$ изходното уравнение (2):

$$\frac{1}{x}(x.e^x e^t + x.\ln x)\,dt + \frac{1}{x}(x.e^x e^t + t).dx = 0,$$

(7) $\underbrace{(e^x e^t + \ln x)}_{\text{"нова" } P(x,t)}dt + \underbrace{(e^x e^t + \frac{t}{x})}_{\text{"нова" } Q(x,t)}.dx = 0$.

Лесно се проверява, че това е уравнение на пълен диференциал, защото

☞ $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x e^t + \ln x) = e^x e^t + \frac{1}{x}$;

☞ $\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(e^x e^t + \frac{t}{x}) = e^x e^t + \frac{1}{x}$, т.е. $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$.

Пръв интеграл на уравнение (7), респективно (2), ще бъде

$$\Phi(t,x) = \int_0^t P(t,x)\,dt + \int_0^x Q(t,x)\,dx = \int_0^t (e^x e^t + \ln x)\,dt + \int_0^x (e^x e^t + \frac{t}{x})\,dx =$$

$$= \int_0^t e^x e^t\,dt + \int_0^t \ln x\,dt + \int_0^x e^x e^t\,dx + \int_0^x \frac{t}{x}dx = e^x \int_0^t e^t\,dt + \ln x \int_0^t dt + e^t \int_0^x e^x\,dx + t\int_0^x \frac{dx}{x} =$$

$= e^x e^t + t.\ln x + e^t e^x + t.\ln x = 2(e^x e^t + t.\ln x)$, т.е.

(8) $\Phi(t,x) = 2(e^x e^t + t.\ln x)$.

Общото решение на това ДУ се представя с равенството $\Phi(t,x) = C$, т.е.

(9) $e^{x+t} + t.\ln x = const$.

✸ **Задача:** Да се интегрира уравнението:

(1) $(x+t)x^{//} + x^{/\,2} - x^{/} = 0$.

Решение: лявата страна на това ОДУ от втори ред може да се представи като пълен диференциал от някаква функция, ако се използва факта, че както директно може да се провери

(2) $\frac{d}{dt}[(x+t).x^{/} - 2x] = \frac{d(x+t)}{dt}x^{/} + (x+t).\frac{dx^{/}}{dt} - 2\frac{dx}{dt} =$

$$= \left(\frac{dx}{dt}+1\right)x^{/} + (x+t).x^{//} - 2x^{/} = x^{/\,2} + x^{/} + (x+t).x^{//} - 2x^{/} = (x+t).x^{//} + x^{/\,2} - x^{/}.$$

Следователно уравнение (1) може да бъде записано във вида

(3) $\frac{d}{dt}[(x+t).x^{/} - 2x] = 0$, или още (4) $d[(x+t).x^{/} - 2x] = 0$,

откъдето следва

(5) $\quad (x+t).x^{/} - 2x = C_1,$

с което сведохме изходното ДУ до уравнение от първи ред.

Уравнение (5) ще решим като го сведем до уравнение на пълен диференциал, определяйки негов интегриращ множител. Нека за целта най-напред го представим в стандартния за този тип уравнения вид:

$$(x+t)\frac{dx}{dt} + (-2x - C_1) = 0 \qquad \Big|\,.(-dt)$$

(6) $$\underbrace{(2x+C_1)}_{P(t,x)}\,dt + [\underbrace{-(x+t)}_{Q(t,x)}]\,dx = 0\,.$$

Нека проверим дали евентуално (6) не е уравнение на пълен диференциал:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = -1\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

Тогава нека потърсим интегриращ множител на (6) напр. от вида $\mu = \mu(x)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(7) $$\frac{1}{P(t,x)}\left[\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right] \equiv g(x)\,.$$

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $$\frac{1}{(2x+C_1)}\left[-1-2\right] = \frac{-3}{2x+C_1} = g(x)\,.$$

Щом това е така, то функцията

(8) $$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{-3\int\frac{dx}{2x+C_1}} = e^{-\frac{3}{2}\int\frac{d(2x+C_1)}{2x+C_1}} = e^{-\frac{3}{2}\ln(2x+C_1)} =$$

$$= e^{\ln(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}} = (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}.$$

И така интегриращият множител на уравнение (6) е функцията

(9) $$\mu(x) = (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Умножаваме с $\mu(x)$ изходното уравнение (6):

$$(2x+C_1)(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\,dt + [-(x+t)](2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\,dx = 0\,,$$

$$(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}\,dt - (x+t)\,(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\,dx = 0\,,$$

(10) $$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}}_{P(t,x)}\,dt + \underbrace{\frac{-(x+t)}{\sqrt[3]{2x+C_1}}}_{Q(t,x)}\,dx = 0\,.$$

Щом уравнение (10) е уравнение на пълен диференциал (*може да бъде проверено елементарно*), то негов пръв интеграл ще бъде функцията

(11) $$\Phi(t,x) = \int_0^t P(t,x)\,dt + \int_0^x Q(t,x)\,dx = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{2x+C_1}} + \int_0^x \frac{-(x+t)}{\sqrt[3]{2x+C_1}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}\int_0^t dt-\int_0^x (x+t)(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-\underbrace{\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx}_{I_1}-t\underbrace{\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx}_{I_2}$$

Нека решим поотделно горните два интеграла:

☞ $I_2=\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=\frac{1}{2}\frac{1}{(-1/2)}(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=$

$=-(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}$, т.е.

$\boxed{I_2=-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}}$.

Първия интеграл I_1 ще решим по части, като за подготвянето му използваме, че $(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=-d(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}$:

☞ $I_1=\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=-\frac{1}{2}\int_0^x x\,d(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=-\frac{1}{2}x(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}x(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}d(2x+C_1)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)}(2x+C_1)^{+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}\text{, т.е.}$$

$\boxed{I_1=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}}$.

Заместваме така намерените стойности на двата интеграла I_1 и I_2 в (11) и получаваме

(12) $\Phi(t,x)=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-I_1-t.I_2=$

$$=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}\right)-t.\left(-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}\right)=$$

$$=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}+\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}=$$

$$=\frac{2t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}.$$

След намирането на първия интеграл $\Phi(t,x)$ общото решение на това ДУ се представя с равенството $\Phi(t,x)=C_2$, т.е.

(13) $\frac{2t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}=C_2$,

където C_1 и C_2 са двете интеграционни константи на това ОДУ от втори ред.

✸ **Задача**: Да се интегрира уравнението

(1) $$\underbrace{e^t(2tx+t^2x+\frac{x^3}{3})}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{e^t(t^2+x^2)}_{Q(t,x)}dx=0\,.$$

Решение: проверяваме дали не е уравнение на пълен диференциал

(2) $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^t(2tx+t^2x+\frac{x^3}{3})\right]=e^t(2t+t^2+x^2)\,;$$

(3) $$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[e^t(t^2+x^2)\right]=e^t2t+e^t(t^2+x^2)=e^t(2t+t^2+x^2)\,.$$

Очевидно това е уравнение на пълен диференциал, и неговият пръв интеграл е

(4) $$\Phi(t,x)=\int_{t_0}^{t}P(t,x)\,dt+\int_{x_0}^{x}Q(t,x)\,dx=\int_{t_0}^{t}e^\tau(2\tau x+\tau^2x+\frac{x^3}{3})\,d\tau+\int_{x_0}^{x}e^t(t^2+\xi^2)\,d\xi=$$

$$=2x\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau}_{I_1}+x\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau^2\,d\tau}_{I_2}+\frac{x^3}{3}\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d\tau+e^tt^2\int_{x_0}^{x}d\xi+e^t\int_{x_0}^{x}\xi^2\,d\xi=$$

$$=2x.I_1+x.I_2+\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\frac{1}{3}(x^3-{x_0}^3)\,.$$

Нека решим отделно двата интеграла I_1 и I_2 (по части):

$$I_1=\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\tau\,d(e^\tau)=\tau e^\tau\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d\tau=t\,e^t-t_0\,e^{t_0}-(e^t-e^{t_0})\,.$$

$$I_2=\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau^2\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\tau^2\,d(e^\tau)=\tau^2\,e^\tau\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d(\tau^2)=t^2\,e^t-{t_0}^2\,e^{t_0}-2\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau}_{I_1}=$$

$$=t^2\,e^t-{t_0}^2\,e^{t_0}-2.I_1\,.$$

Заместваме така намерените интеграли в (4)

$$\Phi(t,x)=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\frac{1}{3}(x^3-{x_0}^3)+2x.I_1+x.I_2=$$

$$=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\frac{1}{3}(x^3-{x_0}^3)+2x.I_1+x.(t^2\,e^t-{t_0}^2\,e^{t_0}-2I_1)=$$

$$=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\frac{1}{3}(x^3-{x_0}^3)+x.(t^2\,e^t-{t_0}^2\,e^{t_0})=$$

$$=\frac{2}{3}x^3e^t+2x.t^2\,e^t-\frac{1}{3}(x^3e^{t_0}+e^t{x_0}^3)-x_0t^2e^t-x.{t_0}^2\,e^{t_0}\,.$$

Общото решение на (1) е

(5) $$\Phi(t,x)\equiv\frac{2}{3}x^3e^t+2x.t^2\,e^t-\frac{1}{3}(x^3e^{t_0}+e^t{x_0}^3)-x_0t^2e^t-x.{t_0}^2\,e^{t_0}=const\,.$$

✸ **Задача**: Да се интегрира уравнението

(1) $t.x^{/}+(\sin x-3t^2\cos x)\cos x=0$.

Решение: уравнението съдържа неизвестната функция в трансцедентните функции $\sin x$ и $\cos x$, затова е немислимо да търсим някакъв познат тип ДУ. Ето защо нека представим уравнението във вид, удобен за работа при уравнения с пълен диференциал.

$$\frac{dx}{dt}+\frac{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}{t}=0, \qquad \text{т.е.}$$

(2) $\underbrace{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{t}_{Q(t,x)}.\,dx=0$.

Проверяваме дали не е уравнение на пълен диференциал

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\sin x-3t^2\cos x)\cos x\right]=(\cos x+3t^2\sin x)\cos x-(\sin x-3t^2\cos x)\sin x=$$

$$=\cos^2 x+3t^2\sin x\cos x-\sin^2 x+3t^2\cos x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=1.$$

Очевидно (1) не е уравнение на пълен диференциал, затова ще търсим интегриращ множител. Нека проверим най-напред с критерия за интегриращ множител от вида $\mu=\mu(x)$

(3) $$\frac{1}{P(t,x)}\left[\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]=\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin^2 x-6t^2\sin x\cos x}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-6t^2\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=2\frac{\sin x}{\cos x}=2\,tg\,x\equiv g(x)$$

Очевидно интегриращият множител в този случай е

(4) $\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$, където $g(x)=2\,tg\,x$, т.е.

$$\mu(x)=e^{2\int tg\,xdx}=e^{2\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}=e^{-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}}=e^{-2.\ln\cos x}=e^{\ln\cos^{-2}x}=\cos^{-2}x\equiv\frac{1}{\cos^2 x}.$$

При такъв интегриращ множител уравнение (2) добива вида

(5) $$\frac{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}{\cos^2 x}\,dt+\frac{t}{\cos^2 x}.dx=0, \text{ т.е.}$$

(6) $$\underbrace{(tg\,x-3t^2)}_{P}\,dt+\underbrace{\frac{t}{\cos^2 x}}_{Q}.dx=0.$$

Лесно се проверява, че $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial t}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, следователно (6) е уравнение на пълен диференциал и негов пръв интеграл е

(7) $$\Phi(t,x)=\int_{t_0}^{t}P(t,x)\,dt+\int_{x_0}^{x}Q(t,x)\,dx=\int_{t_0}^{t}(tg\,x-3\tau^2)\,d\tau+\int_{x_0}^{x}\frac{t}{\cos^2\xi}\,d\xi=$$

$$=tg\,x\int_{t_0}^{t}d\tau-3\int_{t_0}^{t}\tau^2\,d\tau+t\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\cos^2\xi}=tg\,x(t-t_0)-3.\frac{1}{3}(t^3-t_0{}^3)+t\int_{x_0}^{x}d(tg\,\xi)=$$

$$=tg\,x(t-t_0)-(t^3-t_0{}^3)+t(tg\;x-tg\;x_0)=2tg\,x.t-tg\,xt_0-tg\;x_0\,t-(t^3-t_0{}^3)\,.$$

Общото решение на (1) е

(8) $\Phi(t,x)\equiv 2tg\,x.t-tg\,xt_0-tg\;x_0\,t-(t^3-t_0{}^3)=const\,.$

Тема: Линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения (*ЛХОДУ*) от ред, по-висок от първи, с постоянни коефициенти

Теоретичен минимум

Общ вид:

$a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+.....+a_1x^{(1)}+a_0x=0\,.$

8. Линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения от втори ред.

ЛХОДУ от втори ред

(8.1) $a.x^{//}+b.x^{/}+c.x=0\,.$

Характеристично уравнение $a.\alpha^2+b.\alpha+c=0$ с корени α_1 и α_2.

Случай 1: Корените α_1 и α_2 са **реални** и **различни помежду си:**

(8.2^{А}) $x(t)=C_1.e^{\alpha_1.t}+C_2.e^{\alpha_2.t}\,.$

Случай 2: Корените α_1 и α_2 са **реални**, но **равни помежду си** $\alpha_1=\alpha_2\equiv\alpha_0$

(8.2^{Б}) $x(t)=C_1.e^{\alpha_0.t}+C_2.t.e^{\alpha_0.t}\equiv(C_1+C_2.t).e^{\alpha_0.t}\,.$

Случай 3: Корените α_1 и α_2 са **имагинерни** и **комплексно-спрегнати** (**винаги**), т.е. $\alpha_1=\lambda+i.\theta$ и $\alpha_2=\lambda-i.\theta$.

(8.2^{В}) $x(t)=C_1.e^{\alpha_1.t}+C_2.e^{\alpha_2.t}=C_1.e^{(\lambda+i.\theta).t}+C_2.e^{(\lambda-i.\theta).t}$, т.е.

$x(t)=e^{\lambda.t}\left[A.\cos\theta.t+B.\sin\theta.t\right].$

Уравнение на Ойлер

$a_nt^nx^{(n)}+a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)}+....a_0x=0$

За да се сведе до уравнение с постоянни коефициенти, в него се прави полагането $t=e^{\xi}$, след което уравнението добива вида

$c_nx^{(n)}(\xi)+c_{n-1}x^{(n-1)}(\xi)+....c_0x(\xi)=0,$

и в този си вид то е ЛХОДУ с **постоянни коефициенти**. След намирането на общото му решение $x(\xi)=x(\xi,C_1,C_2,....,C_n)$ се възстановява „оригиналната” променлива t, като за целта се замести навсякъде $\xi=\ln t$, с което се получава окончателно $x(t)=x(t,C_1,C_2,....,C_n)$.

✸ **Задача:**

📖

Тема: Линейни нехомогенни обикновени диференциални уравнения (*ЛХОДУ*) от ред, по-висок от първи, с постоянни коефициенти

📖 **Теоретичен минимум**

9. Линейни нехомогенни обикновени диференциални уравнения

(9.1) $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = d(t)$.

Общото им решение се представя във вида

(9.2) $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - **общо решение** на **хомогенното** на (9.1) **уравнение**;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на **нехомогенното уравнение** (9.1).

За намиране на частно решение на нехомогенно уравнение са приложими **два метода**:

1) **Метод на полагането** (*приложим за уравнения с постоянни коефициенти и специален вид на дясната страна*), и
2) **Метод на Лагранж** (*метод на вариране на интеграционните константи*), приложим за **уравнения с непостоянни коефициенти.** Удобен за намиране на частни решения на нехомогенни уравнения, за които са известни (*вече*) общите решения на съответните им хомогенни уравнения.

I. Същност на метода на полагането за намиране на частни решения на ЛНхОДУ

За случая на ЛНхОДУ от втори ред с постоянни коефициенти, т.е. уравнения от вида

(9.3) $a.x^{//} + b.x^{/} + c.x = d(t)$, като може и $d(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k(t)$.

Методът се прилага за ЛНхОДУ с дясна страна, имаща представяне (*или сбор от представяния*) от някои от следните **характерни видове**:

А) $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.4) $\bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t} . \bar{P}_n(t) \equiv t^S e^{\lambda.t} . \sum_{n=0}^{n} \bar{a}_n t^n$,

където:

☞ s - кратност на корена $\boxed{\lambda}$ в характеристичното уравнение $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$;

☞ $\bar{P}_n(t)$ - полином от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти $\bar{a}_n$.

***Забележки*:**

(1) *когато λ не е корен на характеристичното уравнение, то* $s = 0$,

(2) ако имаме просто $d(t) = P_n(t)$, то частно решение се търси във вида $\bar{x}(t) = \bar{P}_n(t)$, ако разбира се $\boxed{\lambda = 0}$ не е корен на характеристичното уравнение. А ако $\lambda = 0$ е s-кратен корен на характеристичното уравнение, то частно решение се търси във вида $\bar{x}(t) = t^s.\bar{P}_n(t)$.

Б) $d(t) = e^{\lambda.t}(P_n(t).\cos\theta.t + Q_n(t).\sin\theta.t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.5) $\bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.(\bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t)$,

където:

☞ s - кратност на корена $\boxed{\lambda \pm i.\theta}$ в характеристичното уравнение $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$;

☞ $\bar{P}_n(t)$, $\bar{Q}_n(t)$ - полиноми от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

******Забележки***:**

(1) решението се търси в този вид дори ако дясната страна на ДУ съдържа само едната от двете тригонометрични функции, т.е. само $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$ **или** пък само $d(t) = e^{\lambda.t}Q_n(t).\sin\theta.t$;

(2) ако $d(t) = P_n(t).\cos\theta.t + Q_n(t).\sin\theta.t$, т.е. $\lambda = 0$, трябва да се провери дали $0 \pm i.\theta \equiv \pm i.\theta$ не е корен на характеристичното уравнение:

- ако **да**, то $\bar{x}(t) = t(\bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t)$, понеже $s = 1$ и $\lambda = 0$;
- ако **не**, то $\bar{x}(t) = \bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t$, понеже $s = 0$ и $\lambda = 0$.

В) $d(t) = e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.Z_n(t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.6) $\bar{x}(t) = t^S e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.\bar{Z}_n(t)$,

където:

☞ s-кратност на корена $\boxed{\lambda \pm i.\theta}$ в характеристичното уравнение $a.\alpha^2 + b.\alpha + c = 0$;

☞ $\bar{Z}_n(t)$- полином от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

******Забележка***:**

Уравнения с дясна страна $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$ или $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\sin\theta.t$ **също** могат да бъдат решени по този начин. За целта вместо уравнението $a.x^{//} + b.x^{/} + c.x = d(t)$ се разглежда уравнението

(9.7) $a.z^{//} + b.z^{/} + c.z = d^{/}(t)$,

където

(9.8) $d^{/}(t) = e^{\lambda.t}e^{\pm i.\theta.t}.P_n(t) \equiv e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.P_n(t)$,

т.е. точно уравнение от тип (**В**), само че „обобщено” в комплексната област. Ето защо негово частно решение се търси във вида

(9.9) $\bar{z}(t) = t^S e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.\bar{P}_n(t)$.

Накрая се обособяват реалната и имагинерната части на решението $\bar{z}(t)$:

$\bar{z}(t) = \mathrm{Re}\,\bar{z}(t) + i.\mathrm{Im}\,\bar{z}(t)$.

За да получим решението $\bar{x}(t)$ от решението $\bar{z}(t)$, правим следното:

- ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\cos\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Re}\bar{z}(t)$, а
- ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\sin\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

Приложен по гореописания начин този подход е дори за предпочитане при уравнения с дясна страна $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\cos\theta.t$ или $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\sin\theta.t$, защото

- при него се търсят и определят **два пъти по-малко константи**, отколкото ако се работи с **тригонометрични функции**, и

- при диференциране в изрази, съдържащи **експоненти** вместо **тригонометрични функции**, се получават **значително по-малко** и **по-опростени** и **„олекотени" изрази**.

✷ **Задача** (Стр. 30/ Зад. 401) Да се реши уравнението

(1) $\quad x^{//} - 5x^{/} + 6x = 2e^{4t}$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на хомогенното на (1) уравнение

(3) $\quad x^{//} - 5x^{/} + 6x = 0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\quad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$,

които са $\alpha_{1,2} = 2; 3$. Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $\quad x_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна $d(t) = 2e^{4t} \equiv P_0(t) e^{4t}$ и при положение, че $\lambda = 4$ не е корен на характеристичното уравнение (3), т.е. $s = 0$, частно решение ще търсим от вида

(6) $\quad \bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.\bar{P}_0(t) \equiv t^0 e^{4.t}.C = Ce^{4.t}$.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$:

☞ $\quad \bar{x}^{/}(t) = 4Ce^{4.t}$;

☞ $\quad \bar{x}^{//}(t) = 16Ce^{4.t}$.

Заместваме $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1)

(7) $\quad 16Ce^{4.t} - 5.4Ce^{4.t} + 6Ce^{4.t} = 2e^{4t} \qquad \Big| : 2e^{4t} \neq 0$

(8) $\quad 8C - 10C + 3C = 1, \qquad$ т.е. $\quad C = 1$,

следователно частното решение (6) при тази стойност на константата С добива вида

(9) $\quad \bar{x}(t) = e^{4.t}$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (9) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(10) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + e^{4t}$.

✸ **Задача** (Стр. 30/ Зад. 410) Да се реши уравнението

(1) $\quad x^{//} + 9x = 2t\cos 3t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $\quad x^{//} + 9x = 0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\quad \alpha^2 + 9\alpha = 0$,

които са

$$\alpha_{1,2} = \underbrace{0}_{\lambda} \pm \underbrace{3}_{\mu} i, \qquad \text{т.е.} \qquad \lambda = 0,\ \mu = 3.$$

Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $\quad x_0(t) = e^{\lambda t}\{C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\} \equiv C_1\cos 3t + C_2\sin 3t$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При $\lambda = 0$ и при дясна страна

$$d(t) = 2t\cos 3t \equiv \underbrace{e^{\lambda.t}}_{1}\{\underbrace{P_1(t)}_{2t}.\cos\mu.t + \underbrace{Q_1(t)}_{0}.\sin\mu.t\}$$

частно решение на (1) ще търсим във вида

(6) $\quad \bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.(\bar{P}_1(t).\cos\mu.t + \bar{Q}_1(t).\sin\mu.t)$.

където:

☞ s - кратност на корена $\lambda \pm i.\mu \equiv 0 \pm i3$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s=1}$;

☞ $\bar{P}_1(t),\ \bar{Q}_1(t)$ - полиноми от първа степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

При отчитане на всички упоменати по-горе обстоятелства частното решение (6) би следвало да изглежда още така

(7) $\quad \bar{x}(t) = t.\{(at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t\}$.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ ☹:

☞ $\bar{x}^{/}(t) = \{(at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t\} + t.\{a.\cos 3.t + c.\sin 3.t\} +$
$+ t.\{(at+b).(-3)\sin 3.t + (ct+d).(+3)\cos 3.t\} =$

$= (at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t +$
$+ t.\{3(ct+d)\cos 3.t - 3(at+b)\sin 3.t + a.\cos 3.t + c.\sin 3.t\} =$

$= (at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t +$

$$+t.\{(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t\}.$$

☞ $$\bar{x}^{//}(t)=a.\cos 3.t+c.\sin 3.t+(at+b).(-3)\sin 3.t+(ct+d).(3)\cos 3.t+$$
$$+\{(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t\}+$$
$$+t.\{(3ct+3d+a)(-3)\sin 3.t-(3at+3b-c)(3)\cos 3.t\}+t.\{3c\cos 3.t-3a\sin 3.t\}=$$

$$=a.\cos 3.t+c.\sin 3.t+3(ct+d).\cos 3.t-3(at+b).\sin 3.t+$$
$$+(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t+$$
$$+t.\{-3(3ct+3d+a)\sin 3.t-3(3at+3b-c)\cos 3.t+3c\cos 3.t-3a\sin 3.t\}=$$

$$=(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t+$$
$$+t.\{(-9ct-9d-6a)\sin 3.t+(-9at-9b+6c)\cos 3.t\}=$$

$$=(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t-$$
$$-9t.\{(at+b)\cos 3.t+(ct+d)\sin 3.t\}-6t.\{a\sin 3.t-c\cos 3.t\}$$

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}+9x=2t\cos 3t$:

☞ $$(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t-$$
$$-9t.\{(at+b)\cos 3.t+(ct+d)\sin 3.t\}-6t.\{a\sin 3.t-c\cos 3.t\}+$$
$$+9t.\{(at+b).\cos 3.t+(ct+d).\sin 3.t\}=2t\cos 3t$$

След съкращения и приведения получаваме

(8) $(12ct+6d+2a)\cos 3.t-(12at+6b-2c)\sin 3.t=2t\cos 3t$,

или още (*в по-удобен за сравнения вид*)

(9) $$\underbrace{12c}_{2}t\cos 3.t+(\underbrace{6d+2a}_{0})\cos 3.t-\underbrace{12a}_{0}t\sin 3.t-(\underbrace{6b-2c}_{0})\sin 3.t=2t\cos 3t.$$

Нека сравним полиномните коефициентите пред $\cos 3.t$ и $\sin 3.t$ от двете страни на (9). Така получаваме следната система от 4 уравнения за четирите неизвестни полиномни коефициенти a,b,c,d:

(10ᵃ) $12c=2$, $\Rightarrow$ $c=1/6$;
(10ᵇ) $12a=0$, $\Rightarrow$ $a=0$;
(10ᵛ) $6d+2a=0$, $\Rightarrow$ $d=0$;
(10ᵍ) $6b-2c=0$, $\Rightarrow$ $b=(1/3).c=1/18$.

Заместваме така намерените коефициенти в (7) и за частното решение на (1) получаваме

(11) $$\bar{x}(t)=t.\{(at+b).\cos 3.t+(ct+d).\sin 3.t\}=t.\left(\frac{1}{18}\cos 3.t+\frac{t}{6}\sin 3.t\right).$$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (11) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(12) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{18}\cos 3.t+\frac{t^2}{6}\sin 3.t=$$

$$=\left(C_1+\frac{t}{18}\right)\cos 3t+\left(C_2+\frac{t^2}{6}\right)\sin 3t\,.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{///}-4x^{//}+3x^{/}=t^2+t.e^{2t}$.

Решение: общото решение на (1) търсим от вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\overline{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\overline{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на хомогенното на (1) уравнение

(3) $x^{///}-4x^{//}+3x^{/}=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^3-4\alpha^2+3\alpha=0$, или още $\alpha(\alpha^2-4\alpha+3)=0$

които са $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ и $\alpha_3=3$. Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $x_0(t)=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}+C_3e^{\alpha_3 t}\equiv C_1+C_2e^{t}+C_3e^{3t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна

(6) $d(t)=t^2+t.e^{2t}\equiv P_2(t)\,e^{0.t}+Q_1(t).e^{2t}$

уравнение (1) допуска частно решение от вида

(7) $\overline{x}(t)=t^{S}\overline{P}_2(t)e^{0.t}+t^{S^{/}}\,\overline{Q}_1(t)\,e^{2.t}$,

където:

- s - кратност на корена $\alpha=0$ на (4), или в случая $s=1$;
- $s^{/}$ - кратност на корена $\alpha=2$ на (4), или в случая $s^{/}=0$.

Следователно частно решение на (1) ще търсим във вида:

(8) $\overline{x}(t)=t.(at^2+bt+c)+(dt+f)e^{2.t}\equiv(at^3+bt^2+ct)+(dt+f)e^{2.t}$.

Нека определим производните $\overline{x}^{/}(t)$, $\overline{x}^{//}(t)$ и $\overline{x}^{///}(t)$:

☞ $\overline{x}^{/}=(3at^2+2bt+c)+d.e^{2.t}+2(dt+f)e^{2.t}=(3at^2+2bt+c)+(2dt+2f+d)e^{2.t}$;

☞ $\overline{x}^{//}=(6at+2b)+2d.e^{2.t}+2(2dt+2f+d)e^{2.t}=6at+2b+4(dt+f+d)e^{2.t}$;

☞ $\overline{x}^{///}=6a+4d.e^{2.t}+8(dt+f+d).e^{2.t}=6a+4(2dt+2f+3d).e^{2.t}$.

Заместваме $\overline{x}^{/}(t)$, $\overline{x}^{//}(t)$ и $\overline{x}^{///}(t)$ в (1), т.е. в $x^{///}-4x^{//}+3x^{/}=t^2+t.e^{2t}$ и рационализираме:

$$6a+4(2dt+2f+3d).e^{2.t}-4[6at+2b+4(dt+f+d)e^{2.t}]+$$
$$+3[(3at^2+2bt+c)+(2dt+2f+d)e^{2.t}]=t^2+t.e^{2t};$$

$$\{6a-24at-8b+9at^2+6bt+3c\}+$$
$$+e^{2.t}\{8dt+8f+12d-16dt-16f-16d+6dt+6f+3d\}=t^2+t.e^{2t};$$

(9) $\{9at^2+(6b-24a)t+(6a-8b+3c)\}+e^{2.t}\{-2dt-2f-d\}=t^2+t.e^{2t}$.

Сравняваме еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенство (9)

(10[а]) $\underbrace{9a}_{1}t^2+(\underbrace{6b-24a}_{0})t+(\underbrace{6a-8b+3c}_{0}) \quad \Leftrightarrow \quad 1.t^2+0.t+0$, и

(10[б]) $(\underbrace{-2dt-2f-d}_{t})\,e^{2.t} \quad \Leftrightarrow \quad (1.\,t+0).e^{2t}$.

Така достигаме до следната система от алгебрични уравнения за неизвестните коефициенти a,b,c,d,f :

(11[а]) $9a=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{9}$;

(11[б]) $6b-24a=0$, т.е. $b=4a \quad \Rightarrow \quad b=\frac{4}{9}$;

(11[в]) $6a-8b+3c=0$, т.е. $c=\frac{1}{3}(8b-6a)=\frac{1}{3}(\frac{32}{9}-\frac{6}{9}) \quad \Rightarrow \quad c=\frac{26}{27}$;

(11[г]) $-2d=1, \quad \Rightarrow \quad d=-\frac{1}{2}$;

(11[д]) $-2f-d=0, \quad \Rightarrow \quad f=-\frac{d}{2}=\frac{1}{4}$.

Частното решение (8) при тази стойност на константите добива вида

(12) $\bar{x}(t)=t(at^2+bt+c)+(dt+f)e^{2.t}=$

$$=t(\frac{1}{9}t^2+\frac{4}{9}t+\frac{26}{27})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t)e^{2.t}=\frac{t}{9}(t^2+4t+\frac{26}{3})-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})e^{2.t}.$$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1+C_2e^t+C_3e^{3t}+\frac{t}{9}(t^2+4t+\frac{26}{3})-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})e^{2.t}$.

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x''-2x'+x=2t\,e^t+e^t\sin 2t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x''-2x'+x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-2\alpha+1=0$,

които са

$\alpha_{1,2}\equiv\alpha=1$, т.е. двукратен корен.

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $x_0(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 .t.e^{\alpha t} \equiv (C_1 + C_2 .t).e^t$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна от вида

(6) $d(t) = 2t\,e^t + e^t \sin 2t \equiv P_1(t) e^t + e^t Q_0(t) \sin 2t$

ще търсим частно решение на (1) във вида

(7) $\overline{x}(t) = t^S \overline{P}_1(t) e^t + t^{S^/} e^t \{\overline{Q}_0(t) \sin 2t + \overline{R}_0(t) \cos 2t\}$.

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha = 1$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s = 2}$;

☞ $s^/$ - кратност на корена (*ако изобщо има такъв*) $\alpha^/ = 1 + 2i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^/ = 0}$;

☞ $\overline{P}_1(t),\ \overline{Q}_0(t),\ \overline{R}_0(t)$ - полиноми от първа и нулева степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частното решение (7) следва да търсим във вида

(8) $\overline{x}(t) = t^2 (at + b) e^t + e^t \{c.\sin 2t + d \cos 2t\}$.

Нека определим $\overline{x}^/(t)$ и $\overline{x}^{//}(t)$:

☞ $$\overline{x}^/(t) = at^2 e^t + 2t(at + b) e^t + t^2 (at + b) e^t +$$
$$+ e^t \{c.\sin 2t + d \cos 2t\} + e^t \{2c.\cos 2t - 2d \sin 2t\} =$$
$$= \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt\} e^t + \{(2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t =$$
$$= \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt + (2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t .$$

☞ $$\overline{x}^{//}(t) = \{3at^2 + 2(3a + b)t + 2b\} e^t + \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt\} e^t +$$
$$+ \{-2(2c + d) \sin 2t + 2(c - 2d) \cos 2t\} e^t + \{(2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t =$$

$$= \{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b\} e^t + \{(4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t =$$
$$= \{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t .$$

Заместваме $x(t)$ и $\overline{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//} - 2x^/ + x = 2t\,e^t + e^t \sin 2t$:

$$\{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t -$$
$$- 2\{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt + (2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t +$$
$$+ \{(at + b)t^2 + c.\sin 2t + d \cos 2t\}\, e^t = (2t + \sin 2t) e^t$$

Ако съкратим двете страни на горното уравнение с $e^t \neq 0$ и рационализираме, ще получим

$$at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t -$$
$$- 2at^3 - 2(3a + b)t^2 - 4bt - 2(2c + d) \cos 2t - 2(c - 2d) \sin 2t +$$
$$+ (at + b)t^2 + c.\sin 2t + d \cos 2t = 2t + \sin 2t \text{ , т.е.}$$

(9) $(6at+2b)-4d\cos 2t-4c\sin 2t=2t+\sin 2t$.

Нека в (9) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(10[а]) $\underbrace{6a}_{2}t+\underbrace{2b}_{0} \quad\Leftrightarrow\quad 2t$, и

(10[б]) $\underbrace{(-4d)}_{0}\cos 2t+\underbrace{(-4c)}_{1}\sin 2t \quad\Leftrightarrow\quad \sin 2t$.

От сравняването произтичат следните алгебрични уравнения

(11[а]) $6a=2, \quad\Rightarrow\quad a=1/3;$

(11[б]) $2b=0, \quad\Rightarrow\quad b=0;$

(11[в]) $-4d=0, \quad\Rightarrow\quad d=0;$

(11[г]) $-4c=1, \quad\Rightarrow\quad c=-1/4.$

Заместваме така намерените коефициенти в (8) и за частното решение на (1) получаваме

(12) $\bar{x}(t)=t^2(at+b)e^t+e^t\{c.\sin 2t+d\cos 2t\}=\dfrac{1}{3}t^3e^t-e^t\dfrac{1}{4}.\sin 2t\equiv\left(\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=(C_1+C_2.t).e^t+\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t=$$

$$=\left(C_1+C_2.t+\frac{t^3}{3}-\frac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}+x^{/}=\cos^2 t+e^t+t^2$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

- ☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;
- ☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}+x^{/}=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2+\alpha=0$,

които са

$\alpha_1=0,\ \alpha_2=-1.$

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $x_0(t)=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2.e^{\alpha_2 t}\equiv C_1+C_2.e^{-t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. За тази цел най-напред ще представим дясната страна на (1) във вида

$$d(t)=\cos^2 t+e^t+t^2=\frac{1+\cos 2t}{2}+e^t+t^2=\underbrace{\left(\frac{1}{2}+t^2\right)}_{P_2(t)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{Q_0(t)}\cos 2t+\underbrace{1}_{R_0(t)}.e^t\equiv$$

$$=\underbrace{P_2(t)}_{P_2(t)e^{0.t}}+Q_0(t)\cos 2t+R_0(t).e^t.$$

За ЛНхОДУ с такива десни страни се препоръчва търсене на частно решение $\overline{x}(t)$ от вида

(6) $\quad \overline{x}(t)=t^s\overline{P}_2(t)+t^{s^/}\{\overline{Q}_0^{\,/}(t)\cos 2t+\overline{Q}_0^{\,//}(t)\sin 2t\}+t^{s^{//}}\overline{R}_0(t).e^t$,

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha=0$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s=1}$;

☞ $s^/$ - кратност на корен (*ако има такъв*) $\alpha=0+2i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^/=0}$;

☞ $s^{//}$ - кратност на корен (*ако има такъв*) $\alpha=1$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^{//}=0}$;

☞ $\overline{P}_1(t)$, $\overline{Q}_0^{\,/}(t)$, $\overline{Q}_0^{\,//}(t), \overline{R}_0(t)$ - полиноми от първа и нулева степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частно решение (6) следва да търсим във вида

(7) $\quad \overline{x}(t)=t.(at^2+bt+c)+\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t$ q

където a,b,c,d,f,g са константи, подлежащи на определяне.

Нека определим $\overline{x}^/(t)$ и $\overline{x}^{//}(t)$:

☞ $\overline{x}^/(t)=(at^2+bt+c)+t.(2at+b)+\{-2d.\sin 2t+2f.\cos 2t\}+g.e^t=$
$=(3at^2+2bt+c)-2\{d.\sin 2t-f.\cos 2t\}+g.e^t$.

☞ $\overline{x}^{//}(t)=(6at+2b)-4\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t$.

Заместваме $x(t)$ и $\overline{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}+x^/=\cos^2 t+e^t+t^2$:

$$(6at+2b)-4\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t+(3at^2+2bt+c)-$$
$$-2\{d.\sin 2t-f.\cos 2t\}+g.e^t=\left(\frac{1}{2}+t^2\right)+\frac{1}{2}\cos 2t+e^t,$$ т.е.

(8) $\{3at^2+(6a+2b)t+(2b+c)\}+\{(2f-4d).\cos 2t-(4f+2d).\sin 2t\}+2g.e^t=$
$=\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos 2t+e^t$

Нека в (8) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(9^a) $\quad \underbrace{3a}_{1}t^2+(\underbrace{6a+2b}_{0})t+(\underbrace{2b+c}_{1/2}) \quad \Leftrightarrow \quad t^2+\frac{1}{2},$

($9^{б}$) $\underbrace{(2f-4d)}_{1/2}.\cos 2t-\underbrace{(4f+2d)}_{0}.\sin 2t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos 2t+0.\sin 2t$, и

($9^{в}$) $\underbrace{2g}_{1}.e^{t} \quad \Leftrightarrow \quad 1.e^{t}$.

От сравняването произтичат следните алгебрични уравнения

($11^{а}$) $3a=1, \qquad \Rightarrow \qquad a=1/3;$

($11^{б}$) $6a+2b=0, \qquad \Rightarrow \qquad b=-3a=-1;$

($11^{в}$) $2b+c=1/2, \qquad \Rightarrow \qquad c=1/2-2b=5/2;$

($11^{г}$) $2f-4d=1/2;$

($11^{д}$) $4f+2d=0;$

($11^{е}$) $2g=1, \qquad \Rightarrow \qquad g=1/2$.

От съвместното решаване на ($11^{г}$) и ($11^{д}$) определяме още $d=-1/10$ и $f=1/20$.

Заместваме така намерените коефициенти в (7) и за частното решение на (1) получаваме

$$\bar{x}(t)=t.(at^2+bt+c)+\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^{t}=$$

$$=t.(\frac{1}{3}t^2-t+\frac{5}{2})+\{-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{1}{20}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^{t}, \quad \text{т.е.}$$

(12) $\bar{x}(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+\frac{5}{2}t-\frac{1}{10}\{\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^{t}$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1+C_2.e^{-t}+\frac{t^3}{3}-t^2+\frac{5}{2}t-\frac{1}{10}\{\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^{t}$.

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}-8x^{/}+17x=e^{4t}(t^2-3t\sin t)$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}-8x^{/}+17x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-8\alpha+17=0$,

които са

$\alpha_{1,2}=4\pm i\equiv\lambda\pm i.\mu$.

Понеже корените са комплексни (комплексно-спрегнати), то общо решение на (3) ще има вида

(5) $x_0(t)=e^{\lambda t}[C_1\cos\mu t+C_2\sin\mu t]\equiv e^{4t}[C_1\cos t+C_2\sin t]$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. За ЛНхОДУ с дясна страна от вида

(6) $\quad d(t)=e^{4t}(t^2-3t\sin t)=t^2e^{4t}+(-3t)e^{4t}\sin t\equiv P_2(t)e^{4t}+Q_1(t)e^{4t}\sin t$

се препоръчва търсене на частно решение $\bar{x}(t)$ от вида

(7) $\quad \bar{x}(t)=t^s\bar{P}_2(t).e^{4t}+t^{s^{/}}.e^{4t}\{\bar{Q}_1^{/}(t)\cos t+\bar{Q}_1^{//}(t)\sin t\}$,

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha=4$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s=0}$, понеже корените са ($4\pm i$), а не 4;

☞ $s^{/}$ - кратност на корена $\alpha=4+i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^{/}=1}$;

☞ $\bar{P}_2(t)$, $\bar{Q}_1^{/}(t)$, $\bar{Q}_1^{//}(t)$ - полиноми от втора и първа степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частно решение (7) следва да търсим във вида

(8) $\quad \bar{x}(t)=(at^2+bt+c)e^{4t}+t.e^{4t}\{(mt+n).\cos t+(pt+q).\sin t\}$,

или още

(9) $\quad \bar{x}(t)=\{(at^2+bt+c)+(mt^2+nt).\cos t+(pt^2+qt).\sin t\}.e^{4t}$

където a,b,c,m,n,p,q са 7 константи, подлежащи на определяне.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ ☹:

$$\bar{x}^{/}(t)=\{(2at+b)+(2mt+n).\cos t+(2pt+q).\sin t-(mt^2+nt).\sin t+(pt^2+qt).\cos t\}.e^{4t}+$$
$$+4\{(at^2+bt+c)+(mt^2+nt).\cos t+(pt^2+qt).\sin t\}.e^{4t}=$$
$$=\{4at^2+2(a+2b)t+b+4c\}.e^{4t}+\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\cos t\}.e^{4t}+$$
$$+\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\sin t\}.e^{4t}.$$

$$\bar{x}^{//}(t)=\{8at+2(a+2b)\}.e^{4t}+4\{4at^2+2(a+2b)t+b+4c\}.e^{4t}+$$
$$+\{2[(p+4m)t+(2m+4n+q)]\cos t\}.e^{4t}-\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\sin t\}.e^{4t}+$$
$$+4\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\cos t\}.e^{4t}+\{[(8p-m)t+(2p+4q-n)]\sin t\}.e^{4t}+$$
$$+\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\cos t\}.e^{4t}+4\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\sin t\}.e^{4t}$$

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}-8x^{/}+17x=e^{4t}(t^2-3t\sin t)$, и след съкращаване на e^{4t} и дълги и елементарни, но обемисти изчисления се достига до уравнението

(10) $\quad (at^2+bt+2a+c)+[4pt+2m+2q].\cos t+[-4mt-2n+2p].\sin t=t^2-3t\sin t$.

Нека в (10) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(11[а]) $\quad \underbrace{a}_{1}t^2+\underbrace{b}_{0}t+\underbrace{2a+c}_{0} \quad\Leftrightarrow\quad t^2$,

(11[б]) $\quad [\underbrace{4pt+2m+2q}_{0}].\cos t+[\underbrace{-4mt-2n+2p}_{-3t}].\sin t \quad\Leftrightarrow\quad -3t.\sin t$.

От ($11^{а}$) определяме

($12^{а}$) $a=1$;

($12^{б}$) $b=0$;

($12^{в}$) $2a+c=0, \quad \Rightarrow \quad c=-2a=-2$.

От ($11^{б}$) произтичат нови две уравнения:

($13^{а}$) $\underbrace{4p}_{0}t+\underbrace{2m+2q}_{0}=0.t+0$;

($13^{б}$) $\underbrace{-4m}_{-3}t+(\underbrace{-2n+2p}_{0})=-3t+0$,

от всяко едно от които чрез сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на t произтичат нови равенства:

($14^{а}$) $4p=0, \quad \Rightarrow \quad p=0$;

($14^{б}$) $-4m=-3, \quad \Rightarrow \quad m=3/4$;

($14^{в}$) $2m+2q=0, \quad \Rightarrow \quad q=-m=-3/4$;

($14^{г}$) $-2n+2p=0, \quad \Rightarrow \quad n=p\equiv 0$.

Заместваме така намерените коефициенти в (8) и за частното решение на (1) получаваме

(15) $\bar{x}(t)=(t^2-2)e^{4t}+t.e^{4t}\{\frac{3}{4}t.\cos t-\frac{3}{4}.\sin t\}=\{t^2-2+\frac{3}{4}t^2.\cos t-\frac{3}{4}t.\sin t\}.e^{4t}$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (15) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(16) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=e^{4t}[C_1\cos t+C_2\sin t]+\{t^2-2+\frac{3}{4}t^2.\cos t-\frac{3}{4}t.\sin t\}.e^{4t}=$

$$=\left[t^2-2+\left(\frac{3}{4}t^2+C_1\right).\cos t+\left(C_2-\frac{3}{4}t\right).\sin t\right].e^{4t}.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}-4x^{/}+6x=(t+1)e^{2t}\sin\sqrt{2}\,t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}-4x^{/}+6x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-4\alpha+6=0$,

които са

$\alpha_{1,2}=2\pm i\sqrt{2}$.

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $\quad x_0(t) = e^{2t}(C_1 \cos\sqrt{2}\, t + C_2 \sin\sqrt{2}\, t)$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При това ще приложим една разновидност на метода, описана в теоретичната част, идеята на която се заключава в това вместо даденото уравнение

(6) $\quad x^{//} - 4x^{/} + 6x = d(t)$,

където $d(t) = P_1(t)e^{2t}\sin\sqrt{2}\, t$, да решим едно негово обобщение в комплексната област

(7) $\quad z^{//} - 4z^{/} + 6z = d^{/}(t)$,

където $d^{/}(t) = P_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t} \equiv P_1(t)e^{\alpha t}$, а $\alpha = 2 + \sqrt{2}i$.

Според теорията при такава дясна страна частно решение на (7) следва да се търси във вида

(8) $\quad \bar{z}(t) = t^S P_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t}$,

където s е кратност на корена $2+\sqrt{2}i$ на характеристичното уравнение (4), и в случая тази кратност е $s = 1$.

Накрая, след решаването на (7), следва да обособим реалната и имагинерната части на решението $\bar{z}(t)$

$\bar{z}(t) = \operatorname{Re}\bar{z}(t) + i.\operatorname{Im}\bar{z}(t)$,

а за да получим решението $\bar{x}(t)$ от решението $\bar{z}(t)$, трябва да направим следното:

- ✓ ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Re}\bar{z}(t)$, а
- ✓ ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\sin\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

От всичко казано дотук става ясно, че частно решение на „модифицираното” уравнение (7) следва да търсим във вида

(9) $\quad \bar{z}(t) = t.\overline{P}_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t} = t.(at+b)e^{\alpha t} \equiv (at^2+bt)e^{\alpha t}$,

след което частното решение на (1) да представим във вида

(10) $\quad \bar{x}(t) = \operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

Нека реализираме този план на работа. За решаването на (7) е необходимо най-напред да изразим производните $\bar{z}^{\,/}(t)$ и $\bar{z}^{\,//}(t)$ от (9):

- ☞ $\bar{z}^{/}(t) = (2at+b)e^{\alpha t} + \alpha(at^2+bt)e^{\alpha t} = \{\alpha at^2 + (2a+\alpha b)t + b\}e^{\alpha t}$.
- ☞ $\bar{z}^{//}(t) = \{2\alpha at + (2a+\alpha b)\}e^{\alpha t} + \alpha\{\alpha at^2 + (2a+\alpha b)t + b\}e^{\alpha t} =$
  $= \{\alpha^2 at^2 + (4\alpha a + \alpha^2 b).t + (2a + 2\alpha b\}e^{\alpha t}$.

Заместваме така намерените производни в (7), т.е. в $z^{//} - 4z^{/} + 6z = (t+1)e^{\alpha t}$, като при това (*за компактност на записа*) съдържащата се във всички членове експонента $e^{\alpha t} \neq 0$ „съкращаваме” предварително:

$$\{\alpha^2 at^2 + (4\alpha a + \alpha^2 b).t + (2a + 2\alpha b\} - 4\{\alpha at^2 + (2a+\alpha b)t + b\} + 6(at^2+bt) = (t+1).$$

Дотук все още не сме конкретизирали, че константата $\alpha = 2 + \sqrt{2}\, i$, а нейният квадрат $\alpha^2 = (2+\sqrt{2}\, i)^2 = 4 + 4\sqrt{2}\, i - 2 = 2 + 4\sqrt{2}\, i$. За да отчетем тези неща е удобно най-напред да представим лявата страна на горното уравнение като своеобразен полином по степените на α:

(10) $[at^2+bt]\underbrace{\alpha^2}_{\uparrow}+[-4at^2+4(a-b)t+2b]\underbrace{\alpha}_{\uparrow}+[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]=(t+1)$.

Заместваме α и α^2 в (10) и получаваме

$$[at^2+bt](\underbrace{2+4\sqrt{2}\,i}_{\alpha^2})+[-4at^2+4(a-b)t+2b](\underbrace{2+\sqrt{2}\,i}_{\alpha})+$$
$$+[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]=(t+1), \qquad \text{т.е.}$$

$$[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]+2[at^2+bt]+2[-4at^2+4(a-b)t+2b]+$$
$$+4[at^2+bt]\sqrt{2}\,i+[-4at^2+4(a-b)t+2b]\sqrt{2}\,i=t+1,$$

Рационализираме

$$6at^2+6bt-8at+2a-4b+2at^2+2bt-8at^2+8at-8bt+4b+$$
$$+[4at^2\sqrt{2}+4bt\sqrt{2}-4at^2\sqrt{2}+4at\sqrt{2}-4bt\sqrt{2}+2b\sqrt{2}]\,i=t+1 \ \ldots..$$

…. и съкращаваме, с което получаваме

$$2a+[4at\sqrt{2}+2b\sqrt{2}]\,i=t+1,$$

или още

(11) $(\underbrace{4a\sqrt{2}\,i}_{1})t+(\underbrace{2b\sqrt{2}\,i+2a}_{1})=t+1.$

Нека в (11) сравним коефициентите пред еднаквите степени на t от двете страни на равенството, т.е.

(12[а]) $4a\sqrt{2}\,i=1, \qquad \Rightarrow \qquad a=\dfrac{1}{i4\sqrt{2}}\dfrac{i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}=-\dfrac{i\sqrt{2}}{8};$

(12[б]) $2b\sqrt{2}\,i+2a=1, \qquad \Rightarrow \qquad b=\dfrac{1-2a}{i2\sqrt{2}}=\ldots.=\dfrac{1-i2\sqrt{2}}{8}.$

Заместваме така намерените коефициенти в (9) и за частното решение на (7) получаваме

$$\bar{z}(t)=\left(\frac{i\sqrt{2}}{8}t^2+\frac{1-i2\sqrt{2}}{8}t\right)e^{(2+i\sqrt{2})\,t}=\left(\frac{1}{8}t-\frac{i\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)e^{2\,t}\underbrace{e^{i\sqrt{2}\,t}}_{\textit{Ойлер}}=$$
$$=e^{2\,t}\left(\frac{1}{8}t-\frac{i\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)(\cos\sqrt{2}t+i.\sin\sqrt{2}t)=$$
$$=\underbrace{e^{2\,t}\left(\frac{t}{8}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\sin\sqrt{2}t\right)}_{\operatorname{Re}\bar{z}(t)}+i\underbrace{e^{2\,t}\left(\frac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)}_{\operatorname{Im}\bar{z}(t)}.$$

По силата на идеята на метода трябва да приемем, че уравнение (1), имащо дясна страна, съдържаща $\sin\sqrt{2}t$, следва да има частно решение

(13) $\bar{x}(t)=\operatorname{Im}\bar{z}(t)=\left(\dfrac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)e^{2\,t}.$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (13) в (2) и за общото решение на ЛНхОДУ (1) получаваме

$$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=\left(C_1\cos\sqrt{2}\,t+C_2\sin\sqrt{2}\,t+\frac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)e^{2t}=$$

$$=\left[\left(C_1-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)\cos\sqrt{2}\,t+\left(C_2+\frac{t}{8}\right)\sin\sqrt{2}t\right]e^{2t}.$$

II. Същност на метода на Лагранж за намиране на частни решения на ЛНхОДУ

Нека илюстрираме идеята на метода за ЛНхОДУ от 2-ри ред:

(9.10) $\qquad x^{//}+a(t)x^{/}+b(t)x=d(t)$.

Ще считаме, че съответното на (9.10) хомогенно ОДУ $x^{//}+a(t)x^{/}+b(t)x=0$ има известно (*намерено*) вече общо решение

(9.11) $\qquad x(t)=C_1.x_1(t)+C_2.x_2(t)$,

където $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две линейно-независими частни решения на хомогенното на (9.10) уравнение, а C_1 и C_2 са две **константи**.

Идеята на метода на Лагранж се свежда до това константите C_1 и C_2 в (9.11) да се „заменят" с две диференцируеми функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$, след което **частното решение** на (9.10) да се представи (*т.е.да се търси*) във вида

(9.12) $\qquad \bar{x}(t)=C_1(t).x_1(t)+C_2(t).x_2(t)$.

Стои проблемът **да се определят функциите** $C_1(t)$ и $C_2(t)$. За тяхното намиране са необходими две уравнения (*диференциални или алгебрични*).

Първото от тях се получава от изискването двете функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ да бъдат такива (*т.е. така избрани*), че първата производна $\bar{x}^{/}(t)$ на решението (9.11) да се получи (*т.е. изрази*) така, **сякаш** (*формално*) $C_1(t)$ и $C_2(t)$ са константи. Тъй като

(9.13) $\qquad \bar{x}^{/}(t)=\{C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)\}\quad+\quad C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)$,

то очевидно изпълнението на гореуказаното изискване се свежда до изпълнение на равенството

(9.14) $\qquad C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)=0$,

което е всъщност първото от необходимите ни две уравнения за определянето на $C_1(t)$ и $C_2(t)$. С отчитането на (9.14) уравнение (9.13) добива вида

(9.15) $\qquad \bar{x}^{/}(t)=C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)$.

* *Резултатът от диференцирането наистина е такъв, сякаш* $C_1(t)$ *и* $C_2(t)$ *са константи.*

С помощта на (9.15) се определя и втората производна

(9.16) $\qquad \bar{x}^{//}(t)=C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_1(t).x_1^{//}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)+C_2(t).x_2^{//}(t)$.

След заместване на $\boxed{\bar{x}(t)}$, $\boxed{\bar{x}^{/}(t)}$ и $\boxed{\bar{x}^{//}(t)}$ в (9.10) се получава

$$\{C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_1(t).x_1^{//}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)+C_2(t).x_2^{//}(t)\}+$$

$$+a(t)\{C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)\}+b(t)\{C_1.x_1(t)+C_2.x_2(t)\}=d(t),$$

или още (*след подходящо групиране на събираемите*)

$$C_1(t).[x_1^{//}(t)+a(t).x_1^{/}(t)+b(t)x_1(t)]+C_2(t).[x_2^{//}(t)+a(t).x_2^{/}(t)+b(t)x_2(t)]+$$
$$+[C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)]=d(t).$$

Обаче $\boxed{x_1^{//}(t)+a(t).x_1^{/}(t)+b(t)x_1(t)=0}$ и $\boxed{x_2^{//}(t)+a(t).x_2^{/}(t)+b(t)x_2(t)=0}$, понеже $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две линейно-независими частни **решения на хомогенното** на (9.10) **уравнение**, с отчитането на който факт горното ДУ добива вида

(9.17) $$C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)=d(t).$$

И така двете уравнения (9.14) и (9.17) образуват следната система

(9.18) $$\left|\begin{array}{l} C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)=0 \\ C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)=d(t) \end{array}\right. .$$

След решаване на системата (9.18) се определят $C_1^{/}(t)=f_1(t)$ и $C_2^{/}(t)=f_2(t)$, а след това всяко от получените две ОДУ с разделени променливи се решава, с което се намират самите $C_1(t)$ и $C_2(t)$. След определянето на $C_1(t)$ и $C_2(t)$ се намира и частното решение на ЛНхОДУ (9.10) във вида $\bar{x}(t)=C_1(t).x_1(t)+C_2(t).x_2(t)$.

Обобщението на метода на Лагранж за ЛНхОД уравнения от n-ти ред се извършва по аналогичен начин.

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $$t^2x^{//}-2x=\cos\ln t.$$

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t),$$

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Съответното на (1) хомогенно уравнение е

(3) $$t^2x^{//}-2x=0.$$

Вижда се, че това е линейно хомогенно ДУ от втори ред с непостоянни коефициенти. В теорията на ДУ то се нарича уравнение на Ойлер. То може да бъде сведено до ЛХОДУ с постоянни коефициенти посредством полагането

(4) $t=e^{\xi}$, т.е. $\xi=\ln t$, $dt=e^{\xi}d\xi$, откъдето

(5) $$\frac{d\xi}{dt}=e^{-\xi}.$$

Нека изразим производните $x^{/}$ и $x^{//}$ посредством ξ:

☞ $$x^{/}=\frac{dx}{dt}=\underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_{x^{/}(\xi)}\underbrace{\frac{d\xi}{dt}}_{e^{-\xi}}=x^{/}(\xi)e^{-\xi};$$

☞ $x^{//} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d}{\underbrace{(e^{\xi}d\xi)}_{dt}}[x^{/}(\xi)e^{-\xi}] = e^{-\xi}\dfrac{d}{d\xi}[x^{/}(\xi)e^{-\xi}] = e^{-\xi}[x^{//}(\xi)e^{-\xi} + x^{/}(\xi)\dfrac{de^{-\xi}}{d\xi}] =$

$= e^{-\xi}[x^{//}(\xi)e^{-\xi} - x^{/}(\xi)e^{-\xi}] = e^{-2\xi}[x^{//}(\xi) - x^{/}(\xi)].$

Заместваме x и $x^{//}$ в (3), отчитайки че $t^2 = (e^{\xi})^2 = e^{2\xi}$, и получаваме уравнението

(6) $\quad (\underbrace{e^{2\xi}}_{t^2})e^{-2\xi}[x^{//}(\xi) - x^{/}(\xi)] - 2x(\xi) = 0$, или още

(7) $\quad x^{//}(\xi) - x^{/}(\xi) - 2x(\xi) = 0$.

Характеристичното уравнение

(8) $\quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

има корени $\alpha_{1,2} = -1, 2$ и следователно общото решение на хомогенното уравнение (7) ще бъде

(9) $\quad x_0(\xi) = C_1 e^{\alpha_1 \xi} + C_2 e^{\alpha_2 \xi} = C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{2\xi}$.

Ако се върнем на полагането (4) и възстановим „старата” променлива t, използвайки че $\xi = \ln t$, ще получим

(10) $\quad x_0(t) = C_1 e^{-\ln t} + C_2 e^{2\ln t} = C_1 e^{\ln t^{-1}} + C_2 e^{\ln t^2} = C_1 t^{-1} + C_2 t^2$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на Лагранж. Индикация за това е факта, че (1) е ДУ е с непостоянни коефициенти. По метода на вариране на коефициентите частно решение на (1) ще търсим във вида

(11) $\quad \bar{x}(t) = C_1(t).t^{-1} + C_2(t).t^2$,

където $C_1(t)$ и $C_2(t)$ са две подлежащи на определяне функции.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$:

☞ $\quad \bar{x}^{/}(t) = C_1^{/}(t).t^{-1} - C_1(t).t^{-2} + C_2^{/}(t).t^2 + 2C_2(t).t =$

$= \{-C_1(t).t^{-2} + 2C_2(t).t\} + \underbrace{\{C_1^{/}(t).t^{-1} + C_2^{/}(t).t^2\}}_{полагаме\, = 0}$.

Ако положим

(12) $\quad \boxed{C_1^{/}(t).t^{-1} + C_2^{/}(t).t^2 = 0}$, то

(13) $\quad x^{/}(t) = -C_1(t).t^{-2} + 2C_2(t).t$.

☞ $\quad \bar{x}^{//}(t) = -C_1^{/}(t).t^{-2} - (-2)C_1(t).t^{-3} + 2C_2^{/}(t).t + 2C_2(t)$, т.е.

(14) $\quad \bar{x}^{//}(t) = -C_1^{/}(t).t^{-2} + 2C_1(t).t^{-3} + 2C_2^{/}(t).t + 2C_2(t)$.

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $\boxed{t^2 x^{//} - 2x = \cos\ln\, t}$ и получаваме

$$t^2\{-C_1^{/}(t).t^{-2} + 2C_1(t).t^{-3} + 2C_2^{/}(t).t + 2C_2(t)\} - 2\{C_1(t).t^{-1} + C_2(t).t^2\} = \cos\ln\, t,$$

или още

$$-C_1^{/}(t) + 2C_1(t).t^{-1} + 2C_2^{/}(t).t^3 + 2C_2(t)t^2 - 2C_1(t).t^{-1} - 2C_2(t).t^2 = \cos\ln\, t,$$

откъдето след съкращения получаваме

(15) $\boxed{-C_1^{/}(t)+2C_2^{/}(t).t^3=\cos\ln\ t}$.

Комбинираме двете равенства (*диференциални уравнения*) (12) и (15) за неизвестните функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в система

(16) $\left|\begin{array}{l} C_1^{/}(t).t^{-1}+C_2^{/}(t).t^2=0 \\ -C_1^{/}(t)+2C_2^{/}(t).t^3=\cos\ln\ t \end{array}\right.$.

Решаваме тази нехомогенна система относно $C_1^{/}(t)$ и $C_2^{/}(t)$ с помощта на формулите на Крамер. За целта най-напред определяме детерминантите:

☞ $\Delta(t)=\begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -1 & 2t^3 \end{vmatrix}=2t^3t^{-1}-t^2(-1)=2t^2+t^2=3t^2\neq 0$;

☞ $\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ \cos\ln t & 2t^3 \end{vmatrix}=t^2\cos\ln t$;

☞ $\Delta_2(t)=\begin{vmatrix} t^{-1} & 0 \\ -1 & \cos\ln t \end{vmatrix}=-t^{-1}\cos\ln t=-\dfrac{\cos\ln t}{t}$.

Тогава решенията на (16) са

(17[а]) $C_1^{/}(t)=\dfrac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}=\dfrac{t^2\cos\ln t}{3t^2}=\dfrac{\cos\ln t}{3}$;

(17[б]) $C_2^{/}(t)=\dfrac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}=-\dfrac{\cos\ln t}{t}\,\dfrac{1}{3t^2}=-\dfrac{\cos\ln t}{3t^3}$.

За да определим функциите $C_1(t)$ и $C_2(t)$ остава да решим следните ОДУ с РП:

(18[а]) $dC_1(t)=\dfrac{\cos\ln t}{3}dt$, и

(18[б]) $dC_2(t)=-\dfrac{\cos\ln t}{3t^3}dt$.

Интегрираме (18[а]), като интеграционната константа в този неопределен интеграл приемаме да е равна на нула:

(19[а]) $C_1(t)=\dfrac{1}{3}\underbrace{\int\cos\ln t\,dt}_{I_1}$.

Решаваме интеграла I_1, полагайки $x=\ln t$, т.е. $t=e^x$, $dt=e^x dx$,

$I_1=\int\cos x\,e^x dx\equiv\int\cos x\,d(e^x)=$ … по части … $=\cos x\,e^x-$

$-\int e^x\,d(\cos x)=\cos x\,e^x+\int\sin\ x\,e^x dx=\cos x\,e^x+\int\sin\ x\,d(e^x)=$ … по части …

$\cos x\,e^x+\sin\ x\,e^x-\int e^x\,d(\sin\ x)=(\cos x+\sin\ x)\,e^x-\underbrace{\int\cos x\,e^x dx}_{I_1}$.

И така получихме $I_1=(\cos x+\sin\ x)\,e^x-I_1$, т.е. $2I_1=(\cos x+\sin\ x)\,e^x$, откъдето

$I_1=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin\ x)\,e^x$.

След заместване на така намерената стойност на интеграла I_1 в (19[а]) получаваме

(20[а]) $C_1(t)=\frac{1}{3}I_1=\frac{1}{6}(\cos x+\sin\, x)\, e^x$.

А с отчитане на полагането $x=\ln t$ получаваме

(21[а]) $C_1(t)=\frac{1}{6}(\cos \ln t.+\sin\, \ln t)\, e^{\ln t}\equiv\frac{t}{6}(\cos \ln t.+\sin\, \ln t)$.

Интегрираме и (18[б]), като отново интеграционната константа в този интеграл приемаме равна на нула:

(19[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{\cos \ln t}{t^3}dt}_{I_2}$.

И този интеграл I_2 решаваме, полагайки $x=\ln t$, т.е. $t=e^x$, $dt=e^x dx$,

$$I_2=\int\frac{\cos \ln t}{t^3}dt=\int\frac{\cos x}{e^{3x}}(e^x dx)=\int\cos x\, e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\underbrace{\int\cos x\, d(e^{-2x})}_{\textit{по части}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\, d(\cos x)=-\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x}-\frac{1}{2}\int e^{-2x}\sin x\, dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\sin x\, d(e^{-2x})=\quad\dots\quad \text{по части}\quad\dots\quad=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x}+\frac{1}{4}\sin\, x\, e^{-2x}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}\, d(\sin x)=\frac{1}{4}\sin\, x\, e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x\, e^{-2x}-$$

$$-\frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-2x}\, \cos x\, dx}_{I_2}=\frac{1}{4}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x}-\frac{1}{4}I_2 .$$

И така получихме

$$I_2=\frac{1}{4}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x}-\frac{1}{4}I_2,\quad \text{т.е.}\quad \frac{5}{4}I_2=\frac{1}{4}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x},$$

откъдето

$$I_2=\frac{1}{5}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x}.$$

След заместване на така намерената стойност на интеграла I_2 в (19[б]) получаваме

(20[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{3}I_2=-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x}=-\frac{1}{15}(\sin\, x-2\cos x)\, e^{-2x}$.

С отчитане на полагането $x=\ln t$ получаваме

(21[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{15}(\sin \ln t-2\cos \ln t)\, e^{-2\ln t}\equiv-\frac{1}{15t^2}(\sin \ln t-2\cos \ln t)$.

След намирането на функциите $C_1(t)$ и $C_2(t)$ частното решение (11) добива вида

$$\bar{x}(t)=C_1(t).t^{-1}+C_2(t).t^2=\frac{t}{6}(\cos \ln t.+\sin\, \ln t).t^{-1}-\frac{1}{15t^2}(\sin \ln t-2\cos \ln t).t^2=$$

$$=\frac{1}{6}(\cos \ln t.+\sin \ln t)-\frac{1}{15}(\sin \ln t-2\cos \ln t)=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)\cos \ln t+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}\right)\sin \ln t=$$

$$=\frac{3}{10}\cos \ln t+\frac{1}{10}\sin \ln t=\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$$, т.е.

(22) $\bar{x}(t)=\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (10) и $\bar{x}(t)$ от (22) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(16) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1t^{-1}+C_2t^2+\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$

Тема: Системи от ОДУ от първи ред. Системи от ОДУ от ред, по-висок от първи

Теоретичен минимум

10. Системи от ОДУ от първи ред

Общ (*нормален*) вид на система от две уравнения от първи ред за две неизвестни функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$:

(10.1) $$\frac{dt}{P(t,x,y)}=\frac{dx}{Q(t,x,y)}=\frac{dy}{R(t,x,y)}.$$

За получаване на интегруеми комбинации могат с успех да се използват напр. някое от следните свойства на пропорциите:

(10.2) ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha.c}{b+\alpha.d}$, и

(10.3) ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, то $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha.c+\beta.e}{b+\alpha.d+\beta.f}$,

където α или α,β - произволни константи.

11. Системи от ОДУ от ред, по-висок от първи

В подобни задачи намирането на интегруеми комбинации (*първи интеграли*) в някои случаи се улеснява значително, **ако** се окаже възможно двете страни на едно (*или повече*) от уравненията да се представят като пълен диференциал от някакви функции, което би позволило това (*тези*) уравнение(я) да се интегрира(т). С така намерените решения (*частни интеграли*) се замества в неинтегрираните (*до момента*) уравнения с цел тяхното „опростяване” и окончателно решаване.

✸ **Задача** (Стр. 18/ Зад. 243) Да се интегрира системата

(1) $$\frac{dt}{x+y}=\frac{dx}{t+y}=\frac{dy}{t+x}.$$

Решение: за получаване на интегруеми комбинации ще използваме свойството на пропорциите, изразено чрез формула (10.2) от теоретичната част.

Това свойство ще приложим двукратно, за да преобразуваме поотделно двете съотношения

$$(2^{а})\quad \frac{dt}{x+y}=\frac{dx}{t+y}\qquad \text{и}\qquad (2^{б})\quad \frac{dt}{x+y}=\frac{dy}{t+x}.$$

И за двата случая избираме константата α да бъде $\alpha=-1$. Така получаваме

$$(3^{а})\quad \frac{dt}{x+y}=\frac{dt-dx}{(x+y)-(t+y)}=\frac{d(t-x)}{(x-t)}=-\frac{d(x-t)}{(x-t)},\quad \text{и}$$

$$(3^{б})\quad \frac{dt}{x+y}=\frac{dt-dy}{(x+y)-(t+x)}=\frac{d(t-y)}{(y-t)}=-\frac{d(y-t)}{(y-t)}.$$

Понеже левите страни на уравнения ($3^{а}$) и ($3^{б}$) са идентични, то десните им страни трябва да са равни, откъдето получаваме

$$(4)\quad \frac{d(x-t)}{(x-t)}=\frac{d(y-t)}{(y-t)}.$$

Интегрирането на (4) ни дава пръв интеграл на системата

$$(5)\quad \ln\,(x-t)=\ln\,(y-t)+\ln C_1,$$

откъдето след антилогаритмуване следва

$$(6)\quad (x-t)=C_1(y-t).$$

Още един пръв интеграл може да бъде намерен, ако приложим спрямо нормалното уравнение на системата (1) свойството на пропорциите, изразено чрез формула (10.3) от теоретичната част за случая $\alpha=\beta=1$:

$$(7)\quad \frac{dt}{x+y}=\frac{dx}{t+y}=\frac{dy}{t+x}\qquad\Rightarrow\qquad \frac{dt}{x+y}=\frac{dt+dx+dy}{(x+y)+(t+y)+(t+x)}=$$

$$=\frac{d(t+x+y)}{2(t+x+y)}=\frac{1}{2}\frac{d(t+x+y)}{t+x+y}.$$

Нека приравним дясната страна на (7) с дясната страна на някое от получените по-горе равенства ($3^{а}$) или ($3^{б}$), и напр. нека да е ($3^{а}$):

$$(8)\quad \frac{1}{2}\frac{d(t+x+y)}{t+x+y}=-\frac{d(x-t)}{(x-t)}\qquad \Big|\,.2$$

След интегриране получаваме

$$(9)\quad \ln(x+y+t)=-2\ln|x-t|+\ln C_2,\qquad \text{т.е.}$$

$$(10)\quad (x+y+t)=\frac{C_2}{|x-t|^2},$$

или още

$$(11)\quad (x+y+t)(x-t)^2=C_2.$$

Намерените два първи интеграла (6) и (11) са независими. Общият интеграл е:

$$(12)\quad \left|\begin{array}{l}(x-t)=C_1(y-t)\\ (x+y+t)(x-t)^2=C_2\end{array}\right..$$

✸ **Задача** (Стр. 18/ Зад. 247) Да се интегрира системата

(1) $\quad x^{/}=\dfrac{t}{y}, \qquad y^{/}=-\dfrac{t}{x}.$

Решение: двете уравнения на системата могат да бъдат представени още във вида

(2[а]) $\quad y.dx=t.dt$ и (2[б]) $\quad -x.dy=t.dt.$

От сравняването на левите страни на тези две уравнения получаваме

(3) $\quad y.dx=-x.dy,$ или още

(4) $\quad \dfrac{dx}{x}=-\dfrac{dy}{y},$

интегрирането на което дава

(5) $\quad \ln x=-\ln y+\ln C_1,$

откъдето след антилогаритмуване получаваме следния пръв интеграл на системата

(6) $\quad x=\dfrac{C_1}{y}.$

Търсим още един първи интеграл. За неговото получаване използваме (2[а]), в което заместваме функцията y от (6)

(7) $\quad y.dx=t.dt \quad \Rightarrow \quad \dfrac{C_1}{x}.dx=t.dt.$

Интегрираме това УРП:

(8) $\quad C_1\ln x=\dfrac{t^2}{2}+C_2^{/},$ или още

(9) $$\ln x=\frac{t^2}{2C_1}+\frac{C_2^{/}}{C_1}\equiv \ln e^{\frac{t^2}{2C_1}}+\ln \underbrace{e^{\frac{C_2^{/}}{C_1}}}_{озн.\,C_2}.$$

Така след антилогаритмуване получаваме

(10) $$x=C_2.\exp\left(\frac{t^2}{2C_1}\right).$$

Тогава от (6) и (10) следва още

(11) $$y=\frac{C_1}{x}=\frac{C_1}{C_2}.\exp\left(-\frac{t^2}{2C_1}\right).$$

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 308) Да се интегрира системата

(1) $$\left|\begin{array}{l} x^{/}+y^{//}=xy \\ x^{//}=x^{/}y+xy^{/} \end{array}\right..$$

Решение: лесно се забелязва, че системата може да бъде записана още във вида

(2) $$\left|\begin{array}{l} x^{/}+y^{//}=xy \\ x^{//}=\dfrac{d(xy)}{dt} \end{array}\right..$$

Ако заместим xy от първото уравнение в дясната страна на второто, ще имаме

(3) $$x^{//} = \frac{d(xy)}{dt} = \frac{d}{dt}(x^{/} + y^{//}) = x^{//} + y^{///}.$$

След съкращаване на $x^{//}$ в двете страни на горното равенство получаваме

(4) $$y^{///} = 0, \Rightarrow y^{//} = C_1^{/}, \Rightarrow y^{/} = C_1^{/}.t + C_2, \Rightarrow y = \frac{C_1^{/}}{2}.t^2 + C_2.t + C_3.$$

Ако (*за естетика на записа* ☺) положим $C_1 = 2C_1^{/}$, то решението на системата (1) за неизвестната функция $y(t)$ добива вида

(5) $$\boxed{y = C_1.t^2 + C_2.t + C_3}.$$

За да определим и другата функция $x(t)$, използваме че $y(t)$ и $y^{//} = C_1^{/} \equiv 2C_1$ са вече известни, следователно от първото уравнение на системата (1) ще имаме

(6) $$x^{/} = xy - y^{//} = x.(C_1.t^2 + C_2.t + C_3) - 2C_1.$$

Очевидно това е линейно ОДУ от първи ред

(7) $$\frac{dx}{dt} = \underbrace{(C_1.t^2 + C_2.t + C_3)}_{A(t)}.x + \underbrace{(-2C_1)}_{B(t)},$$

общото решение на което се дава с израза

(8) $$x(t, C_4) = e^{\int A(t)\,dt}\left\{ \int B(t).e^{-\int A(t)\,dt} dt + C_4 \right\},$$

решаването на интегралите в който не представлява никакъв проблем, но е твърде обемисто, и затова ще бъде „спестено” и оставено за любознателния читател ☺.

*Забележка: интеграционните константи, чрез които се изразяват решенията (5) и (8) на системата (1) са 4 на брой, защото уравненията са две и неизвестните функции участват в тях с производните си до втори ред включително.

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 309) Да се интегрира системата

(1) $$\left| \begin{array}{l} xy^{/} = y \\ y^{//}(1-x) = x^{/}y^{/} \end{array} \right. .$$

Решение: нека диференцираме първото уравнение на системата. Така тя добива вида

(2) $$\left| \begin{array}{l} x^{/}y^{/} + xy^{//} = y^{/} \\ y^{//} - xy^{//} = x^{/}y^{/} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y^{/} - xy^{//} = x^{/}y^{/} \\ y^{//} - xy^{//} = x^{/}y^{/} \end{array} \right. .$$

При равни десни страни приравняваме левите страни на двете уравнения, от което следва

(3) $$y^{//} = y^{/}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy^{/}}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \text{или още} \quad dy^{/} = dy,$$

интегрирането на което дава

(4) $$y^{/} = y + C_1^{/}.$$

Това УРП може да бъде интегрирано отново

(5) $$\frac{dy}{y+C_1^{/}}=dt,$$

решаването на което дава

(6) $$\ln(y+C_1^{/})=t+\ln C_2 \equiv \ln e^t+\ln C_2=\ln(C_2e^t),$$

след антилогаритмуването на което получаваме

(7) $$y+C_1^{/}=C_2e^t,$$ или още

(8) $$\boxed{y=C_1+C_2e^t},$$

където $C_1=-C_1^{/}$.

За да изразим в явен вид и другата неизвестна функция $x(t)$, явяваща се решение на системата, използваме първото уравнение от нея, а y и $y^{/}$ изразяваме от (8) и (4) съответно, и по-конкретно $y^{/}=y+C_1^{/}=y-C_1$. Така получаваме

$$x(t)=\frac{y}{y^{/}}=\frac{y}{y-C_1}=\frac{C_1+C_2e^t}{C_1+C_2e^t-C_1}=\frac{C_1+C_2e^t}{C_2e^t}=\frac{C_1}{C_2}e^{-t}+1, \text{ т.е.}$$

(9) $$\boxed{x(t)=\frac{C_1}{C_2}e^{-t}+1}.$$

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 310) Да се интегрира системата

(1) $$\left| \begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+xx^{/}y^{/}=x \end{array} \right. .$$

Решение: нека към двете страни на второто уравнение прибавим $xx^{/}y^{/}$, с което системата добива вида

(2) $$\left| \begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=x+xx^{/}y^{/} \end{array} \right. ,$$

а ако в дясната страна на второто уравнение в (2) заместим $xy^{/}\to t$ съгласно първото уравнение, получаваме

(3) $$\left| \begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=x+t.x^{/} \end{array} \right. .$$

Вече не е трудно да се забележи, че след тези „модификации” двете страни на второто уравнение се представят чрез пълни диференциали. Действително:

☞ $$y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=\frac{d}{dt}[y^{/}(x^2-1)],$$ и

☞ $$x+t.x^{/}=\frac{d}{dt}(t.x).$$

Така второто уравнение може да бъде записано във вида

(4) $$d[y^{/}(x^2-1)]=d(t.x),$$

интегрирането на което дава

(5) $$y^{/}(x^2-1)=t.x+C_1^{/}.$$

Преди да интегрираме (5) още веднъж, нека отбележим, че тъй като според първото уравнение на системата $t = xy'$, то замествайки в (5) ще имаме

(6) $\quad y'(x^2-1) = (xy').x + C_1'$, т.е. $\quad y'x^2 - y' = x^2y' + C_1'$, откъдето

(7) $\quad y' = -C_1'$, или още $\boxed{y' = C_1}$, където $C_1 = -C_1'$.

Сега интегрирането на (5), респективно (7), е елементарно

(8) $\quad y = C_1.t + C_2$.

За намирането на другата неизвестна функция $x(t)$ използваме първото уравнение на (1) и представянето (7) за y':

(9) $\quad x(t) = \dfrac{t}{y'} = \dfrac{t}{C_1}$, т.е. $\boxed{C_1.x = t}$ - втори „пръв” интеграл на системата (1).

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 311) Да се интегрира системата

(1) $\quad \left| \begin{array}{l} yy'' = x'' - y'^2 \\ y'' = x'' + 2t \end{array} \right.$.

Решение: лесно се вижда, че второто уравнение на системата, записано във вида $y'' - x'' = 2t$, може да бъде представено като интегруема комбинация (*пълен диференциал*)

(2) $\quad \dfrac{d}{dt}(y' - x') = \dfrac{d}{dt}(t^2)$,

откъдето

(3) $\quad d(y' - x') = d(t^2)$,

интегрирането на което дава

(4) $\quad y' - x' = t^2 + C_1$.

Ако представим (4) във вида

(5) $\quad \dfrac{d}{dt}(y - x) = t^2 + C_1$

и го интегрираме като своеобразно УРП относно неизвестна функция $(y - x)$, получаваме

(6) $\quad y - x = \dfrac{t^3}{3} + C_1.t + C_2$,

откъдето получаваме следния пръв интеграл на системата

(7) $\quad \boxed{y = x + \dfrac{t^3}{3} + C_1.t + C_2}$.

За да получим още един пръв интеграл, използваме неизползваното досега първо уравнение на системата което, записано във вида

(8) $\quad yy'' + y'^2 = x''$

представлява също интегруема комбинация, понеже може да се представи във вида

(9) $\quad \dfrac{d}{dt}(yy^{/})=\dfrac{d}{dt}(x^{/}),\qquad$ т.е. $\quad d(yy^{/})=d(x^{/}),$

интегрирането на което дава

(10) $\quad x^{/}=yy^{/}+C_3,\qquad$ т.е. $\quad \dfrac{dx}{dt}=y\dfrac{dy}{dt}+C_3 \qquad \Big|.dt$

(11) $\quad dx=ydy+C_3dt \qquad \Big|\int$

откъдето

(12) $\quad \boxed{x=\dfrac{y^2}{2}+C_3t+C_4}.$

Очевидно (12) представлява втория „пръв” интеграл на системата (1).

Тема: ОДУ от ред, по-висок от първи

Теоретичен минимум

12. ОДУ от ред, по-висок от първи

Общ вид:

(12.1) $\quad F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=0,$

„Нормален” вид:

(12.2) $\quad x^{(n)}=f(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n-1)}).$

За ОДУ от по-висок от първи ред е в сила следното твърдение

Т: Всяко ОДУ от n-ти ред, **<u>представимо в нормален вид</u>**, може да бъде сведено към еквивалентна на него система от n на брой ОДУ от първи ред (*представими също в нормален вид*).

Илюстриране на подобна възможност: въвеждаме n на брой функции $x_i(t)$ с полаганията $x_1\equiv x(t)$, $x_2\equiv x^{(1)}(t)$, ... $,x_n\equiv x^{(n-1)}(t)$. Тогава следва представянето (системата)

(12.3) $$\left|\begin{array}{l} x_1^{/}=x_2 \\ x_2^{/}=x_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^{/}=x_n \\ x_n^{/}=F(t,x,x_1,x_2,....,x_n) \end{array}\right.,$$

с което илюстрирахме точно това, което се твърди в **Т**.

По-интересни частни случаи на ОДУ от ред, по-висок от първи

12.1 Уравнение от вида $\boxed{x^{(n)}=f(t)}$, т.е. в дясната му страна не присъстват неизвестната функция $x(t)$ и нейните производни. Очевидно това е УРП и то се решава посредством n последователни „директни” квадратури (*интегрирания*).

12.2 Уравнение от вида

(12.2.1) $\quad F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},....,x^{(n)})=0$ за $0<k<n$,

т.е. в дясната страна липсват производните на функцията $x(t)$ до ред $(k-1)$-ви вкл. Редът на такова ДУ се понижава с „k” единици посредством полагането $u(t) = x^{(k)}(t)$, откъдето следват: $x^{(k+1)}(t) = u^{(1)}(t)$, ….. , $x^{(n)}(t) = u^{(n-k)}(t)$. След заместването на тези производни в изходното ДУ, то се „превръща” в уравнение от $(n-k)$-ти ред относно новата функция $u(t)$

$$F(t,u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-k)}) = 0 \text{ за } 0 < k < n.$$

Намира се (*ако това е възможно*) неговото общо решение $u(t) = u(t,C_1,C_2,..C_{n-k})$, и след връщане към полагането $u(t) = x^{(k)}(t)$ се получава ДУ от k-ти ред

$$x^{(k)}(t) = u(t,C_1,C_2,..C_{n-k}),$$

което продължава да се решава (*чрез* k*-квадратури*) като уравнение от първия тип.

12.3 Уравнение от вида

$\boxed{F(x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)}) = 0}$, т.е. **липсва аргументът** t.

Редът на такова уравнение се понижава с единица, ако се въведе нова неизвестна функция с **аргумент** x чрез полагането $u(x) = x^{/}$. Определят се последователно производните:

- ☞ $x^{(1)} = u(x)$;
- ☞ $x^{(2)}(t) = u^{/}u$;
- ☞ $x^{(3)}(t) = u^2u^{//} + (u^{/})^2u$;

  …………………………
- ☞ $x^{(n)}(t) = g(u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-1)})$.

След заместване на всички производни в изходното ДУ същото се трансформира в уравнение от ред $(n-1)$-ви относно „новата” функция $u(x)$: $F(x,u,u^{(1)},....,u^{(n-1)}) = 0$. Ако то може да бъде решено, и неговото общо решение е $u\,(x) = u\,(x,C_1,C_2,..C_{n-1})$, то след „връщане” към полагането $u(x) = x^{/}$ се получава ДУ с разделени променливи $x^{/} = u\,(x,C_1,C_2,..C_{n-1})$, след интегрирането на което получаваме окончателно крайното решение: $x\,(t) = x\,(t,C_1,C_2,..C_{n-1},C_n^*)$.

12.4 Уравнения от вида

$F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)}) = 0$, където $F = F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})$ е **хомогенна функция** от **степен** k относно променливите си $x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)}$, т.е. функция, за която $F(t,\alpha x,\alpha x^{(1)},\alpha x^{(2)},....,\alpha x^{(n)}) = \alpha^k F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})$.

Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането $\boxed{x^{/}(t) = x(t).u(t)}$. Всички производни от ред n-ти $(n = 0,1,2,...)$ се изразяват (*без изключение*) във вида $x^{(n)} = x.g_n(u,u^{(1)},.....u^{(n-1)})$ и след заместването им се оказва, че при $x \neq 0$ функцията $u(t)$ също удовлетворява ДУ от вида $F(t,u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-1)}) = 0$, което е ДУ от $(n-1)$-ви ред. Ако неговото решение е $u(t) = u(t, C_1, C_2, \ldots C_{n-1})$, то от полагането $x'(t) = x(t).u(t)$ се получава ДУ с разделени променливи за определянето на $x(t)$

$$\frac{dx}{x} = u(t, C_1, C_2, \ldots C_{n-1})\, dt\,,$$

което се интегрира елементарно

$$\ln x(t) = \int u(t, C_1, C_2, \ldots C_{n-1})\, dt + \ln C_n^*, \text{ т.е. } x(t) = C_n^*.\, e^{\int u(t, C_1, C_2, \ldots C_{n-1})\, dt}.$$

12.5 Уравнения от вида

$F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, където функцията F може да се представи като **пълна производна** по t от някаква друга функция, т.е.

$$\boxed{F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = \frac{d}{dt}\Phi(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})}.$$

В такъв случай уравнението се свежда до $\dfrac{d}{dt}\Phi(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) = 0$, откъдето следва, че функцията $\Phi(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) = C$ е пръв интеграл на изходното уравнение.

✸ **Задача** (Стр. 20/ Зад. 272) Да се интегрира уравнението

(1) $\quad 8x'' + 9x'^4 = 0$

Решение: очевидно уравнението е от вида (12.3), т.е. **липсва аргументът** t. Както е известно редът на такова уравнение се понижава с единица, ако се въведе нова неизвестна функция с аргумент x чрез полагането $u(x) = x'$. Определяме последователно производните:

(2) $\quad x^{(1)} = u(x)$, и $\quad x^{(2)}(t) = u'u$.

Заместваме производните в (1)

(3) $\quad 8uu' + 9u^4 = 0$, т.е.

(4) $\quad u(8u' + 9u^3) = 0$,

откъдето произтичат две уравнения (възможности):

А) $u = 0$, т.е. $x' = 0$, $\Rightarrow$ (5) $x(t) = C$.

Б) $8u' + 9u^3 = 0$, т.е. $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{9}{8}u^3$,

(5) $\quad u^{-3}du = -\dfrac{9}{8}dx \quad \Big| \int$

(6) $\quad -\dfrac{1}{2}u^{-2} = -\dfrac{9}{8}x + C_1' \quad \Big| .(-2)$

$$\frac{1}{u^2} = \frac{9}{4}x + C_1'';$$

(7) $\quad u = \left(\dfrac{9}{4}x + C_1''\right)^{-\frac{1}{2}}$, т.е. $\dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{9}{4}x + C_1''\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\left(\frac{9}{4}x+C_1^{//}\right)^{\frac{1}{2}}dx=dt;$$

$$\frac{3}{2}\left(x+\underbrace{\frac{4}{9}C_1^{//}}_{C_1}\right)^{\frac{1}{2}}dx=dt,\quad \text{т.е.}\quad (x+C_1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}dt\ \Big|\int$$

$$\frac{1}{(1/2+1)}(x+C_1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}t+C_2^{/};$$

$$\frac{2}{3}(x+C_1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}t+C_2^{/}\qquad\Big|\cdot\frac{3}{2}$$

$$(x+C_1)^{\frac{3}{2}}=t+C_2,$$

откъдето след повдигане в степен $2/3$ получаваме

(8) $\boxed{x=(t+C_2)^{\frac{2}{3}}-C_1}$.

✸ **Задача** Да се интегрира уравнението

(1) $2t\,x^{/}x^{//}=2x^{/\,2}+t^3$.

Решение: очевидно уравнението е от вида

(2) $F(t,x^{/},x^{//})=0$,

т.е. липсва неизвестната функция $x(t)$. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством полагането

(3) $x^{/}(t)=u(t)$,

откъдето изразяваме $x^{//}=u^{/}$, и след заместване в (1) получаваме ДУ от първи ред относно $u(t)$

(4) $2t\,u\,u^{/}=2u^2+t^3$.

Ако представим ДУ (4) в нормален вид

(5) $u^{/}=\underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{A(t)}u+\underbrace{\left(\frac{t^2}{2}\right)}_{B(t)}u^{-1}$

се вижда, че то е уравнение на Бернули с $n=-1$. За неговото решаване правим стандартното полагане

(6) $y=u^{1-n}=u^{1-(-1)}\equiv u^2$.

С това полагане уравнението се трансформира в линейното уравнение

(7) $y^{/}=\underbrace{(1-n)A(t)}_{A^*(t)}y+\underbrace{(1-n)B(t)}_{B^*(t)}\equiv\left(\frac{2}{t}\right)y+t^2$,

решението на което е

(8) $$y(t,C_1)=e^{\int A^*(t)dt}\left(\int B^*(t)e^{-\int A^*(t)dt}dt+C_1\right)=$$

$$=e^{2\int\frac{dt}{t}}\left(\int t^2 e^{-2\int\frac{dt}{t}}dt+C_1\right)=e^{2\ln t}\left(\int t^2 e^{-2\ln t}dt+C_1\right)=$$

$$=t^2(\int t^2 t^{-2}dt+C_1)=t^2(t+C_1).$$

Ако вземем под внимание полагането (6), т.е. $u=\sqrt{y}$, получаваме

(9) $$u(t,C_1)=t\sqrt{t+C_1}.$$

Остана да отчетем в (9) и полагането (3), с което достигаме до следното ДУ

(10) $$x'=t\sqrt{t+C_1}, \qquad \text{т.е.} \qquad dx=t\sqrt{t+C_1}\,dt.$$

За да го интегрираме, правим ново полагане

(11) $$t+C_1=z^2, \text{ т.е. } \quad t=z^2-C_1 \quad \text{и} \quad dt=2z\,dz,$$

с което (10) добива вида

(12) $$dx=(z^2-C_1).z.2z\,dz=2(z^4-C_1z^2)dz,$$

от интегрирането на което получаваме

(13) $$x(t,C_1,C_2)=2\frac{z^5}{5}-2C_1\frac{z^3}{3}+C_2=\frac{2}{5}(t+C_1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}C_1(t+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

✸ **Задача** (Стр. 20/ Зад. 275) Да се интегрира уравнението

(1) $$t.x^{(4)}+5x^{(3)}-120=0$$

Решение: очевидно уравнението е от вида (12.2)

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},....,x^{(n)})=0 \text{ за } 0<k<n,$$

т.е. в лявата страна липсват производните на функцията $x(t)$ до ред ($k-1$)-ви вкл. Редът на такова ДУ се понижава с „k” единици посредством полагането $u(t)=x^{(k)}(t)$, откъдето следват: $x^{(k+1)}(t)=u^{(1)}(t)$, ….. , $x^{(n)}(t)=u^{(n-k)}(t)$. В нашия случай $k=3$, $n=4$, а полагането е

(2) $$u(t)=x^{(3)}(t).$$

Очевидно

(3) $$x^{(4)}=\frac{d}{dt}[x^{(4)}]\equiv u'(t).$$

Така уравнението (1) добива вида

(4) $$t.u'+5u-120=0 \qquad \Big|:t, \quad t\neq 0$$

(5) $$u'=\underbrace{\left(-\frac{5}{t}\right)}_{A(t)}u+\underbrace{\left(\frac{120}{t}\right)}_{B(t)}=0.$$

Получихме линейно ОДУ от първи ред, и неговото общо решение е

(6) $$u(t,C_1)=e^{\int\left(-\frac{5}{t}\right)dt}\left(\int\frac{120}{t}e^{-\int\left(-\frac{5}{t}\right)dt}dt+C_1\right)=$$

$$=e^{-5\ln t}\left\{\int\frac{120}{t}e^{5\ln t}dt+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}\left\{\int\frac{120}{t}t^5dt+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}\left\{120\int t^4dt+C_1\right\}=$$

$$=\frac{1}{t^5}\left\{120\frac{1}{5}t^5+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}(24t^5+C_1).$$ И така

(7) $\quad u(t,C_1)=\dfrac{C_1}{t^5}+24.$

Ако вземем под внимание полагането (2), от (7) получаваме следното ОДУ с РП

(8) $\quad x^{(3)}(t)=\dfrac{C_1}{t^5}+24,$

което се решава елементарно с три последователни квадратури:

☞ $\quad x^{(2)}(t)=C_1\int t^{-5}dt+24t+C_2=-\dfrac{C_1}{4}t^{-4}+24t+C_2;$

☞ $\quad x^{(1)}(t)=-\dfrac{C_1}{4}\int t^{-4}dt+\dfrac{24}{2}t^2+C_2t+C_3=-\dfrac{C_1}{4(-3)}t^{-3}+12t^2+C_2t+C_3;$

☞ $\quad x(t)=\dfrac{C_1}{12}\int t^{-3}dt+\dfrac{12}{3}t^3+\dfrac{C_2}{2}t^2+C_3.t+C_4=\dfrac{C_1}{12(-2)}t^{-2}+4t^3+\dfrac{C_2}{2}t^2+C_3.t+C_4.$

И така

$$x(t)=-\underbrace{\frac{C_1}{24}}_{C_1^*}t^{-2}+4t^3+\underbrace{\frac{C_2}{2}}_{C_2^*}t^2+\underbrace{C_3}_{C_3^*}.t+\underbrace{C_4}_{C_4^*},\qquad \text{т.е.}$$

(9) $\quad x(t)=4t^3+C_1^*t^{-2}+C_2^*t^2+C_3^*.t+C_4^*.$

Задача: Да се реши уравнението:

(1) $\quad 2x\,x^{//}=x^2+x^{/\,2}.$

Решение: уравнението е от тип (12.3), т.е. уравнение, в което не присъства (явно) аргумента t. Както е известно редът на подобни уравнения се понижава с единица чрез полагането

(2) $\quad x^{/}=u(x)$ $\quad$ (*т.е. въвежда се функция с аргумент x, понеже* t *отсъства*)

Изразяваме втората производна

(3) $\quad x^{//}=\dfrac{d}{dt}u(x)=\underbrace{\dfrac{du(x)}{dx}}_{u^{/}}\underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{u}=u\,u^{/},$

След което заместваме (2) и (3) в (1)

(4) $\quad 2xu\,u^{/}=x^2+u^2 \qquad \Big|:2u.x \qquad$ при $x\neq 0, u\neq 0$

(5) $\quad \dfrac{du}{dx}=\underbrace{\left(\dfrac{1}{2x}\right)}_{A(x)}u+\underbrace{\left(\dfrac{x}{2}\right)}_{B(x)}u^{-1}.$

В този си вид уравнение (5) е уравнение на Бернули с $n=-1$ относно неизвестната функция $u=u(x)$. Както е известно то се решава с полагането

(6) $\quad y=u^{1-n}\equiv u^{1-(-1)}=u^2.$

След това полагане уравнението на Бернули

(7) $$\frac{du}{dx} = A(x)\, u + B(x)\, u^n$$

преминава в уравнението

(8) $$\frac{dy}{dx} = A^*(x).y + B^*(x),$$

което е линейно ОДУ от първи ред с коефициенти

(9[а]) $$A^*(x) = (1-n)A(x) = (1-(-1))\frac{1}{2x} = 2\frac{1}{2x} = \frac{1}{x}, \qquad \text{и}$$

(9[б]) $$B^*(x) = (1-n)B(x) = (1-(-1))\frac{x}{2} = 2\frac{x}{2} = x.$$

И така, решаваме линейното уравнение

(10) $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right) y + x.$$

Неговото общо решение е

$$y(x,C) = e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}\left(\int x e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx} dx + C\right) = e^{\ln x}\left(\int x e^{-\ln x} dx + C\right) =$$

$$= x\left(\int x x^{-1} dx + C\right) = x\left(\int dx + C\right) = x(x+C) = x^2 + Cx.$$

И така:

(11) $$y(x,C) = x^2 + Cx.$$

Връщаме се „назад” към направените дотук две полагания. Според предпоследното: $y = u^2$, т.е. $u = \pm\sqrt{y}$, или

(12) $$u(x,C) = \pm\sqrt{x^2 + Cx}.$$

А според първото полагане: $u(x) = x^{/}$, т.е.

(13) $$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{x^2 + Cx},$$

което е ОДУ с РП

(14) $$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + Cx}} = \pm\, dt \qquad \Big|\int$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + Cx}} = \pm\int dt + C_1.$$

След интегрирането му получаваме

(15) $$\ln\left|2x + C + 2\sqrt{x^2 + Cx}\right| = \pm\, t + C_1.$$

С непосредствена проверка в (1) се установява, че и $x = 0$ е решение („изпуснато” до момента).

✸ **Задача** (Стр. 20 / Зад. 271) Да се интегрира уравнението

(1) $$(t^2 - 1).x^{//} + 2t\, x^{/} = 0.$$

Решение: уравнението е от вида

(2) $\quad F(t,x^{/},x^{//})=0$,

т.е. липсва неизвестната функция. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством полагането

(3) $\quad u=x^{/}$, следователно (4) $\quad x^{//}=u^{/}$.

След това полагане уравнение (1) се свежда до ДУ от първи ред, което решено относно производната $u^{/}$ има вида

(4) $\quad u^{/}=-\dfrac{2t}{(t^2-1)}u$, или още $\dfrac{du}{u}=-\dfrac{2t}{(t^2-1)}dt \quad \Big| \int$

$$\ln u=-2.\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)}+\ln C_1=-\ln(t^2-1)+\ln C_1;$$

$\ln u+\ln(t^2-1)=\ln C_1$, т.е.

(5) $\quad u(t^2-1)=C_1$

Ако отчетем полагането (3)

(6) $\quad dx=\dfrac{C_1}{(t^2-1)}dt$, т.е.

(7) $\quad x(t,C_1,C_{2)}=C_1\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2-1)}+C_2=C_1\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C_2$.

✸ **Задача** (Стр. 20 / Зад. 280) Да се интегрира уравнението

(1) $\quad x(1-\ln x)x^{//}+(1+\ln x)x^{/\,2}=0$.

Решение: уравнението е от вида

(2) $\quad F(x,x^{/},x^{//})=0$,

т.е. липсва аргумента t. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством въвеждането на функция с аргумент **x**

(3) $\quad x^{/}=u(x)$, следователно

(4) $\quad x^{//}=\underbrace{\dfrac{du}{dx}}_{u^{/}}\underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{u}=u.u^{/}$.

След това полагане уравнение (1) се свежда до ДУ от първи ред,

(4) $\quad x(1-\ln x)u.\dfrac{du}{dx}=-(1+\ln x)u^2 \qquad \Big| :u\neq 0$

което решено относно производната $u^{/}$ има вида

(5) $\quad \dfrac{du}{dx}=-\dfrac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)x}u$

или още $\quad \dfrac{du}{u}=-\dfrac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)x}dx \qquad \Big| \int$

$$\ln u=-\int\frac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)}d(\ln x)+\ln C_1=\int\frac{(2+\ln x-1)}{(\ln x-1)}d(\ln x-1)+\ln C_1=$$

$$=2\int\frac{d(\ln x-1)}{(\ln x-1)}+\int\frac{\ln x-1}{(\ln x-1)}d(\ln x)+\ln C_1=$$

$= 2\ln(\ln x - 1) + \ln x + \ln C_1 = \ln(\ln x - 1)^2 + \ln x + \ln C_1$, следователно

(6) $\quad u(x, C_1) = C_1\, x\, (\ln x - 1)^2$.

Ако отчетем полагането (3)

(7) $\quad \dfrac{dx}{dt} = C_1\, x\, (\ln x - 1)^2, \qquad$ т.е. $\qquad \dfrac{dx}{x(\ln x - 1)^2} = C_1\, dt \qquad \Big| \int$

$\displaystyle\int \frac{d(\ln x)}{(\ln x - 1)^2} = C_1\, t + C_2, \qquad$ т.е. $\qquad \displaystyle\int (\ln x - 1)^{-2} d(\ln x - 1) = C_1\, t + C_2,$

$\dfrac{1}{(-1)}(\ln x - 1)^{-1} = C_1\, t + C_2, \qquad$ т.е. $\qquad -\dfrac{1}{\ln x - 1} = C_1\, t + C_2;$

$\ln x - 1 = -\dfrac{1}{C_1\, t + C_2}, \qquad \ln x = 1 - \dfrac{1}{C_1\, t + C_2} = \dfrac{C_1\, t + C_2 - 1}{C_1\, t + C_2};$

(8) $\quad x(t, C_1, C_2) = \exp\left(\dfrac{C_1\, t + C_2 - 1}{C_1\, t + C_2}\right).$

Понеже в (4) делихме с $u(x) \equiv x'$, приемайки $u \neq 0$, то очевидно сме пропуснали решението

(9) $\quad x' = 0, \qquad$ т.е. $\qquad x = C$.

Задача. Да се реши уравнението:

(1) $\quad t\, x\, x'' - x'^2 t = x\, x'$.

Решение: уравнението е ОДУ от втори ред

(2) $\quad F(t, x, x', x'') = 0$.

Нека видим дали F не е хомогенна функция от някаква степен, т.е. дали уравнение от типа

(3) $\quad F(t, \alpha x, \alpha x', \alpha x'') = \alpha^s F(t, x, x', x'')$

допуска нетривиално решение относно s (*ако подобно уравнение има изобщо смисъл за дадената функция* F*, разбира се*). В нашия случай уравнението е

(4) $\quad t\,(\alpha x)(\alpha x'') - (\alpha x')^2 t - (\alpha x)(\alpha x') = \alpha^s \{t\, x\, x'' - x'^2 t - x\, x'\}$.

Лесно се вижда, че (4) е изпълнено тъждествено за $s = 2$, с което всъщност установихме, че уравнението (1) е от типа (12.4), т.е. уравнение с хомогенна функция F от типа (2). Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането

(5) $\quad x'(t) = x(t).u(t)$,

чрез което уравнение (1) се свежда до уравнение за новата функция $u(t)$. Действително

(6) $\quad x'' = \underbrace{x'}_{от\,(5)}.u + x.u' = x.u^2 + x.u' = x.(u^2 + u')$.

Заместваме (5) и (6) в (1)

(7) $\quad t\, x\{x.(u^2 + u')\} - (x.u)^2 t = x\,(x.u)$, т.е.

$\qquad t\, x^2 u^2 + t\, x^2 u' - t\, x^2.u^2 = x^2\, u;$

$$x^2(tu^{/}-u)=0 \qquad \Big| : x^2, \quad x\neq 0$$

(8) $tu^{/}-u=0$, т.е. $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dt}{t}$,

(9) $\ln u=\ln t+\ln C_1$, откъдето

(10) $u(t,C_1)=C_1.t$.

С така намереното решение на (8) се връщаме на полагането (5), откъдето

(11) $\dfrac{dx}{dt}=x.u(t,C_1)=x.C_1.t$, или още $\dfrac{dx}{x}=C_1.t\,dt$,

решението на което е

(12) $\ln x=\dfrac{C_1}{2}t^2+\ln C_2=\ln[C_2e^{\frac{C_1}{2}t^2}]$.

След антилогаритмуване получаваме

(13) $x(t,C_1,C_2)=C_2e^{\frac{C_1}{2}t^2}$.

Понеже при направените преобразования делихме с x^2, като приехме $x\neq 0$, то следва да проверим дали $x=0$ не е „изпуснато" решение. С непосредствена проверка в (1) се установява, че $x=0$ е решение. Обаче това решение не е „изпуснато", защото то се получава от общото решение (13) за $C_2=0$.

Задача. Да се реши уравнението

(1) $x\,x^{//}=x^{/\,2}+15x^2\sqrt{t}$

Решение: и това уравнение е ОДУ от втори ред

(2) $F(t,x,x^{/},x^{//})=0$,

имащо хомогенна функция от степен $s=2$, понеже уравнението от типа

(3) $F(t,\alpha x,\alpha x^{/},\alpha x^{//})=\alpha^sF(t,x,x^{/},x^{//})$,

което в нашия случай е

(4) $(\alpha x)(\alpha x^{//})-(\alpha x^{/})^2t-15(\alpha x)^2\sqrt{t}=\alpha^s\{x\,x^{//}-x^{/\,2}-15x^2\sqrt{t}\}$

е изпълнено тъждествено за $s=2$. Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането

(5) $x^{/}=x.u(t)$,

чрез което уравнение (1) се свежда до уравнение за новата функция $u(t)$. Действително

(6) $x^{//}=\underbrace{x^{/}}_{от\ (5)}.u+x.u^{/}=x.u^2+x.u^{/}=x.(u^2+u^{/})$.

Заместваме (5) и (6) в (1)

(7) $x\,x.(u^2+u^{/})-(x.u)^2-15x^2\sqrt{t}=0$, или още

(8) $x^2\,(u^{/}-15\sqrt{t})=0 \qquad \Big| : x^2, \quad x\neq 0$

(9) $u^{/}-15\sqrt{t}=0$, т.е. $\dfrac{du}{dt}=15.\,t^{\frac{1}{2}} \quad \Big| \int$

$$(10)\quad u(t)=15\int t^{\frac{1}{2}}\,dt+C_1=\frac{15}{(1/2+1)}t^{\frac{3}{2}}+C_1=10t^{\frac{3}{2}}+C_1.$$

Връщаме се на полагането (5)

$$(11)\quad \frac{dx}{dt}=x.u(t)=x\left(10t^{\frac{3}{2}}+C_1\right),\quad \text{т.е.}\quad \frac{dx}{x}=\left(10t^{\frac{3}{2}}+C_1\right)dt\qquad \Big|\int$$

$$(12)\quad \ln x=\int\left(10t^{\frac{3}{2}}+C_1\right)dt+C_2=10\int t^{\frac{3}{2}}\,dt+C_1.t+C_2=$$

$$=\frac{10}{(3/2+1)}t^{\frac{5}{2}}+C_1.t+C_2=\frac{10}{(5/2)}t^{\frac{5}{2}}+C_1.t+C_2=4\,t^{\frac{5}{2}}+C_1.t+C_2,$$

откъдето след антилогаритмуване получаваме общото решение на (1)

$$(13)\quad x(t,C_1,C_2)=\exp\left(4\,t^{\frac{5}{2}}+C_1.t+C_2\right).$$

Понеже при направените преобразования делихме с x^2, като приехме $x\neq 0$, то следва да проверим дали $x=0$ не е „изпуснато” решение. С непосредствена проверка в (1) се установява, че $x=0$ е решение. А съдейки по (13) това решение наистина е „изпуснато”, защото то не се получава за никои стойности на интеграционните константи C_1 и C_2. Ето защо общото решение следва освен (13) да включва и $x=0$.

Забележка: Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. *xxx*, Зад. *yyy*) визират „**Сборник задачи по математични методи на физиката физика**”, с автори **Кръстю Иванов**, **Вълю Великов**, Пловдивско университетско издание, **2000 г**.

Април 2010 г. Гл. ас. Петко Митев