Лекции
по **Електродинамика**

Тема 1. Принцип на относителността на Айнщайн

❶ В класическата физика се работи с **инерциални отправни системи** (ИОС). В тази връзка е необходимо да се избере подходяща **отправна система**, а именно ИОС трябва да се свърже с отправно тяло с неподвижна(и) точка(и).

Инерциална отправна система е такава отправна система, относно която една материална точка се движи с постоянна скорост $\vec{v} = const$ (*която, в частност, може и да бъде равна на* ***нула***), т.е. точката се движи **праволинейно и равномерно**, **<u>или</u>** е в **състояние на покой**.

Под **<u>свободна</u> материална точка** се разбира точка, която **не си взаимодейства** с други физични обекти (*тела или материални точки*).

Съществуването на инерциални ОС **<u>се постулира</u>**.

❷ **Свойства на пространството и времето**:

Пространството е хомогенно и изотропно, а **времето** е хомогенно (*замяната на* t *с* $-t$ *в функцията на Лагранж не води до промяна на уравненията на движение*). Изобщо от гледна точка на законите на механиката, ако е възможно едно движение, то винаги е възможно и обратното движение.

Времето е „**абсолютно**", т.е. то <u>тече по един и същ начин спрямо всеки наблюдател</u>.

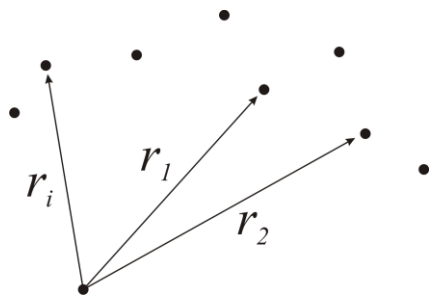
Пространството е: **относително, безкрайно, тримерно** (*триизмерно*), като в него е в сила Евклидовата геометрия.

❸ **Класически принцип на относителността на Галилей**:

Ако имаме една **инерциална отправна система**, то **<u>всяка</u>** друга отправна система, която се движи праволинейно и равномерно (**или е в покой**) спрямо дадената ИОС, е **също инерциална**, или казано с други думи **всички инерциални отправни системи са равноправни** според законите на механиката.

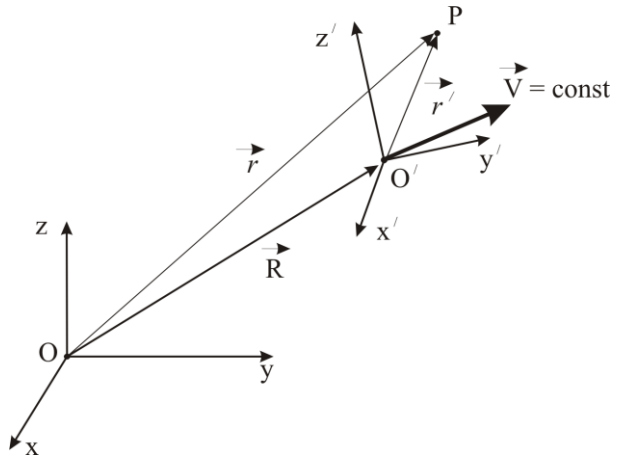
При това всички **механични явления** <u>протичат по един и същ начин</u> спрямо **коя да е** инерциална ОС (**<u>независимо от нейния избор</u>**).

❹ **Възможност за съществуване на безкрайно голяма скорост, с която се предават взаимодействията между обекти. Мигновенност на взаимодействието.**



Потенциалната енергия $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t)$ на една система от материални обекти (точки) зависи от взаимното разположение на тези обекти. Следователно ако настъпи изменение в положението на кой да е обект, това се чувства във всички останали обекти, и влияе върху стойността на потенциалната енергия $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, t)$.

Според класическата механика координатите и времето на една материална точка относно различни наблюдатели (*наблюдатели в различни ИОС*) са свързани помежду си посредством равенства (*съотношения*), наречени **трансформации на Галилей.**



Тези равенства имат вида

$$t = t^{/}, \qquad \vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{R},$$

където

$$\vec{R} = \vec{V}.t,$$

следователно

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{V}.t \\ &t = t^{/} \end{aligned}} \qquad (1)$$

Съотношенията (1) изразяват математически трансформациите на Галилей.

Чрез последователно диференциране на (1) могат да бъдат получени:

а) Закон за събиране на скоростите

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ (скорост на движение на т. P спрямо ИОС (K)),

$\dot{\vec{r}}^{\,/} = \vec{V}^{/}$ (скорост на движение на т. P спрямо ИОС ($K^{/}$)),

$(\vec{V}.t)^{/} \equiv \vec{V}$,

Следователно $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^{\,/} + \vec{V}$, т.е.

(2) $\boxed{\vec{v} = \vec{V}^{\,/} + \vec{V}}$ - закон за събиране на скоростите.

б) Закон за ускоренията

След повторно диференциране, отчитайки, че скоростта, с която ИОС ($K^{/}$) се движи спрямо ИОС (K), е $\vec{V} = const$, т.е. $\dot{\vec{V}} = 0$, за ускоренията получаваме

$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{V}}^{\,/} + \dot{\vec{V}}$, т.е.

(3) $\boxed{\vec{a} = \vec{a}^{\,/}}$.

Равенството (3) изразява математически факта, че **ускорението е инвариантна величина**, т.е. величина, независеща от избора на отправната система.

А от инвариантността на ускорението следва (*по законите на Нютоновата механика*) **инвариантността на уравненията на движение**, т.е. II закон на Нютон

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m.\vec{a}^{\,/} = \vec{F}^{\,/}$$

запазва вида си за всяка инерциална отправна система.

В горното равенство е взет под внимание факта, че масата (в нерелативистката механика) е също **инвариантна величина**, т.е. $\boxed{m = m^{/}}$.

Решението на уравнението на движение

$$m.\ddot{\vec{r}} = F$$

зависи от **броя на степените на свобода** на системата (частицата), която е обект на разглеждане. За една частица, движеща се в тримерното Евклидово пространство, този брой е $s = 3$, което означава, че законът за движението

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

изразяващ законът, по който се изменят с времето координатите на частицата, ще се изрази чрез 6 интеграционни константи, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(C_1, C_2, ..., C_6, t).$$

<u>*Пояснение*</u>: Интеграционните константи се определят от началните условия, т.е. от стойностите в начален момент $t = 0$, които приемат (*имат*) **координатите** и **скоростите** на частицата, т.е.

$$\left| \begin{aligned} x_0 &= x(0) \\ y_0 &= y(0) \\ z_0 &= z(0) \end{aligned} \right. \text{(т.е. 3 константи)} + \left| \begin{aligned} \dot{x}_0 &= V_x(0) \\ \dot{y}_0 &= V_y(0) \\ \dot{z}_0 &= V_z(0) \end{aligned} \right. \text{(т.е. 3 константи)} = \underline{\text{6 константи общо}}.$$

Айнщайн обобщава понятието ИОС и разширява пределите на използването на това понятие и за физични явления (изобщо). Така се стига до едно обобщение на свойствата на пространството и времето, изразено във следното

Обобщение на принципа на Галилей за всички физични явления

Всички физични явления протичат по един и същ начин спрямо всяка инерциална отправна система.

Горното твърдение се нарича още **Първи постулат на Айнщайн**.

Айнщайн отхвърля тезата за мигновения характер на взаимодействието, и издига хипотезата за съществуването на крайна (*пределна*) скорост $c = 3.10^8\ m/s$, с която то (взаимодействието) се предава (*осъществява*). Така се стига до следния

Втори постулат на Айнщайн:

Скоростта на светлината във вакуум е една и съща спрямо всяка инерциална ОС. Тя **не зависи** от движението на източника или приемника на светлината.

Съвкупността от постулатите **I** и **II** се нарича **Принцип на относителността на Айнщайн**, който е основополагащ принцип в **Специалната теория на относителността (СТО)**.

А механиката, основана на тази теория, се нарича **релативистична механика**.

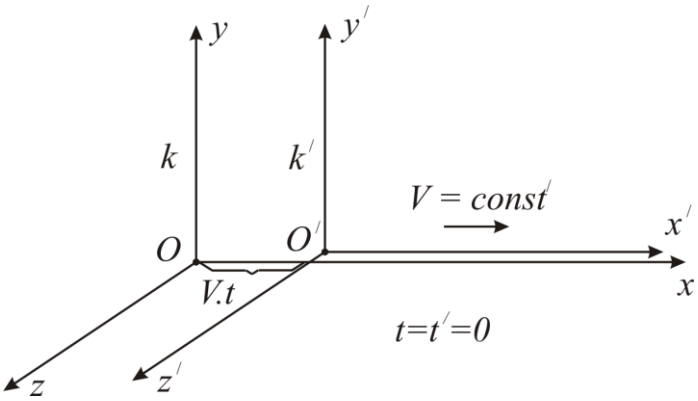
Класическата механика описва движението на макрообекти, движещи се с класически скорости, т.е. скорости $V << c$, докато релативистичната механика описва тела, движещи се както с класическа, така и с релативистична скорост, т.е. скорост $V \to c$. Ето защо релативистичната механика „съдържа" в себе си класическата механика, законите на която могат да се получат от законите на релативистичната механика чрез (*формален*) граничен преход $\frac{V}{c} \to 0$.

Айнщайн (*теорията на Айнщайн*) не приема трансформациите на Галилей. Действително, ако допуснем, че $V^{/} = c$, то от закона за събиране на скорости ще имаме

$v = c + V$,

откъдето следва, че $\boxed{v > c}$, а това очевидно е **в противоречие** с II постулат, което е **недопустимо**.

Тема 2. Трансформации на Лоренц. Следствия от тях



Ако някакво елементарно събитие е станало в дадена пространствена точка (x, y, z) в даден момент t, то координатите на събитието са (x, y, z, t).

Нека разгледаме едно елементарно събитие във всяка от отправните системи K и $K^{/}$.

За K: (x, y, z, t),

За $K^{/}$: $(x^{/}, y^{/}, z^{/}, t^{/})$,

Връзката между координатите на събитието за (в) едната и другата система очевидно може да бъде представена посредством следната система от равенства

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l} x^{/} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1\, t \\ y^{/} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2\, t \\ z^{/} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3\, t \\ t^{/} = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4\, t \end{array}\right.$$

Системата (1) съдържа линейни хомогенни равенства, в които коефициентите a_i, b_i, c_i и d_i не зависят от координатите и времето, както и от посоката на скоростта на движение на $K^{/}$ спрямо K. Този извод следва от хомогенността и изотропността на пространството и хомогенността на времето. Остава единствено (разбира се) зависимостта от големината на скоростта $V = \left|\vec{V}\right|$.

Доказва се, че

$a_2 = a_3 = 0$, $b_1 = b_3 = b_4 = 0$, $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $d_2 = d_3 = 0$,

$$b_2 = c_3 = 1, \quad a_1 = d_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad d_1 = \frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad a_4 = \frac{\left(-\frac{V}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

След заместването на тези коефициенти в уравненията (1), последните добиват вида

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} x^{/} = \dfrac{x - V.t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x - V.t) \\ y^{/} = y \\ z^{/} = z \\ t^{/} = \dfrac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{array}\right. \text{, или} \quad (3)\qquad \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{x^{/} + V.t^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x^{/} + V.t^{/}) \\ y = y^{/} \\ z = z^{/} \\ t = \dfrac{t^{/} + \frac{V}{c^2}x^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t^{/} + \frac{V}{c^2}x^{/}\right) \end{array}\right. .$$

Формули (2) и/или (3) се наричат **специални трансформации на Лоренц**.

Те са аналог на формулите на Галилей в класическата (нерелативистката) механика. В класическата механика скоростта на движение на телата е $V << c$, следователно отношението в тези скорости ще дава много малка величина

$$(4)\qquad \beta = \frac{V}{c} << 1, \text{ и } \frac{V}{c^2} \approx 0, \text{ което означава, че } \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1.$$

Последните неравенства и оценки изразяват в математически вид условията на т.нар. класическо приближение (движение с класическа скорост).

Ако заместим (4) в (3), ще получим трансформационните съотношение

$$\left|\begin{array}{l} x = x^{/} + V.t^{/} \\ y = y^{/} \\ z = z^{/} \\ t = t^{/} \end{array}\right. ,$$

които съвпадат с формулите на Галилей. Важно е да се отбележи, че в класическата физика времето не търпи промяна (трансформация).

Ако разгледаме трансформационния закон за случая $\vec{V} = (V,0,0)$, то записан чрез радиус-векторите $r = (x, y, z)$ и $r^{/} = (x^{/}, y^{/}, z^{/})$ за двете ИОС (K) и ($K^{/}$), той ще има вида

$$\left| \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}^{\,/} + \vec{V}.t \\ t = t^{/} \end{array} \right. ,$$

което представлява друг вариант на запис на (4).

Следствия от трансформациите на Лоренц

❶ Скоростта на сигнал във вакуум е гранична скорост за движение на материални обекти и сигнали, като под сигнал се има предвид материален носител на информация (напр. светлинен лъч).

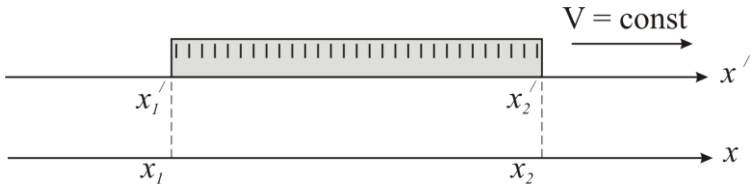
Това е пряко следствие от трансформациите на Лоренц. Действително нека приемем, че имаме обект, движещ се със скорост $V^{/} > c$ спрямо ИОС ($K^{/}$) и нека определим координатите на този обект в ИОС (K) с помощта на формули (2). Оказва се, обаче, че $\frac{V}{c} > 1$ и следователно квадратният корен $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ ще бъде **комплексно число.** Щом координатите на това събитие не се изразяват чрез реални числа, то това събитие не е елемент на обективната реалност, т.е. **то не може да съществува**. Следователно трябва да отхвърлим направеното допускане.

Нека сега допуснем, че е възможно движение със скорост $V = c$. В този случай $\frac{V}{c} = 1$, а квадратният корен $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = 0$. И тъй като този квадратен корен стои в знаменател, то замествайки в (2), стигаме до друго противоречие – координатите на обект, движещ се със скорост $V = c$, клонят към ∞, което означава, че и това събитие не е елемент на обективната реалност, т.е. то също не може да съществува. Следователно трябва да отхвърлим и това направено допускане.

Все пак съществуват частици, наречени **тахиони**, които са теоретично доказани, но експериментално не са получени, за които се предполага, че могат да се движат със скорости $V > c$, и с които се свързва идеята те да дават информация от бъдещето.

❷ Друго следствие от трансформациите на Лоренц е **относителността на пространствените интервали** (*скъсяване на дължините*). Разгледано в контекста на **принципа за причинност** (т.е. че **<u>причината винаги предшества следствието</u>**), то води до много интересни резултати.

Както е известно в класическата механика дължината на един обект е неизменна величина.



Нека допуснем, че имаме линия, и нека наблюдател в ИОС ($K^{/}$) е свързан с нея, а спрямо наблюдател в ИОС (K) тази линия се движи. За да измери дължината на тази линия, наблюдателят от (K) определя (измерва) едновременно, т.е. в момент $t_1 = t_2$, координатите x_1 и x_2 на линията, което му позволява да определи дължината й в (K) $\Delta x = x_2 - x_1$.

За да определим в същото време дължината на линията в системата $K^{/}$), използваме формулите (2), даващи връзката между x_1 и $x_1^{/}$; и x_2 и $x_2^{/}$. Така от (2) ще имаме

$$x_1^{/} = \frac{x_1 - V.t_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ и}$$

$$x_2^{/} = \frac{x_2 - V.t_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Изваждаме почленно тези две равенства, с което определяме дължината на линията в ($K^{/}$) $\Delta x^{/} = x_2^{/} - x_1^{/}$. Получава се

$$\Delta x^{/} \equiv x_2^{/} - x_1^{/} = \frac{x_2 - V.t_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - V.t_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V.(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Така получихме връзката

$$\Delta x^{/} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Нека въведем означенията:

$\Delta x^{/} = l_0$ - **собствена дължина** на обекта (*дължина в $K^{/}$, т.е. спрямо наблюдател, движещ се заедно с линийката, но намиращ се в покой спрямо нея*); и

$\Delta x = l$ - **координатна дължина** на обекта (*дължина в K, т.е. спрямо неподвижен наблюдател, относно който, обаче, линийката се движи*).

В тези обозначения горното равенство добива вида

(5) $\boxed{l = l_0.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, т.е. $l = \frac{l_0}{\gamma}$.

Това е формула, даваща връзката между дължините на един обект, определяни от различни наблюдатели.

Понеже винаги $V < c$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < 1$, то очевидно $\boxed{l < l_0}$. Последното неравенство показва, че **координатната дължина l е винаги по-малка от собствената дължина l_0**, и изразява факта, че **дължината на движещи се обекти се скъсява** (*намалява*), което е и доказателството на това следствие от трансформациите на Лоренц.

При земни условия имаме приближението на класическата механика $V << c$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1$, и следователно $\boxed{l \approx l_0}$.

Колкото обаче, скоростта на едно тяло расте и $\boxed{V \to c}$, т.е. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \to 0$, толкова разликата между l и l_0 става **<u>по-съществена</u>.**

❸ **<u>Следствие</u>: Относителност на временните интервали**

Нека отново разгледаме две събития, които за наблюдател, намиращ се в подвижната координатна система $K^{/}$, се случват в една и съща точка $x_1^{/} = x_2^{/}$, т.е. $\Delta x^{/} = 0$, но в **<u>различни моменти време</u>** $t_1^{/} \neq t_2^{/}$, т.е. $\Delta t^{/} \neq 0$. Нека определим какъв ще бъде интервалът време между същите тези две събития за наблюдател, намиращ се в неподвижната ИОК K. За целта използваме съотношенията (3)

$$t_1 = \frac{t_1^{/} + \frac{V}{c^2} x_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \text{а} \qquad t_2 = \frac{t_2^{/} + \frac{V}{c^2} x_2^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

следователно (*след почленно изваждане*) получаваме

$$t_2 - t_1 \equiv \Delta t = \frac{t_2^{/} - t_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{(x_2^{/} - x_1^{/})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2^{/} - t_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{\Delta t^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е.}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ако вземем под внимание, че

- $\Delta t^{/} \approx \Delta\tau$ - собствено време в $K^{/}$;
- Δt - координатно време, определено от наблюдател, спрямо който обектът се движи, то получаваме следното съотношение

(6) $$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } \Delta t = \gamma.\Delta\tau$$

и понеже при $V < c$ очевидно $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < 1$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > 1$, можем да заключим, че $\Delta t > \Delta\tau$, т.е. **координатното време** (*времето спрямо неподвижен наблюдател, относно който обектът се движи*) **е по-голямо от собственото време** (*времето спрямо наблюдател, който се движи заедно с обекта, но относно който обектът е в покой*).

❹ Като пряк резултат от ❸ следва **относителността на едновременността**, т.е. ще покажем, че две събития, които са едновременни относно дадена ИОС, са неедновременни относно всяка друга ИОС, движеща се със скорост $V \neq 0$ спрямо дадената ИОС.

За целта разглеждаме две събития, които за наблюдател от системата $K^{/}$ са едновременни ($t_1^{/} = t_2^{/}$, т.е. $\Delta t^{/} = 0$), без да са пространствено съвпадащи, ($x_1^{/} \neq x_2^{/}$, т.е. $\Delta x^{/} \neq 0$). Нека определим какъв е интервалът от време $\Delta t = t_2 - t_1$ между същите тези две събития относно наблюдател, намиращ се в ИОС K. За целта отново използваме формули (3), от които определяме

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{t_2^{/} + \frac{V}{c^2}x_2^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1^{/} + \frac{V}{c^2}x_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2^{/} - t_1^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{V}{c^2}\frac{(x_2^{/} - x_1^{/})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{V}{c^2}\frac{(x_2^{/} - x_1^{/})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Очевидно тъй като по условие $x_1^{/} \neq x_2^{/}$, то и $\Delta t \equiv t_2 - t_1 \neq 0$, т.е. $t_2 \neq t_1$.

Извод: събитията, които за наблюдател от системата $K^{/}$ са едновременни ($t_1^{/} = t_2^{/}$) са неедновременни за наблюдател от системата K с ($t_1 \neq t_2$), което означава, че едновременността е относително понятие.

❺ Релативистичен закон за събиране на скоростите

$\vec{r} = \vec{r}^{/} + \vec{V}.t$, следователно

(**) $\boxed{\vec{v} = \vec{v}^{/} + \vec{V}}$, където

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \text{ и } \vec{v}^{/} = \left(\frac{dx^{/}}{dt}, \frac{dy^{/}}{dt}, \frac{dz^{/}}{dt}\right).$$

Нека диференцираме по времето формули (3), отчитайки, че $\vec{V}$ и c са константни скорости:

$$\left|\begin{array}{l} dx = \dfrac{dx' + V.dt'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \dfrac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{array}\right.$$

Делим почленно dx, dy и dz на dt:

$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V.dt'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \Bigg/ \frac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{(dx' + V.dt')/dt'}{(dt' + \dfrac{V}{c^2}dx')/dt'} =$$

$$= \frac{(dx' + V.dt')/dt'}{(dt' + \dfrac{V}{c^2}dx')/dt'} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.\dfrac{dx'}{dt'}} = \ldots \; \frac{dx'}{dt'} = v'_x \; \ldots = \frac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.v'_x}.$$

И така, $\boxed{v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.v'_x}}$.

Аналогично:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = dy' \Bigg/ \frac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{dy'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'} = \frac{dy'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\Big/dt'}{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'\Big/dt'} = \frac{v'_y.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}, \text{ и}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = dz' \Bigg/ \frac{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{dz'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'} = \frac{dz'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\Big/dt'}{dt' + \dfrac{V}{c^2}dx'\Big/dt'} = \frac{v'_z.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}.$$

Обобщавайки получените резултати стигаме до т.нар. релативистичен закон за събиране на скоростите:

$$(7) \qquad \left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2}.v'_x}, \\ v_y = \dfrac{v'_y.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}, \\ v_z = \dfrac{v'_z.\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V}{c^2}v'_x}. \end{array}\right.$$

Ще покажем, че от (7) в нерелативисткия случай $v << c$ следва законът за събиране на скорости (**). Действително при $v << c$ отношението $\dfrac{v}{c} << 1$, т.е. $\dfrac{v}{c} \approx 0$, следователно $\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}} \approx 1$, и тогава от (7) ще следва

$$v_x = \frac{v_x^{/} + V}{1 + \frac{V}{c^2}.v_x^{/}} \approx \frac{v_x^{/} + V}{1 + 0.v_x^{/}} = v_x^{/} + V\,, \qquad v_x = v_x^{/} + V\,,$$

$$v_y = \frac{v_y^{/}.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v_x^{/}} \approx \frac{v_y^{/}.1}{1 + 0.v_x^{/}} = v_y^{/}, \qquad \text{или} \qquad v_y = v_y^{/}\,,$$

$$v_z = \frac{v_z^{/}.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v_x^{/}} \approx \frac{v_z^{/}.1}{1 + 0.v_x^{/}} = v_z^{/}. \qquad v_z = v_z^{/}.$$

Тогава $\vec{v} = \vec{v}^{/} + \vec{V}$, където $\vec{V} = (V,0,0)$. Така полученото равенство изразява точно (**).

Тема 3. Геометричен смисъл на трансформациите на Лоренц

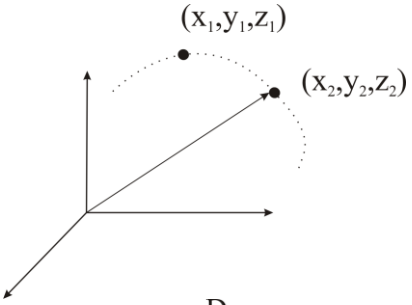
Трансформациите на Лоренц показват, че пространствените координати и времето се изменят съгласувано при преход от една ИОС към друга такава, което показва, че колкото и да са различни (разнородни), в релативистката механика те, бидейки форма за съществуване и движение на материята, не са независими.

Понятие за пространство-време (*четирипространство*). Това пространство характеризира четиримерния свят на събитията и се въвежда от съображения за нагледност.

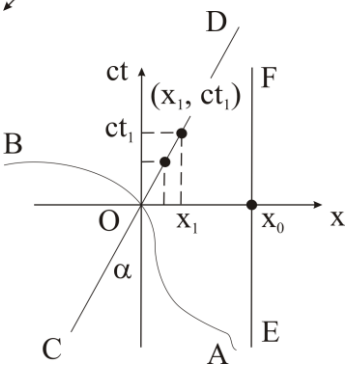
Пространство-времето е съвкупността от всички събития. То по абстрактен начин съединява пространството и времето. Всяка точка от това пространство-време е „геометричен" образ на едно събитие.

Следователно в това 4-пространство всяко събитие има за пространствени координати координатите на точката, в която става (*се случва*) събитието, а за временна координата има времето (момента), в което става това събитие, т.е. (x, y, z, t).

Общоприето за координатите в 4-пространството е представянето ($c.t, x, y, z$), като умножаването на t със c прави четирите координати с еднаква размерност. Пространство-времето може да се разглежда като съвкупност от всички елементарни събития, или още като съвкупност от всички наредени четворки реални числа ($c.t, x, y, z$).



В тримерното пространство траекторията на материална точка е съвкупност от точки, съответстващи на различните положения, което движещо се тяло заема в различни моменти от време t.



В четиримерното пространство-време аналог на траекторията е т.нар. **мирова линия**. Мировата линия е последователност от кинематични положения на някакъв обект, описвани с различни набори ($c.t, x, y, z$).

Ако (*за удобство*) се изобрази двумерно сечение на пространство-времето (*виж фигурата*), при което на две взаимноперпендикулярни оси се нанесат трите пространствени координати и времето (*на абцисната ос е нанесена само*

координатата x), то:

- мировата линия на обект, **движещ се с променлива скорост** $\vec{v}(t)$ и минаващ през началото O на координатната система при $t=0$, ще се изобрази с кривата AOB;

- мировата линия на обект, **движещ се с постоянна скорост** $\vec{v}=const$ и минаващ през началото O на координатната система при $t=0$, ще се изобрази с правата CD, наклонена спрямо оста Oct под ъгъл α, като $tg\alpha = v/c = x/ct$;

- мировата линия на обект, **неподвижен в пространствена точка** x_0, ще се изобрази с правата EF, успоредна на оста Oct и минаваща през точката x_0.

Последният случай показва, че **мирова линия притежават както движещите се, така и неподвижните относно дадена ИОС обекти** (тела), което означава, че понятията „траектория" и „мирова линия" <u>се различават съществено</u>.

Геометричен смисъл на трансформациите на Лоренц

Нека разгледаме следните две събития (*за наблюдател в* ИОС ***К*** – <u>неподвижна</u>):

С1: **изпращане** на светлинен сигнал (*импулс*) от т. (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1; и

С2: **приемане** на този светлинен сигнал в т. (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2.

Координатите на тези две събития в четирипространството (пространство-време) са съответно (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2).

А за наблюдател от системата $\boldsymbol{K}^{/}$ (*подвижна КС*) координатите на същите тези две събития са съответно $(ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ и $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$.

За наблюдател в ИОС ***К*** величината

$c.(t_2 - t_1)$ има смисъл на път, изминат от лъчението от точката на изпращане до точката на получаване на светлинния сигнал.

Но този път може да бъде изразен и чрез пространствените координати:

(1) $\quad |\Delta r| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.

Понеже това са две различни представяния на едно и също нещо, можем да запишем

$$c.(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

откъдето след повдигане в квадрат получаваме

$c^2.(t_2-t_1)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$, или още

(2) $\quad c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2 = 0$.

Нека означим лявата страна на (2) с $(\Delta S)^2$. Така получаваме

(3) $\quad (\Delta S)^2 = c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$, или след коренуване

(3$^{/}$) $\quad \Delta S = \sqrt{c^2.(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2}$.

Получените дотук равенства се отнасят за наблюдател в ИОС ***К***. А за наблюдател в ИОС $\boldsymbol{K}^{/}$ може да бъде получено следното аналогично на (3) равенство

$(\Delta S^{/})^2 = c^2.(t'_2-t'_1)^2 - (x'_2-x'_1)^2 - (y'_2-y'_1)^2 - (z'_2-z'_1)^2$, или още

$$\Delta S^{/} = \sqrt{c^2.(t'_2-t'_1)^2 - (x'_2-x'_1)^2 - (y'_2-y'_1)^2 - (z'_2-z'_1)^2}$$

Ако изходим от последното равенство, в което „примованите" координати (*т.е. координатите в ИОС* $\boldsymbol{K}^{/}$) изразим от трансформациите на Лоренц

$$x^{/} = \frac{x - V.t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y^{/} = y, \qquad z^{/} = z, \qquad t^{/} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

то след несложни преобразования се доказва, че

$$(\Delta S^{/})^2 = c^2.(t'_2-t'_1)^2 - (x'_2-x'_1)^2 - (y'_2-y'_1)^2 - (z'_2-z'_1)^2 = ...$$

$$..... = c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = (\Delta S)^2,$$

т.е.

(4) $(\Delta S)^2 = (\Delta S^/)^2 = (\Delta S^{//})^2 = (\Delta S^{///})^2 = inv$.

Извод: Величината $(\Delta S)^2$ не се променя при промяна на координатната система, следователно $(\Delta S)^2$ е **инвариантна** относно трансформациите на Лоренц величина, имаща смисъл на **<u>пространствено-временен интервал</u>** („*разстояние*") между две събития в 4-мерното пространство-време.

Тук може да се осъществи една полезна **аналогия**:

- величината $\Delta r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е разстоянието между две точки $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ в тримерното Евклидово пространство $\boldsymbol{R}^3$, като очевидно Δr е **инвариантна величина** в $\boldsymbol{R}^3$.
- величината $(\Delta S)^2 = c^2.(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е също инвариантна, но в 4-мерното псевдоевклидово пространство-време $\boldsymbol{R}^4$.

Между двата инварианта съществуват **принципни** и **формални** (външни) различия. Например съществено различие е, че в евклидовата геометрия разстоянието между две точки $|\Delta r|$ е нула, когато тези точки съвпадат. В псевдоевклидовата (4-мерната) геометрия, обаче, пространствено-временният интервал ΔS може да бъде нула дори за две съвършено различни точки от пространство-времето, стига само да бъде изпълнено условието $c^2.(t_2 - t_1)^2 = \Delta r^2$. Друго съществено различие е присъствието на члена, съдържащ времето в представянето за $(\Delta S)^2$, както и присъствието на знака „-„ пред „пространствената" част на израза за $(\Delta S)^2$.

Лесно се вижда, че $\boxed{(\Delta S)^2 = c^2.(t_2 - t_1)^2 - \Delta r^2}$.

На основата на тази аналогия величината ΔS може да бъде наречена още разстояние между две точки (събития) в 4-мерното пространство-време $\boldsymbol{R}^4$, но по-точното й наименование е все пак **<u>пространствено-временен интервал</u>**.

Интервалът $(\Delta S)^2$ може да бъде представен още в следните еквивалентни записи

($3^{//}$) $(\Delta S)^2 = c^2.(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, или още

($3^{///}$) $\boxed{(\Delta S)^2 = c^2.(\Delta t)^2 - |\Delta r|^2}$.

Две събития, чиито координати се различават с безкрайно малка величина, се наричат **безкрайно близки**, а интервалът dS между тях – **безкрайно малък**

(5) $\boxed{(dS)^2 = c^2.(dt)^2 - |dr|^2}$.

Нека разгледаме две безкрайно близки събития, които за наблюдател в ИОС $\boldsymbol{K}^/$ се реализират **в една и съща пространствена точка**, т.е. в $\boldsymbol{K}^/ \Rightarrow |dr| = 0$. Тогава за безкрайно малкия интервал между тези събития (в $\boldsymbol{K}^/$) ще имаме

$$(dS^/)^2 = c^2.(dt^/)^2.$$

Прието е времето $dt^/$, участващо в горното представяне, да се нарича **<u>собствено време</u>**. За него се използва и специално въведено означение

$\boxed{dt^/ \equiv d\tau}$ - **<u>собствено време</u>**.

Следователно **пространствено-временният интервал** dS и **собственото време** $d\tau$ се оказват свързани помежду си със съотношението

(6) $\boxed{dS = c.d\tau}$.

Понеже разглеждаме случай, при който за наблюдател в $\boldsymbol{K}^/$ $|dr| = 0$, т.е. $dx^/ = 0$, то от трансформациите на Лоренц ще следва, че

$$dt = \frac{dt^{/} + \frac{V}{c^2}dx^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{dt^{/}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } d\tau = dt.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Така всъщност получихме следната връзка между **собственото време** $d\tau$ и **координатното време** dt (времето в ИОС $\boldsymbol{K}$)

(7) $$\boxed{d\tau = dt.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Извод: Докато собственото време $d\tau$ е инвариант, то координатното време dt зависи от избора на отправната координатна система (откъдето, всъщност, идва и наименованието му – координатно).

Ако с така намереното в (7) представяне за собственото време заместим в (6), ще получим следната връзка между **пространствено-временният интервал** dS и **координатното време** dt

(8) $$dS = c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.dt \ .$$

Нека отново се върнем на разглежданите две събития (за наблюдател в ИОС $\boldsymbol{K}$ – неподвижна):

C1: изпращане на светлинен сигнал (импулс) от т. (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1; и

C2: приемане на този светлинен сигнал в т. (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2.

От (3) и (2) можем да заключим, че

(2$^{/}$) $$\boxed{(dS)^2 = 0}.$$

Извод: Събитията изпращане и приемане на светлинен сигнал са свързани с интервал dS, който е равен на нула. Интервали от типа (2$^{/}$) се наричат **<u>светлинно-подобни интервали</u>**.

Наименованието идва от факта, че изпращането и приемането на сигнал между указаните 2 точки се характеризира с интервал dS, който може да бъде равен на нула само тогава, когато „посредникът" при пренасянето на този сигнал е **светлината**, защото единствено тя се разпространява със скорост c!

Но в 4-мерното пространство-време има множество точки, за интервала между всеки две от които е възможно $(dS)^2 > 0$, или пък $(dS)^2 < 0$.

А. Нека разгледаме случая

(9) $$\boxed{(dS)^2 > 0}.$$

Такъв интервал се нарича **<u>временно-подобен интервал</u>**.

Две събития, които са свързани с временно-подобен интервал (9), се наричат **<u>причинно-свързани събития.</u>** Това означава, че от точката на **първото събитие** (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1 може да се изпрати сигнал (светлинен), който да достигне до точката на **второто събитие** (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2, и **да го предизвика**.

Ако представим (9) в по-детайлен запис, ще имаме

$(dS)^2 \equiv c^2.(dt)^2 - |dr|^2 > 0$, т.е.

$c^2.(dt)^2 > |dr|^2$, или още

$c > \frac{|dr|}{dt} = v$, където v е скорост на движение на „нашия" обект. Очевидно последното неравенство изразява факта, че при събития, свързани с временно-подобен

интервал, скоростта на движение на обекта е по-малка от скоростта на светлината във вакуум, или още, че скоростта на предаване на сигнала е $c > v$.

Извод: тъй като $v < c$, то събитията с координати (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2) **могат да са в причинно-следствена връзка**.

Две събития, свързани със съотношение (9), могат да бъдат дори и **едноместни** – т.е. стават в една и съща пространствена точка $|dr| = 0$, но в различни моменти от време, т.е. $\Delta t \neq 0$.

Редът на събитията, свързани с времево-подобен интервал $(dS)^2 > 0$ **е абсолютен** (във времето)**,** т.е. ако спрямо една ИОС събитие №2 става **след** събитие №1, то тази последователност **се запазва** във всяка друга (**произволна**) ИОС.

Понеже за времево-подобни интервали $c^2.(dt)^2 > |dr|^2$, или още $c.dt > |dr|$, а $|dr| > 0$, то следователно и $\boxed{dt > 0}$, като това неравенство остава в сила за всяка ИОС.

Б. Нека разгледаме и другият случай

(10) $\boxed{(dS)^2 < 0}$.

Интервали от типа (10) се наричат **<u>пространствено-подобни интервали.</u>**

Две събития, свързани с пространствено-подобен интервал, **<u>не могат</u> да бъдат причинно-следствено свързани помежду си**! Причината за това е, че не може да бъде намерен **<u>материален</u>** носител, чрез който да се предаде информация между двете точки със скорост $v > c$. Действително ако запишем (10) в по-детайлен вид, ще имаме

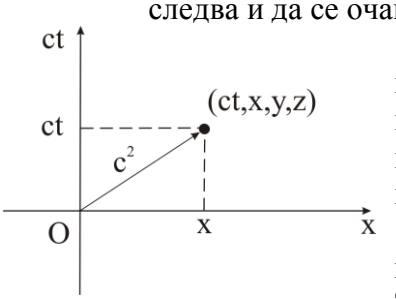
$(dS)^2 \equiv c^2.\Delta t^2 - |\Delta r|^2 < 0$, т.е. $c^2.\Delta t^2 < |\Delta r|^2$, или още $c.\Delta t < |\Delta r|$, откъдето следва, че

$c < \dfrac{|\Delta r|}{\Delta t} \equiv v$, или още $\boxed{c < v}$.

Полученото съотношение между скоростите е недопустимо (противоречи на принципите на СТО), поради което го отхвърляме. А с това **отхвърляме и възможността** от точката на **първото събитие** (x_1, y_1, z_1) в момент време t_1 може да се изпрати сигнал (светлинен), който да достигне до точката на **второто събитие** (x_2, y_2, z_2) в момент време t_2, и <u>да го предизвика</u> – при пространствено-подобни интервали това е просто **невъзможно**. С това всъщност доказахме, че две събития, свързани с пространствено-подобен интервал, <u>не могат да бъдат причинно-следствено свързани помежду си</u>**.** Тези събития ще наричаме **<u>причинно несвързани събития.</u>**

Оказва се, обаче, че причинно несвързаните събития **могат да бъдат едновременни** в някаква ИОС ($\Delta t = 0$), но **<u>в никакъв случай не могат да се „случат" в една и съща точка на тази ИОС</u>**, т.е. $\Delta r \neq 0$. Поради това **не може да бъде определена тяхната последователност във времето**, което ще рече, че:

- съществуват ИОС, в които събитие 1 е **преди** събитие 2,
- съществуват ИОС, в които събитие 1 е **едновременно** със събитие 2 ($\Delta t = 0$),
- ала съществуват и ИОС, в които събитие 1 е **след** събитие 2, както всъщност следва и да се очаква при причинно несвързани събития.



Нека разгледаме отново двумерно сечение на пространство-времето, изобразено чрез двумерна координатна система, по абцисната ос на която са нанесени пространствените координати (в случая – координатата x), а по ординатата - времето.

Началото О на тази координатна система приемаме за геометричен образ на събитие с координати, равни на нула. Тогава разстоянието между събитието О и произволно друго събитие, изобразено с точка от равнината, е

(11) $S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

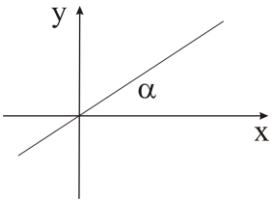
Геометричното място от точки, отстоящи на едно и също разстояние S от точка О, се дава с представянето

$S^2 = c^2t^2 - x^2 = const$.

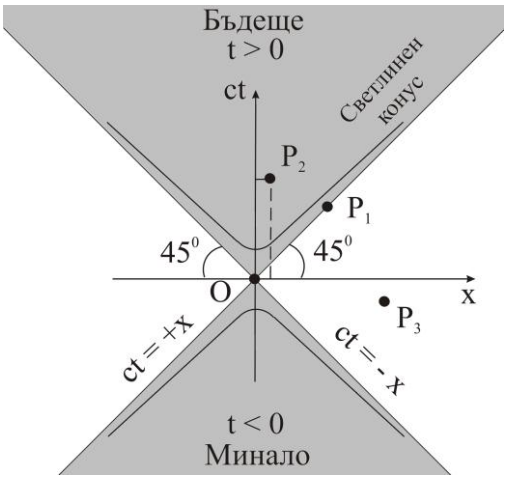
В псевдоевклидовото пространство $\boldsymbol{R^4}$ с геометрия (*метрика*), определена със съотношението (3 /) с последното уравнението е всъщност **уравнение на хипербола** (*докато в тримерното евклидово пространство* $\boldsymbol{R^3}$ *аналогичното по смисъл уравнение* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = const$ *е уравнение на окръжност*).

Асимптотите на тази хипербола се определят от условието $S^2 = 0$, т.е. $c^2t^2 - x^2 = 0$; или още $c^2t^2 = x^2$, откъдето получаваме търсените асимптоти (*уравнения на прави*):

$ct = \pm x$.



Сравнявайки с класическото аналитично представяне на права $y = k.x$, където $k = tg\alpha$, стигаме до извода, че уравненията $ct = +x$ и $ct = -x$ са уравнения на прави, минаващи през началото О на координатната система и наклонени спрямо абцисната ос под ъгли, чиито тангенси са равни съответно на $+1$ и -1 (т.е. ъглите са съответно $+45^0$ и -45^0). При завъртането на тези асимптоти (прави) около оста Oct се описва конична повърхнина (конус), чиято ос съвпада с оста Oct. Вътрешността на този конус се нарича **<u>светлинен конус</u>**.



В зависимост от стойността на интервала S псевдоевклидовата равнина (ct, x) се разделя на три области:

Първа област: произволни две точки от **асимптотите** $ct = +x$ и $ct = -x$ (напр. т. P_1 и т. O) са свързани с интервал S, който е равен на **нула**, понеже абсцисата и ординатата на т. P_1 са равни, а такъв интервал е **светлинно-подобен интервал**. Такива две точки изразяват събитията „**излъчване на светлинен сигнал от дадена точка в даден момент време**" и „**приемане на светлинен сигнал в друга точка в друг момент време**".

Втора област (<u>област на светлинния конус</u>, ***изобразен в сиво***)**:** коя да е точка от светлинния конус (напр. т. P_2), е свързана с т. O посредством <u>*временно-подобен интервал*</u>, т.е. интервал, за който $S^2 > 0$. Действително за т. P_2 ординатата е по-голяма от абсцисата, т.е. $c.t > x$, следователно $c^2.t^2 - x^2 > 0$, откъдето следва, че действително $S^2 > 0$. Щом интервалът между точките P_2 и O е временно-подобен интервал, то събитията в тези две точки са **причинно свързани** (*казаното означава напр., че от т. О* ***<u>може</u>*** *да се изпрати светлинен сигнал към т.* P_2, *който да предизвика в тази точка дадено събитие*).

При това събития от вътрешността на светлинния конус, ставащи в момент:

а) $t > 0$, са **бъдещи** по отношение на събитието O и спадат към т.нар. **бъдеще**;

б) $t < 0$, са **минали** по отношение на събитието O и спадат към т.нар. **минало**.

Частта от светлинния конус, определена от условието $c.t > 0$, се нарича **абсолютно бъдеще**, а тази, за която $c.t < 0$, се нарича **абсолютно минало**.

Трета област (<u>област извън светлинния конус</u>)**:** коя да е точка извън светлинния конус (напр. т. P_3), е свързана с т. O посредством <u>*пространствено-подобен интервал*</u>, т.е. интервал, за който $S^2 < 0$. Действително за т. P_3 ординатата е по-малка от абсцисата, т.е.

$c.t < x$, следователно $c^2.t^2 - x^2 < 0$, откъдето следва, че действително $S^2 < 0$. Щом интервалът между точките P_3 и O е пространствено-подобен интервал, то събитията в тези две точки са **причинно несвързани** (*казаното означава напр., че от т. O* ***не може*** *да се изпрати светлинен сигнал към т.* P_3*, който да предизвика в тази точка дадено събитие*).

Ето защо областта извън светлинния конус се нарича **абсолютно отдалечена област**. В тази област понятията „*по-рано*", „*по-късно*" и „*едновременно*" имат **относителен характер**.

Тема 4. Ковариантни величини

Ковариантни са тези величини (*скалари, вектори или тензори*), записването на природните закони посредством които обезпечава тяхната (*на уравненията*) **инвариантност относно преобразуванията на Лоренц** в псевдоевклидовото пространство $\boldsymbol{R^4}$.

В $\boldsymbol{R^4}$ могат да бъдат дефинирани следните Ковариантни величини:

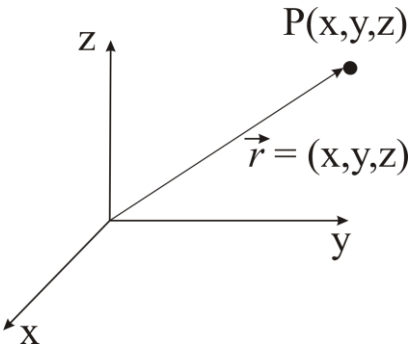
А) 4-скалари

Скаларът е еднокомпонентна величина, която при смяна на ИОС се трансформира по закона

$$a = a^{/}$$

Тази формула определя скалара като величина, независеща от избора на ИОС. **Пространствено-временният интервал** ΔS между две събития, както вече видяхме, е инвариантна величина, и следователно може да се разглежда като 4-скалар.

Б) 4-радиус-вектор.



В тримерното евклидово пространство точка с координати x, y, z е геометричен образ на радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ с компоненти съответно компонентите на точката.

По съвсем аналогичен начин координатите на една пространствено-временна точка (т.е. събитие) (ct, x, y, z) могат да се разглеждат като компоненти на **4-радиус-вектор**. Прието е тези компоненти да се означават по следния начин:

$$c.t = x^0; \qquad x = x^1; \qquad y = y^1; \qquad z = z^1,$$

или в по-кратък запис като **<u>4-радиус-вектор</u>**:

$\boxed{X \equiv X^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{r})}$, където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

(**Забележка**: за по-голяма яснота в бъдеще:

- с латински индекси i, j, k, l ще означаваме само **пространствените** компоненти на вектори;
- с гръцки индекси $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ ще означаваме **пространствено-временните** компоненти на 4-вектори.)

В горния запис на 4-радиус-вектор компонентата $\boxed{x^0}$ се нарича **временна компонента**, а $\boxed{\vec{r}}$ - **пространствена компонента** на 4-радиус-вектора.

На понятието „4-радиус-вектор" може да се даде и следното аналитично определение:

Определение: **4-радиус-вектор** е величина с 4 компоненти, която при смяна на координатната система (КС) се трансформира по закона

(1) $\quad X^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}.X^{/\nu}$,

където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

В горния запис Λ^{μ}_{ν} е следната матрица

(2) $$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където са използвани означенията

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ а } \beta = \frac{v}{c}.$$

С отчитането на (2) трансформационният закон (1) за 4-радиус-вектор може да се запише във вида

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}.$$

Горното матрично равенство може да бъде записано във вида

(1$^{/}$) $$\left| \begin{array}{l} x^0 = \gamma.x'^0 + \beta\gamma.x'^1 \equiv \gamma(x'^0 + \beta.x'^1) \\ x^1 = \beta\gamma.x'^0 + \gamma.x'^1 \equiv \gamma(x'^1 + \beta.x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{array} \right.$$

Равенствата (1$^{/}$) изразяват специалните трансформации на Лоренц за компонентите на 4-радиус-вектора. Обратните на (1$^{/}$) трансформации се получават с помощта на матрицата $\Lambda^{-1}(\beta) \equiv \Lambda(-\beta)$.

Формулите (1$^{/}$) изразяват трансформационния закон на т.нар. **<u>контравариантни компоненти</u>** на 4-радиус-вектора X^{μ} (където $\mu = 0, 1, 2, 3$). А понякога се казва още, че формули (1$^{/}$) изразяват т.нар. **<u>контравариантен запис</u>** на трансформационния закон на 4-радиус-вектора X^{μ}.

Въвеждат се също и **<u>ковариантни компоненти</u>** на 4-радиус-вектора X_{μ} (където $\mu = 0, 1, 2, 3$).

Едно **формално различие** между **ковариантни** и **контравариантни** компоненти е, че първите са с **долен индекс**, а вторите – с **горен индекс**.

Връзката между въведените **ковариантни** и **контравариантни** компоненти се дава с матричното равенство

(3) $x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

В горното равенство величината $g_{\mu\nu}$ се определя с представянето

(4) $$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases}, \text{ т.е. } g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В дясната страна на (3) по повтарящи се долен и горен индекс се подразбира сумиране от 0 до 3. Понякога вместо (3) може да се използва още връзката

(3$^{/}$) $x^{\mu} = g^{\mu\nu}x_{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

С помощта на (3) и (4) ще получим представяне в явен вид на 4-радиус-вектора в ковариантен запис:

- при $\mu = 0$ (и $\nu = 0$) имаме $g_{00} = 1$, $\Rightarrow$ $x_0 = g_{00}.x^0 = 1.x^0 \equiv x^0$;

- при $\mu = 1$ (и $\nu = 1$) имаме $g_{11} = -1$, $\Rightarrow$ $x_1 = g_{11}.x^1 = (-1).x^1 \equiv -x^1$;

- при $\mu = 2$ (и $\nu = 2$) имаме $g_{22} = -1$, $\Rightarrow$ $x_2 = g_{22}.x^2 = (-1).x^2 \equiv -x^2$; и

- при $\mu = 3$ (и $\nu = 3$) имаме $g_{33} = -1$, $\Rightarrow$ $x_3 = g_{33}.x3 = (-1).x^3 \equiv -x^3$.

В по-обозрим запис получаваме, че

$$\boxed{x_0 = x^0; \qquad x_1 = -x^1; \qquad x_2 = -x^2, \text{ и } x_3 = -x^3.}$$

Лесно се вижда, че в ковариантен запис временната компонента ($\mu = 0$) не променя знака си, обаче пространствените компоненти ($\mu = 1, 2, 3$) променят знака си.

<u>Извод</u>: **контравариантния** X^μ и **ковариантния** X_μ **4-радиус-вектори** имат **<u>еднакви</u> времени компоненти** ($x_0 = x^0$), но **<u>противоположни</u> пространствени компоненти** ($x_i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3$).

Казаното може да се обобщи със следните две представяния

(5) $\quad X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{r})$, докато

($5^/$) $\quad X_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \equiv (x^0, -\vec{r})$.

Квадратът X^2 **на 4-радиус-вектора** може да се получи с помощта на известното вече представяне за квадрата S^2 на пространствено-времения интервал между две точки (събития) в псевдоевклидовото пространство, при положение че едната от тях има координати, равни на нула:

(6) $\quad S^2 \equiv X^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$ *… от (5) и ($5^/$) …*

…… $\quad = (x^0)(x_0) - (x^1)(-x_1) - (x^2)(-x_2) - (x^3)(-x_3) = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$.

И така показахме, че квадратът X^2 на 4-радиус-вектора е

$\boxed{X^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 \equiv x^\mu x_\mu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, и по повтарящия се индекс μ се извършва сумиране.

Ако отчетем факта, че $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv x_i^{\,2}$ за $i = 1, 2, 3$, то от (6) ще получим

($6^/$) $\quad X^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^0)^2 - r^2$.

Нека в заключение отбележим, че е без значение компонентите на кой вектор (ковариантния или контравариантния) стоят на първо място в израза за X^2, т.е. в сила е

$\boxed{X^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - r^2}$.

В) 4-вектор

По аналогия с трикомпонентните вектори, дефинирани в тримерното евклидово пространство, какъвто е например векторният магнитен потенциал

$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A^1, A^2, A^3)$,

могат да се дефинират и вектори в четиримерното псевдоевклидово пространство, които следва да се нарекат **4-вектори** (т.е. 4-компонентни величини), имащи представяне от вида

$\boxed{A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A})}$.

И тук, както при 4-радиус-вектор, се различават два типа компоненти на 4-вектор: **контравариантни** A^μ и **ковариантни** A_μ.

Определение: **контравариантен** 4-вектор е величина с 4 компоненти, която при преход от една КС в друга се трансформира по закона

(7) $\quad A^\mu = \Lambda^\mu_\nu . A^{/\nu}$,

където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Следвайки аналогията с 4-радиус-вектора, можем да запишем още, че ковариантният запис на един 4-вектор се получава от равенството

$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

и има вида

$$\boxed{A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \equiv (A^0, -\vec{A})},$$

т.е. контравариантният A^μ и ковариантният A_μ 4-вектори имат **еднакви временни** и **противоположни пространствени** компоненти.

Скаларният квадрат A^2 на 4-вектор се дава с израза

(8) $\quad A^2 = (A.A) = A^\mu A_\mu = A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - (\vec{A})^2$.

А ако имаме два 4-вектора $A = (A^0, \vec{A})$ и $B = (B^0, \vec{B})$, то **скаларното им произведение** в 4-мерното пространство се дефинира по следния начин

(9) $\quad (A.B) = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 B^0 - (\vec{A}.\vec{B})$.

Г) 4-тензори

Определение: контравариантен тензор от II ранг е величина с 4x4=16 компоненти, която при смяна на КС се трансформира по закона (трансформационен закон за 4-тензор)

(10) $\quad \Phi^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda . \Lambda^\nu_\sigma . \Phi^{/\lambda\sigma}$

Според мястото на индексите си 4-тензорите могат да бъдат:

- контравариантни $\Phi^{\mu\nu}$;
- ковариантни $\Phi_{\mu\nu}$;
- смесени $\Phi_\mu{}^\nu$ или $\Phi^\mu{}_\nu$, като тук има значение кой индекс (първи, т.е. ляв, или втори, т.е. десен) е ковариантен (т.е. долен) и кой – контравариантен (т.е. горен), поради което в общия случай $\Phi_\mu{}^\nu \neq \Phi^\mu{}_\nu$.

При 4-тензорите първият (левият) индекс е индекс на ред, докато вторият (десният) индекс е индекс на стълб от 4x4-матрицата, чрез която се представя аналитично този тензор. Например един контравариантен тензор $\Phi^{\mu\nu}$ и един тензор от смесен тип $\Phi^\mu{}_\nu$ се представят посредством следните матрици

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \Phi^0{}_0 & \Phi^0{}_1 & \Phi^0{}_2 & \Phi^0{}_3 \\ \Phi^1{}_0 & \Phi^1{}_1 & \Phi^1{}_2 & \Phi^1{}_3 \\ \Phi^2{}_0 & \Phi^2{}_1 & \Phi^2{}_2 & \Phi^2{}_3 \\ \Phi^3{}_0 & \Phi^3{}_1 & \Phi^3{}_2 & \Phi^3{}_3 \end{pmatrix}.$$

В алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „сваляне” и „качване” на индекс(и), като се следва едно общо **<u>правило</u>**: когато индексът е „0” (т.е. **временен индекс**), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (т.е. **пространствен индекс**), то знакът на компонентата на тензора **се променя**.

Например имаме:

☞ $\Phi_{01} = \Phi^0{}_1$, понеже е „качен” „временен” индекс 0;

☞ $\Phi_{01} = -\Phi_0{}^1$, понеже е „качен” „пространствен” индекс 1;

☞ $\Phi_{01} = -\Phi^{01}$, понеже са „качени” „временен” индекс 0 и „пространств.” индекс 1;

☞ $\Phi^{13} = -\Phi_1{}^3$, понеже е „свален” „пространствен” индекс 1;

☞ $\Phi^{13} = \Phi_{13}$, понеже са „свалени” 2 „пространствени” индекса 1 и 3, всеки един от които променя знака, обаче двата заедно дават принос $(-1).(-1) = +1$ и следователно не променят знака на компонентата на тензора;

☞ $\Phi^{13} = -\Phi^{1}{}_{3}$, понеже е „свален” „пространствен” индекс 3; и т.н.

Когато $\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}$, то тензорът се нарича **<u>симетричен тензор</u>** (елементите на тензора, разположени симетрично относно главния му диагонал, са **равни по големина**).

А когато $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$, то тензорът се нарича **<u>антисиметричен тензор</u>** (елементите на тензора, разположени симетрично относно главния му диагонал, са **противоположни по големина**).

Сега не е трудно да се убедим, че въведената с равенство (4) величина $g_{\mu\nu}$ представлява 4-тензор от II , наречен **<u>метричен тензор</u>**. Той се представя в следния явен вид

$$(4^{/}) \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и очевидно е **ковариантен симетричен тензор**. Той е изключителен със свойството си, че компонентите му са едни и същи във всяка ИОС, т.е. те са *инвариантни компоненти*.

Чрез метричния тензор се изразява връзката между ковариантни и контравариантни компоненти на 4-вектор, както и скаларен квадрат на 4-вектор, а именно:

$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu}$, или $A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}$, където $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, а $\boxed{g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}}$.

$X^{2} = X^{\mu}.X_{\nu} = g_{\mu\nu}X^{\nu}X^{\mu} \equiv S^{2}$, както и квадратът на безкрайно малкия пространствено-временен интервал

(11) $\quad (dS)^{2} = g_{\mu\nu}dX^{\mu}dX^{\nu}$.

От определението за антисиметричен тензор, дадено по-горе, следва, че този тензор има нули по главния си диагонал, а останалите му (недиагонални) елементи, разположени симетрично относно диагонала, са равни по големина и противоположни по знак, т.е.

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ -\Phi^{01} & 0 & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ -\Phi^{02} & -\Phi^{12} & 0 & \Phi^{23} \\ -\Phi^{03} & -\Phi^{13} & -\Phi^{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

От горното представяне следва, че един антисиметричен тензор от II ранг има 6 независими компоненти – **или** тези <u>над главния диагонал</u>, **или** тези <u>под него</u>. Следователно тези компоненти могат да се разглеждат като компоненти на два тримерни вектора:

- полярен $\vec{p} = (\Phi^{01}, \Phi^{02}, \Phi^{03})$, и

- аксиален $\vec{a} = (-\Phi^{23}, \Phi^{13}, -\Phi^{12})$**.**

С помощта на компонентите на тези два вектора могат да бъдат изразени компонентите на антисиметричния тензор $\Phi^{\mu\nu}$

$$\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

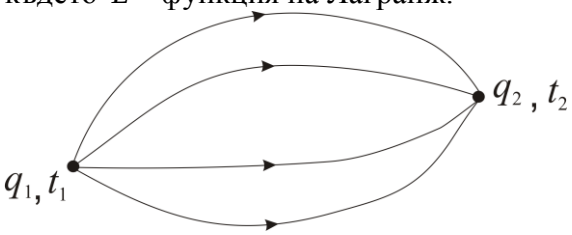
Тема 5. Релативистична механика на материална точка

Уравнението на движение на материална точка в нерелативистката механика $\vec{F} = m.\vec{a}$ е инвариантно относно трансформациите на Галилей. В класическата механика уравненията

на движение се получават от вариационния принцип на най-малкото действие. В този принцип се използва величината „действие”

$$(1) \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

където L - функция на Лагранж.



Интегралът (1) се взема между две **фиксирани точки 1** и **2** по траекторията на движение на системата, в които точки са известни **координатите** q_1 и q_2 на тази система, и **моментите време** t_1 и t_2, в които тя преминава (*трябва да премине*) през тях.

За **истинското движение** (по физична траектория) според вариационния принцип на най-малкото действие се приема движението по тази от множеството възможни траектории, за която **действието има минимум**, интегралът (1) приема минимална стойност, и следователно

$$\delta S = 0,$$

т.е. **вариацията на действието е нула**.

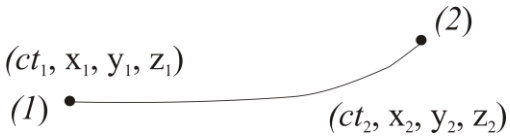
Механиката на релативистични частици може да се изгради на същия принцип (*принцип на най-малкото действие*), предвид неговата универсалност. Но за да се получат релативистично-инвариантни уравнения на движение, действието S, **<u>което се определя чрез постулиране</u>**, трябва да отговаря на няколко **условия** (изисквания):

1.) Действието **не трябва да зависи от избора на ИОС**, т.е. то трябва да бъде инвариантно относно трансформациите на Лоренц. Ето защо действието трябва да бъде **<u>скаларна величина</u>**, инвариантна относно трансформациите на Лоренц, и независеща от избора на КС.

2.) Действието трябва да се изразява чрез интеграл от скалар, като освен това, **подинтегралният израз трябва да съдържа диференциал от първа степен**. Това изискване произтича от нерелативистичната механика и изразява факта, че механичното състояние на една система се определя еднозначно, когато са известни **координатите** и **скоростите** на тази система в даден (начален) момент.

А самите релативистични уравнения на движението следва да бъдат **диференциални уравнения от най-много втори ред**.

Нека разгледаме най-напред движението на свободна релативистка материална точка (частица). Тя не си взаимодейства с други обекти (частици или полета), и следователно скоростта й на движение остава постоянна $\vec{v} = const$.



При отсъствието на каквито и да е сили (или полета) единствената релативистично-инвариантна величина, която характеризира движението на свободната частица в пространство-времето, е безкрайно-малкия **пространствено-временният интервал** ds между <u>две безкрайно близки събития, свързани с частицата</u>. Очевидно ds е <u>точно онзи</u> **диференциал от първа степен**, за присъствието на който в интеграла (1) бе споменато по-горе.

Както вече е известно

$$ds \equiv (c.dt)^2 - \left| d\vec{r} \right|^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Следователно действието S може да бъде изразено чрез интервала ds, като се представи във вида

$$(2) \qquad S = \int_1^2 \alpha \,.\, ds,$$

където α е инвариантна константа, характеризираща дадената частица.

Представянето за действието S, зададено чрез (2), отговаря на дефинираните по-горе условия (изисквания) за величината „действие”, следователно може да послужи като основа за следващите разглеждания (*това е всъщност „нашето” действие*).

Интегралът (2) се взема от точка (събитие) 1 до точка (събитие) 2 в пространство-времето **по мировата линия**. При тези обстоятелства за безкрайно-малкият пространствено-временен интервал ще имаме (*изразът е получен в предишен въпрос*)

(3) $$d\,s = c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ .$$

Заместваме (3) в (2) и получаваме

(4) $$S = \alpha.\int_{t_1}^{t_2} c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\,.$$

По този начин времето t става интеграционна променлива, като t_1 и t_2 са моментите време, в които системата (частицата) заема състоянията (1) и (2) в 4-мерното пространство-време (виж чертежа).

От сравняването на (4) и (1) можем да заключим, че функцията на Лагранж, описваща движението (състоянието) на една свободна релативистична частица, се дава с

(5) $$L = \alpha.c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ .$$

За да бъде напълно коректен анализът, който правим за релативистичния случай $(v \le c)$, трябва изразът за лагранжиана (5) в нерелативистичния случай $(v << c)$ да премине в лагранжиан на свободна нерелативистична частица, даващ се с израза

(6) $$L_{Клас.механ.}.\frac{m.v^2}{2}\ .$$

Ще покажем, че горното изискване е изпълнено. Действително при $v << c$, т.е. при $\frac{v}{c} << 1$ квадратният корен $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ може да бъде „развит” в ред по степените на $\frac{v}{c}$, а именно

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+.....,$$

където поради това, че $\frac{v}{c} << 1$, членовете съдържащи по-високи степени на $\frac{v}{c}$ се пренебрегват. След заместване на това редово развитие в (5) получаваме

(7) $$L = \alpha.c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \alpha.c.\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+.....\right) \approx \alpha.c-\frac{\alpha}{2}\frac{v^2}{c} = const+\left(-\frac{\alpha}{c}\right)\frac{v^2}{2}\,.$$

Ако пренебрегнем константата $\alpha.c$ и положим

(8) $$-\frac{\alpha}{c} = m\,,\ \text{т.е.}\ \boxed{\alpha = -m.c},$$

то изразът (7) за „релативистичния” лагранжиан придобива точно „класическият” вид (6), което трябваше да докажем.

Заместваме константата α от (8) в уравнения (2), (4) и (5), и получаваме последователно

(2$^{/}$) $$S = -m.c\int_1^2 ds\,;$$

(4$^{/}$) $$S = -m.c^2.\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\,,\ \text{и}$$

$$(5^{/}) \qquad L = -m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ .$$

След като функцията на Лагранж за релативистка свободна частица е намерена, можем да пристъпим към определянето на уравнението на движение на тази частица. За целта използваме уравненията на Лагранж

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ за } i = 1, 2, ..., s,$$

където s е броя на степените на свобода на системата (частицата). В случая, който разглеждаме (една свободна частица) този брой е $s = 3$. Ето защо ако в качеството на обобщени координати вземем декартовите координати на частицата, то уравнението на Лагранж (във векторен запис) ще има вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Както непосредствено се вижда от ($5^{/}$) обаче, $L \neq L(\vec{r})$, т.е. $L = L(\vec{v})$, следователно

$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$, откъдето следва, че и $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$, т.е.

$$(9) \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const.$$

Щом (9) е в сила, то $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ е интеграл на движението, т.е. уравнението (9) е точно търсеното от нас уравнение на движение на релативистката свободна частица.

Понеже съгласно лагранжевия формализъм величините

$$p_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, ..., s,$$

имат смисъл на **обобщени импулси**, то очевидно (във векторен запис) величината $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ е **релативистичният импулс** на тази частица, и той, съгласно (9), се запазва постоянен, т.е.

$$(9^{/}) \qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \equiv const.$$

Нека определим в явен вид от ($9^{/}$) релативистичният импулс на частицата:

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(L) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(-m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right) = -mc^2.\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

И така

$$(10) \qquad \boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$ - импулс на релативистка частица.

Следвайки лагранжевия формализъм, можем да определим още енергията ε на релативистката частица, използвайки за тази цел формулата

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\cdot\vec{v} - L \equiv \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \left(-m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right) =$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + m.c^2.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \times \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$, т.е.

(11) $\boxed{\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$ - енергия на свободна релативистка частица.

Нека въведем означението

(12) $m^* = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$,

където m^* е т.нар. **релативистична маса** на частицата, **зависеща от скоростта $\vec{v}$, с която тя се движи**. В <u>нерелативистичния случай</u> $v << c$, т.е. при $\frac{v}{c} << 1$ очевидно ще бъде изпълнено $\boxed{m^* \to m}$, т.е. релативистичната маса преминава в маса (в класически смисъл).

С помощта на релативистичната маса m^* можем да запишем получените до момента представяния за импулса и енергията във вида

($10^{/}$) $\vec{p} = m^* \vec{v}$ - импулс на релативистка частица; и

($11^{/}$) $\varepsilon = m^* c^2$ - енергия на свободна релативистка частица.

Ако скоростта, с която се движи частицата, е $v = 0$, то съгласно (12) $m^* = m$, и от ($11^{/}$) получаваме представяне за т.нар. **<u>енергия на покой</u>**

(13) $\boxed{\varepsilon_0 = m.c^2}$ - формула на Айнщайн за енергия в покой.

Нека развием израза (11) за енергията на релативистка частица в ред по степените на $\frac{v}{c}$, както по-горе това бе направено за лагранжиана L. При $\frac{v}{c} << 1$ квадратният корен $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ може да бъде „развит" в ред по степените на $\frac{v}{c}$, а именно

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ... \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

където поради това, че $\frac{v}{c} << 1$, членовете съдържащи по-високи степени на $\frac{v}{c}$ се пренебрегват. След заместване на това редово развитие в (11) получаваме

(14) $$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + mc^2\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = const + E_k,$$

където с E_k е обозначена **релативистичната кинетична енергия** на свободната релативистка частица, а константата mc^2, съгласно (13), е равна на енергията в покой ε_0 на тази частица. Следователно релативистичната кинетична енергия на частицата може да бъде определена от (14) като разлика между **пълната енергия** ε и **енергията в покой** ε_0 на тази частица

(15) $$E_k = \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Очевидно в нерелативистично приближение, т.е при $\frac{v}{c} << 1$, $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$,

и следователно

$$E_k = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = mc^2\,\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{mv^2}{2} \equiv T$$, т.е.

$$E_k \to T,$$

където T е „класическата” кинетична енергия на нерелативистка частица (*частица, движеща се с малка скорост* $v << c$).

Според (10), (11) и (12) **не може да се наблюдава движение на материален обект със скорост** $v \geq c$, понеже участващият в тези формули квадратен корен става имагинерно число, което е лишено от физически смисъл**.**

Тези формули отхвърлят възможността $v \geq c$**, обаче** те не отхвърлят възможността да съществува материален обект, имащ маса в покой $m = 0$, който да се движи със скорост $v = c$. Такива материални обекти съществуват и това са **<u>фотоните</u>**, за които (<u>засега</u>) се счита, че имат **маса в покой** $m = 0$.

Запазването на масите в класическата (нерелативистката) механика се разглежда като природен закон. В релативистката механика, обаче, **<u>този закон не е в сила</u>**. Действително, ако законът за запазване на масите бе в сила, то би трябвало общата маса m на една система от частици да се представи като сбор от масите на отделните частици, т.е.

$$m = \sum_i m_i .$$

Ако това равенство умножим (формално) със c^2, ще получим

$$mc^2 = \sum_i m_i c^2, \text{ т.е. } \varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i ,$$

където $\varepsilon_0 = mc^2$ и $(\varepsilon_0)_i = m_i c^2$ са масите в покой на цялата система и на i-тата частица от тази система. Обаче равенството

$$\varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i$$

е **некоректно** в релативистката механика, понеже енергията в покой на едно тяло се състои **не само** от енергиите в покой на неговите съставни частици, **но включва още и <u>енергията на взаимодействие</u>** $\varepsilon_{âç}$ между тези частици. Следователно **коректно** в <u>релативистката механика</u> ще бъде равенството

$$\boxed{\varepsilon_0 = \sum_i (\varepsilon_0)_i + \varepsilon_{âç}}, \text{ или още } \boxed{mc^2 = \sum_i m_i c^2 + \varepsilon_{âç}}.$$

След разделяне на второто от горните равенства със c^2 се получава

$$m = \sum_i m_i + \frac{\varepsilon_{âç}}{c^2},$$

откъдето следва, че $\boxed{m \neq \sum_i m_i}$, т.е. **законът за запазване на масите действително <u>не е изпълнен</u> в релативистката механика**.

Дефектът на масите („масов дефект”) Δm

$$\Delta m = \sum_i m_i - m \equiv -\frac{\varepsilon_{âç}}{c^2}$$

се изразява (зависи) от енергията на взаимодействие $\varepsilon_{âç}$ между частиците от системата. Прието е величината $\Delta m.c^2 = \varepsilon_{âð}$ да се нарича **<u>енергия на връзката</u>** на системата от частици.

Ако приложим тези разглеждания за конкретна материална система, напр. **атомно ядро**, изградено от определен брой **нуклони** (протони и неутрони), то оказва се, че **масата на атомното ядро** m **е по-малка от сбора от масите** $\sum_i m_i$ **на нуклоните, които го изграждат**, т.е. масовият дефект за ядрото ще бъде

$$\Delta m = \sum_i m_{N\,i} - m_ß > 0,$$

а **енергията на връзката на ядрото** ще бъде $\varepsilon_{âð} = \Delta m.c^2 > 0$, и тя ще обезпечи стабилност на ядрото.

Извод: от направените разглеждания следва, че в релативистичната механика **не е изпълнен закона за запазване на масата**, <u>но е в сила</u> **законът за запазване на енергията** (**ЗЗЕ**).

Ковариантна форма на уравненията на движение

В класическата механика уравнението на движение на частица с маса m

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

е инвариантно относно трансформациите на Галилей, но не и относно трансформациите на Лоренц. За да изразява горното равенство коректен природен закон, то трябва да бъде записано в **ковариантна форма** (*форма, инвариантна относно трансформациите на Лоренц при смяна на ИОС*). За целта е необходимо да бъдат въведени (*още*) някои важни 4-векторни величини, а именно: **4-скорост**, **4-ускорение**, **4-импулс** и **4-сила**.

1. Въвеждане на 4-скорост

Въвежда се аналогично на вектора на скоростта в тримерното пространство, който е $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Така ако запишем производните по **собственото време** $d\tau$ (*понеже е инвариант*) на **компонентите на 4-радиус-вектора** X^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, то съвкупността от тези 4 производни ще даде компонентите на **нов 4-вектор** u^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, който ще наречем **4-скорост**.

И така по горната дефиниция

$$(16) \qquad u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}, \ \mu = 0, 1, 2, 3,$$

където 4-радиус-векторът се представя във вида

$$X = (x^0, \vec{r}) \equiv (ct, \vec{r}),$$

а собственото време (инвариант) $d\tau$ се изразява чрез координатното време dt посредством съотношението

$$d\tau = dt\,.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\,.$$

Ще търсим представяне за 4-скоростта в типичен за 4-векторите вид

$u = (u^0, \vec{u})$, или още $u = (u^0, u^1, u^2, u^3)$,

т.е. във вид, в който са обособени една временна компонента u^0 и три пространствени компоненти $\vec{u}$ (*компоненти на 3-мерен вектор* (u^1, u^2, u^3)). За да получим тези компоненти в явен вид, използваме дефиниционното равенство (16)

- при $\mu = 0 \quad u^0 = \dfrac{dX^0}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{c.t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$;

- при $\mu = 1 \quad u^1 = \dfrac{dX^1}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$;

- при $\mu = 2 \quad u^2 = \dfrac{dX^2}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$; и

- при $\mu = 3 \quad u^3 = \dfrac{dX^3}{d\tau} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{V_z}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$.

Очевидно пространствената част на 4-скоростта се дава с 3-мерния вектор

$$\boxed{\vec{u} = (u^1, u^2, u^3) = \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}}.$$

Накрая „композираме” целия вектор на 4-скоростта

(17) $$u = (u^0, \vec{u}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right).$$

Лесно може да се установи, че

(18) $$u^2 = u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = \frac{c^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} - \frac{V^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}} = \frac{c^2 - V^2}{\left(\dfrac{c^2 - V^2}{c^2}\right)} = c^2 = const.$$

2. Въвеждане на 4-ускорение

Следвайки класическата дефиниция за ускорение можем да дефинираме компонентите на този 4-вектор посредством равенствата

(19) $a^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, или още $a^\mu = \dfrac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}$.

След диференциране на 4-скоростта u^μ по собственото време $d\tau$ се оказва, че векторите на 4-скоростта и 4-ускорението са ортогонални, т.е.

(20) $a.u = 0$.

Горното съотношение може да се докаже и директно по следния начин: използваме, че както бе доказано в (18)

$u^2 = c^2 = const$,

следователно ако диференцираме по собственото време $d\tau$ тази константна величина, ще имаме

$\frac{d}{d\tau}(u^2) = 2.u.\frac{du}{d\tau} \equiv 0$, т.е.

$u.\frac{du}{d\tau} \equiv u.a = 0$, което доказва (20).

3. Въвеждане на 4-вектора „енергия-импулс" (4-импулса)

Компонентите на този вектор се въвеждат с дефиниционното равенство

(21) $P^{\mu} = m.u^{\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$.

Както всеки 4-вектор той може да се представи в следния стандартен вид

$P = (p^0, \vec{p})$,

който може да бъде получен след прилагането на (21):

- при $\mu = 0$ $\quad p^0 = m.u^0 = m\frac{c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = m\frac{c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{c}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \frac{\varepsilon}{c}$;

- при $\mu = 1$ $\quad p^1 = m.u^1 = m\frac{V_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m.V_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv p_x$;

- при $\mu = 2$ $\quad p^2 = m.u^2 = m\frac{V_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m.V_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv p_y$;

- при $\mu = 3$ $\quad p^3 = m.u^3 = m\frac{V_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m.V_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \equiv p_z$.

Така достигаме до представянето

(22) $\boxed{P = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)}$.

Нека определим скаларния квадрат P^2 на този 4-вектор:

а) от една страна, изхождайки направо от дефиниционното съотношение (21), имаме

$P^2 = (m.u)^2 = m^2u^2 =$ ….. *съгласно (18)* $u^2 = c^2$ …… $= m^2c^2$.

б) от друга страна по дефиниция за квадрат на контравариантен 4-вектор

$P^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^2$.

Приравнявайки десните страни на получените в (а) и (б) равенства, ще имаме

$m^2c^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^2$, или след умножаване с c^2

(23) $\boxed{\varepsilon^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$.

Горното съотношение е много важно и полезно, защото дава релативистичното съотношение между енергията и импулса на една релативистична частица. От (23) след коренуване получаваме

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = mc^2\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2c^2}{m^2c^4}} = mc^2\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \equiv mc^2\sqrt{1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2}.$$

Лесно може да се установи, че в нерелативистично приближение, т.е. при $\left|\frac{\vec{p}}{mc}\right| << 1$, ще имаме

$$\varepsilon = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2} = mc^2\left[1+\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2+.....\right] \approx mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2\right] =$$

$$= mc^2 + mc^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}}{mc}\right)^2 = const + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$, т.е. при $\left|\frac{\vec{p}}{mc}\right| << 1$

$$\boxed{\varepsilon \to \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + const},$$

което е всъщност **класическата формула** за енергията.

4. Въвеждане на 4-сила

По дефиниция

(24) $F^{\mu} = m.a^{\mu} \equiv m.\frac{du^{\mu}}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, или още

(25) $F^{\mu} = \frac{d(m.u^{\mu})}{d\tau} \equiv \frac{d\,P^{\mu}}{d\tau}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Равенството (25) изразява **основното уравнение на релативистичната динамика**, което е обобщение на уравнението на Нютон за пространство-времето.

Нека представим 4-силата в стандартния за 4-вектори вид

$F = (F^0, \vec{f})$, където $\vec{f} = (F^1, F^2, F^3)$

и за целта използваме (25), както и това, че $d\tau = d\,t\,.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$:

- при $\mu = 1$ $\quad F^1 = \frac{dP^1}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(P_x) = \frac{d}{d\,t}\left[\frac{P_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right] = \frac{\frac{dP_x}{d\,t}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$;

- аналогично за $\mu = 2$ и $\mu = 3$ ще имаме

$$F^2 = \frac{dP^2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(P_y) = ... = \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad F^3 = \frac{dP^3}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(P_z) = ... = \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

откъдето, обобщавайки горните 3 представяния, получаваме за пространствената част $\vec{f}$ на 4-силата следното представяне

(27) $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, където $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ е класическата Нютонова сила.

Малко по-специфично се определя компонентата F^0:

- при $\mu = 0$

(26) $$F^0 = \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = \frac{d}{d\,t}\left[\frac{\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right] = \frac{d}{d\,t}\left[\frac{\varepsilon}{c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right].$$

Но директното определяне на тази производна е неудобно. Затова използваме, че (*както вече бе доказано*) 4-скоростта и 4-ускорението са ортогонални, т.е.

$a.u = 0$,

откъдето след умножаване с масата m получаваме равенството

$(m.a).u = 0$, т.е. $F.u = 0$.

Последното равенство изразява факта, че **4-силата и 4-скоростта са също ортогонални**.

Ако доказаното равенство $F.u = 0$ разпишем по компоненти, т.е.

$$F^0 u^0 - \vec{F}.\vec{u} = 0,$$

то можем да изразим F^0 така

$$F^0 = \frac{\vec{F}.\vec{u}}{u^0} = \frac{\left[\vec{F}\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}\right].\left[\vec{V}\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}\right]}{c\Big/\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}, \text{ т.е.}$$

$$(28) \qquad \boxed{F^0 = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}}.$$

Накрая „сглобяваме” вектора 4-сила:

$$(29) \qquad F = (F^0, \vec{f}) = \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \right).$$

Нека сравним десните страни на равенства (26) и (28), изразяващи компонентата F^0 на 4-силата по два различни начина:

$$F^0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right], \text{ и}$$

$$F^0 = \frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

следователно

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{V}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}}.$$

С горното равенство се дефинира изменението на енергията (т.е. работата) за единица време. Действително, както е известно

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

следователно (при $\vec{F} = const$)

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{F}\cdot\vec{V}.$$

Доказаното съотношение позволява да запишем

$$(30) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V} = \frac{dA}{dt}.$$

Накрая ще запишем един релативистично инвариантен закон, който обединява в едно два класически закона за запазване – ЗЗЕ и ЗЗИ. Този закон се изразява посредством 4-вектора „енергия-импулс” по следния начин

$$(31) \qquad \frac{dP^\mu}{d\tau} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Като се има предвид представянето (22) за този четиривектор, а именно $P = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)$, то:

а) при $\mu = 0$ ще имаме $\frac{dP^0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \equiv \frac{1}{c}\frac{d\varepsilon}{d\tau} = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon = const}$, т.е. ЗЗЕ!

б) при $\mu = 1, 2, 3$ ще имаме $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{p} = const}$, т.е. ЗЗИ!

Тема 6. Електромагнитни взаимодействия в релативистичната механика. Движение на частица в зададено електромагнитно поле

За получаване на уравненията на движение се използва вариационния принцип на Хамилтон, според който за **истинско движение** (по физична траектория) се приема движението по тази от множеството възможни траектории, за която **действието** S **има минимум**, т.е. **вариацията на действието е нула**

$\delta S = 0$.

За целта е необходимо по възможно най-коректен начин да се дефинира величината „**действие**”. Приема се, че за система, състояща се от **електромагнитно поле** (*за краткост – поле*) и **частици**, действието се определя чрез представянето

(1) $S = S_ч + S_п + S_{вз}$,

където:

$S_ч$ - действието за частици, считани за свободни (*действие, зависещо само от свойствата на частиците*). То се определя чрез постулиране и се изразява посредством пространствено-времевия интервал s чрез съотношението $S_ч = -mc\int_1^2 ds$;

$S_п$ - действие, зависещо само от свойствата на полето (*действие за полето*);

$S_{вз}$ - частта от действието, описваща взаимодействието на частиците с електромагнитното поле.

$S_п$ и $S_{вз}$, подобно на известното вече $S_ч$, се определят чрез постулиране. При това тъй като полето е зададено (*счита се за зададено*), то $S_п$ не играе никаква роля при разглеждания проблем, защото дава константен (неизменен) принос към лагранжиана, който принос при съставянето на уравненията на Лагранж (чрез диференциране) се елиминира (изчезва) напълно. За удобство ще считаме дори, че $S_п$ е известно.

За определянето на $S_{вз}$ чрез постулиране ще наложим следните изисквания:

1.) $S_{вз}$ следва да бъде инвариантна величина (*скалар*);

2.) $S_{вз}$ следва да се изразява чрез интеграл, под знака на който може да стои диференциал от I степен; и

3.) $S_{вз}$ следва да съдържа характеристики (*величини*), отнасящи се до **заряда** (големина, знак и др) и до **полето**.

За дефинирането (*чрез постулиране*) на действието $S_{вз}$ се налага да се въведе и дефинира един нов 4-вектор, наречен **4-потенциал**. Този 4-вектор се представя в следния стандартен (*за 4-вектори*) вид

$A^\mu = (A^0, \vec{A})$,

компонентите на който са съответно:

☞ $A^0 = \frac{\varphi}{c}$, където φ - **<u>скаларен</u> потенциал на ЕМ поле**;

☞ $\vec{A}$ - **<u>магнитен</u> векторен потенциал на ЕМ поле.**

В общия случай φ и $\vec{A}$ зависят от координатите и от времето, т.е. $\varphi = \varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$.

С помощта на 4-потенциала A действието $S_{вз}$ се представя (постулира) във вида

$$(3) \qquad S_{вз} = -\int_1^2 q\, A \cdot dx,$$

където с $dx = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \equiv (c.dt, d\,\vec{r})$ е обозначен 4-векторът на безкрайно-малкото преместване по мировата линия от състояние (1) до състояние (2).

Знакът „-„ се поставя, за да се отчете заряда на електрона, а величината ($A \cdot dx$), фигурираща в (3), следва да се разглежда като **скаларно произведение** на два **4-вектора**.

Заместваме намерените представяния за $S_ч$ (2) и за $S_{вз}$ (3) в (1), и получаваме ($S_п$ *не ни е необходимо*):

$$(4) \qquad S = -mc\int_1^2 ds - \int_1^2 q\, A \cdot dx.$$

Интегралите в (4) се вземат **по мировата линия** в моменти (1) и (2) съответно, следователно действието (4), изразено посредством лагранжиана на системата „частици-поле”, ще се представи още

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\ dt.$$

За безкрайно-малкия пространствено-временен интервал ds използваме познатото съотношение

$$d\,s = c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ ,$$

а скаларното произведение ($A \cdot dx$) представяме както следва

$$A \cdot dx = A^0 \cdot dx^0 - \vec{A} \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\varphi}{c}\right) \cdot c.d\,t - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\,t} \cdot d\,t = \varphi \cdot d\,t - \vec{A} \cdot \vec{V} \cdot d\,t \equiv (\varphi - \vec{A} \cdot \vec{V}) \cdot d\,t\ .$$

Заместваме тези два компонента в (4) и получаваме

$$(5) \quad S = -mc\int_{t_1}^{t_2} c.\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ - \int_{t_1}^{t_2} q\,(\varphi - \vec{A} \cdot \vec{V}) \cdot d\,t = -mc^2\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.d\,t\ - \int_{t_1}^{t_2} [q\,\varphi - q(\vec{A} \cdot \vec{V})] \cdot d\,t$$

или още

$$(5^{/}) \qquad \boxed{S = -\int_{t_1}^{t_2} \left[mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + q\,\varphi - q(\vec{A} \cdot \vec{V}) \right] d\,t}.$$

Сравнявайки ($5^{/}$) с представянето $\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\ dt}$ стигаме до заключението, че **функцията на Лагранж**, която описва адекватно движението на един (или повече) **заряд**(и) в **ЕМ поле** се дава с израза

$$(6) \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ - q\,\varphi + q(\vec{A} \cdot \vec{V}).$$

След като **лагранжианът** на системата „**частица-поле**” е <u>известен</u>, можем да пристъпим към прилагането на стандартния лагранжев формализъм за определяне **уравненията на движение** (уравнения на Лагранж), имащи вида

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ за } i = 1, 2, ..., s,$$

където s е броя на степените на свобода на частицата.

Величината

(7) $\vec{P} = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}}$

е **релативистичният импулс** на частицата, а **енергията** ε на релативистката частица се дава с

(8) $\varepsilon = \dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{V} - L$.

Ако в качеството на обобщени координати вземем декартовите координати на частицата, то уравнението на Лагранж (*във векторен запис*) ще има вида

(9) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \dfrac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$.

Нека определим $\vec{P}$ и ε от (7) и (8):

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - q\,\varphi + q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right) = -\frac{mc^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(-\frac{2.\vec{V}}{c^2}\right) + q\,\vec{A}, \text{ т.е.}$$

(10) $\boxed{\vec{P} = \dfrac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,\vec{A}}$,

като очевидно **първият член** в дясната страна на (10) е равен на **импулса** $\vec{p}$ **на свободна релативистка частица**

(11) $\vec{p} = \dfrac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$,

а **вторият член** отчита **<u>взаимодействието</u>** на частицата (*имаща заряд* q) **с ЕМ поле**, характеризиращо се с магнитен векторен потенциал $\vec{A}$. С отчитането на (11) обобщеният импулс на частицата в ЕМ поле ще се представи във вида

(12) $\boxed{\vec{P} = \vec{p} + q\,\vec{A}}$.

Енергията ε на релативистката частица се дава с

$$\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{V} - L = \left(\frac{m.\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,\vec{A}\right)\cdot\vec{V} - \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - q\,\varphi + q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right) =$$

$$= \frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,(\vec{A}\cdot\vec{V}) + mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + q\,\varphi - q\,(\vec{A}\cdot\vec{V}) = \frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} + q\,\varphi =$$

$$= \frac{m.V^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-V^2/c^2}\,\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,\varphi = \frac{m.V^2 + m.c^2 - m.c^2(V^2/c^2)}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,\varphi,$$

т.е.

(13) $\boxed{\varepsilon = \dfrac{m.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + q\,\varphi}$.

Очевидно енергията на частица, движеща се в ЕМ поле, представлява сбор от енергията $\dfrac{m.c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ на свободна релативистка частица, и енергията $q\,\varphi$, обусловена от електричното взаимодействие между частицата и полето, имащо скаларен потенциал φ.

Накрая остана да определим уравнението на движение на частицата в ЕМ поле, като за тази цел ще използваме уравнението на Лагранж (9), т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Нека най-напред определим производните:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = grad\ L = grad\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - q\,\varphi + q(\vec{A}\cdot\vec{V})\right) = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\ grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V})\,.$$

За да определим $grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V})$, използваме следната формула от векторния анализ

$$grad\,(U\cdot V) = U.Grad V + U\times rot\ V + V.Grad U + V\times rot\ U\,.$$

С нейното прилагане, отчитайки че $Grad\vec{V} = 0$ и $rot\vec{V} = 0$, ще имаме

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\ grad\,(\vec{A}\cdot\vec{V}) = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.Grad\,\vec{A} + \vec{V}\times rot\ \vec{A})$$, т.е.

(14) $$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}\,.$$

Ще ни бъде нужна и производната

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \ldots\ \textit{отчитаме, че}\ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P}\ \ldots = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}(\vec{p} + q\,\vec{A}) = \frac{d\,\vec{p}}{dt} + q\,\frac{d\,\vec{A}(x,y,z,t)}{dt} =$$

$$= \frac{d\,\vec{p}}{dt} + q\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{d\,\vec{p}}{dt} + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

Понеже $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, и още $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, то горния запис можем да представим окончателно във вида

(15) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,.$$

Заместваме производните (14) и (15) в уравнението на Лагранж (9) , т.е. в $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$, и получаваме уравнението:

$$\left[\frac{d\,\vec{p}}{dt} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] - [-\ q.\ grad\ \varphi + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}] = 0$$, или още

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} + q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q.\ grad\ \varphi - q.\,(\vec{V}.\nabla)\,\vec{A} - q.\vec{V}\times rot\ \vec{A} = 0\,,$$

откъдето след съкращения получаваме

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = -q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - q.\ grad\ \varphi + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}$$, или още

(16) $$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = q\left[-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi\right] + q.\vec{V}\times rot\ \vec{A}\,.$$

Ако въведем величината

(17) $$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad\ \varphi\,,$$

представляваща **интензитет на електричното поле**, и величината

(18) $$\vec{B} = rot\ \vec{A},$$

представляваща **индукция на магнитното поле**, то уравнение (16) добива вида

(19) $$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = q\,\vec{E} + q.\vec{V}\times\vec{B}\,.$$

Тъй като съгласно законите на динамиката производната от импулса $\frac{d\vec{p}}{dt}$ дава силата $\vec{F}$, действаща върху частицата, то можем да представим (19) във вида

(20) $\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q.\vec{V}\times\vec{B}}$.

Силата, определена чрез (20), се нарича **сила на Лоренц**. Могат да се разгледат и някои частни случаи:

- $\vec{E} = 0, \vec{B} \neq 0$ - чисто магнитно поле, и
- $\vec{E} \neq 0, \vec{B} = 0$ - чисто електрично поле.

За да определим работата, която върши всяко от двете полета при движението на частицата, нека умножим скаларно (20) със $\vec{V}$:

$$\vec{F}\cdot\vec{V} = q\vec{E}\cdot\vec{V} + q.(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V} = q\vec{E}\cdot\vec{V},$$

понеже смесеното произведение

$$(\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V} \equiv 0.$$

Както вече бе доказано (*в предишен въпрос*) величината

(21) $$\vec{F}\cdot\vec{V} = \frac{dA}{dt}$$

има смисъл на работа, извършена за единица време (*т.е. мощност*). С отчитането на всичко това стигаме до представянето

$$\frac{dA}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{V},$$

от което следва заключението, че **само електричното поле** $\vec{E}$ **върши работа**. Магнитното поле $\vec{B}$ не върши работа, то само „**закривява**" траекторията на частицата.

В заключение ще се спрем на въпроса за **избора** (*т.е. дали този избор е еднозначен или е нееднозначен*) на потенциалите φ и $\vec{A}$. Този въпрос е важен, защото посредством тези потенциали се изразяват векторните характеристики на ЕМ поле:

(17)☞ $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$ - **интензитет на електричното поле**; и

(18) ☞ $\vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}(\vec{r},t)$ - **индукция на магнитното поле**.

Нека вместо $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$ използваме потенциали $\varphi'(\vec{r},t)$ и $\vec{A}'(\vec{r},t)$, зададени със съотношенията

(22) $$\varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t};$$ и

(23) $$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + grad\ f(\vec{r},t),$$

където $f(\vec{r},t)$ е диференцируема функция.

Нека изразим, използвайки (17), интензитета $\vec{E}$ на електричното поле и индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле посредством „новите" потенциали $\varphi'(\vec{r},t)$ и $\vec{A}'(\vec{r},t)$:

а) от (17):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}'(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi'(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{A}(\vec{r},t) + grad\ f(\vec{r},t)] - grad\left[\varphi(\vec{r},t) - \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] - grad\ \varphi(\vec{r},t) + grad\left[\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}\right] =$$

$$= -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] - grad\ \varphi(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}[grad\ f(\vec{r},t)] = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\ \varphi(\vec{r},t)$$

б) от (18):

$\vec{B}(\vec{r},t) = rot\ \vec{A}^{/}(\vec{r},t) = rot\,[\vec{A}(\vec{r},t) + grad\ f(\vec{r},t)] = rot\ \vec{A}(\vec{r},t) + rot\ grad\ f(\vec{r},t) \equiv rot\ \vec{A}(\vec{r},t)$, понеже $rot[\,grad\ f(\vec{r},t)] \equiv 0$.

Извод: посредством (16) и (18) векторните характеристики на ЕМ поле $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се определят еднозначно от потенциалите φ и $\vec{A}$ на това поле. На **едно и също поле** $\vec{E}$ и $\vec{B}$, обаче, съответства широк кръг потенциали, зададени с условията (22) и 23). Казано с други думи полетата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са инвариантни (*неизменни*) относно трансформации на потенциалите φ и $\vec{A}$ от типа (22) и 23).

Очевидно потенциалите φ и $\vec{A}$ не са еднозначно определени. Посредством съотношенията (22) и 23), наречени **калибровъчни трансформации**, тези потенциали могат да се подбират така, както е най-удобно.

Калибровъчните трансформации (22) и 23) могат да бъдат записани в следната ковариантна векторна форма посредством 4-вектора на потенциала

(24) $\quad A_{\mu}^{/} = A_{\mu} - \dfrac{\partial f}{\partial X^{\mu}}$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$.

В заключение ще отбележим, че въпреки нееднозначността, с която са определени, потенциалите φ и $\vec{A}$ предлагат несъмнени удобства (*предимства*) и широко се използват в електродинамиката. **Най-очевидното предимство** от използването на φ и $\vec{A}$ вместо използването на $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се заключава в това, че задаването на полето посредством полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изисква познаването на 6 величини (6-те компоненти на $\vec{E}$ и $\vec{B}$), докато задаването на полето посредством φ и $\vec{A}$ изисква познаването само на 4 величини (една компонента на скалара φ и трите компоненти на вектора $\vec{A}$).

Тема 7. Ковариантна форма на уравненията на движение. Тензор на електромагнитното поле

Изведените уравнения на движение на частица в ЕМ поле са **релативистично инвариантни** (*т.е. те са в сила спрямо произволна ИОС*), обаче **не са ковариантни**, т.е. двете страни на тези уравнения **не са** 4-тензори от даден ранг. Необходимостта от търсене на **ковариантна форма на запис на уравненията на движение** се обяснява с няколко причини:

а) тримерният запис на уравненията на движение (*какъвто имаме до момента*) все още **не доказва** напълно (*и явно*) релативистичната инвариантност;

б) ковариантната форма позволява с помощта на трансформационни формули за ковариантни 4-тензори да се намерят **релативистичните закони за трансформация на векторите на полето** $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при смяна на ИОС.

Проблемът с ковариантната форма на уравненията на движение се решава чрез въвеждането на един **4-тензор** $F_{\mu\nu}$, наречен **<u>тензор на електромагнитното поле</u>**, чиито компоненти се изразяват чрез компонентите на ковариантния 4-потенциал A_{μ} посредством съотношението

(1) $\quad \boxed{F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \dfrac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}}$, за $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Нека припомним, че:

☞ **4-радиус-векторът** X^{μ} е 4-вектор с компоненти $X \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$;

☞ **4-потенциалът** A^{μ} е 4-вектор, който се изразява посредством **скаларния** φ и **векторния** $\vec{A}$ **потенциали** във вида

$$A=\left(\frac{\varphi}{c},\vec{A}\right)\equiv(A^0,A^1,A^2,A^3)=\left(\frac{\varphi}{c},A_x,A_y,A_z\right).$$

Чрез потенциалите φ и $\vec{A}$ се изразяват и **полевите вектори** $\vec{E}$ и $\vec{B}$:

(*) $\vec{E}(\vec{r},t)=-\dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-grad\ \varphi(\vec{r},t)$, т.е.

$$\boxed{E_x=-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}},\quad \boxed{E_y=-\frac{\partial A_y}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}},\quad \boxed{E_z=-\frac{\partial A_z}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}},$$

и

(**) $\vec{B}(\vec{r},t)=rot\ \vec{A}(\vec{r},t)\equiv\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$, т.е.

$$\boxed{B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}},\quad \boxed{B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}},\quad \boxed{B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}}.$$

Нека отбележим, че $F_{\mu\nu}$ е **<u>антисиметричен тензор</u>**, т.е. $\boxed{F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}}$, и следователно следва да притежава **матрично представяне** от вида

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23}\\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0\end{pmatrix}.$$

Нека припомним още, че в алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „**сваляне**" и „**качване**" на индекс(и), като се следва едно общо **<u>правило</u>**: когато индексът е „0" (т.е. **временен индекс**), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, <u>обаче</u> когато индексът е 1, 2 или 3 (т.е. **пространствен индекс**), то знакът на компонентата на тензора **се променя**.

След всичко казано дотук можем да пристъпим към намирането на компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле с помощта на (1):

$$F_{01}=\frac{\partial A_1}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^1}=\ \ldots\ \textit{вдигаме индексите на}\ A\ \ldots.\ =-\frac{\partial A^1}{\partial x^0}-\frac{\partial A^0}{\partial x^1}=$$

$$=-\frac{\partial A_x}{\partial(c.t)}-\frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x}=\frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\ \ldots\ \text{от (*)}\ \ldots\ =\frac{1}{c}E_x=\frac{E_x}{c},\ \text{т.е.}\ \boxed{F_{01}=\frac{E_x}{c}}.$$

По аналогичен начин се доказва, че $\boxed{F_{02}=\dfrac{E_y}{c}}$ и $\boxed{F_{03}=\dfrac{E_z}{c}}$.

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}=\ \ldots\ \textit{вдигаме индексите на}\ A\ \ldots.\ =-\frac{\partial A^2}{\partial x^1}+\frac{\partial A^1}{\partial x^2}=$$

$$=-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\ \ldots\ \text{от (**)}\ \ldots\ =-B_z\equiv-(rot\,\vec{A})_z,\ \text{т.е.}\ \boxed{F_{12}=-B_z}.$$

По аналогичен начин определяме още

$$F_{13}=\frac{\partial A_3}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^3}=\ \ldots\ \textit{вдигаме индексите на}\ A\ \ldots.\ =-\frac{\partial A^3}{\partial x^1}+\frac{\partial A^1}{\partial x^3}=$$

$$=-\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial z}=\quad\ \ldots\ \text{от (**)}\ \ldots\quad =B_y\equiv(rot\,\vec{A})_y,\ \text{т.е.}\ \boxed{F_{13}=B_y}.$$

$$F_{23}=\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}=\ \ldots\ \textit{вдигаме индексите на}\ A\ \ldots\ =-\frac{\partial A^3}{\partial x^2}+\frac{\partial A^2}{\partial x^3}=$$

$$=-\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial z}=-\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)=\ldots\ \text{от (**)}\ \ldots\ =-B_x\equiv-(rot\,\vec{A})_x,\ \text{т.е.}\ \boxed{F_{23}=-B_x}.$$

И така, определихме всичките 6 на брой независими компоненти на антисиметричния 4-тензор на ЕМ. Останалите 6 се получават от правилото за антисиметричност $\boxed{F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}}$. Следователно 4-тензорът на ЕМ може да се запише в следния явен вид

$$(2)\qquad F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & F_{01} & F_{02} & F_{03}\\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13}\\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23}\\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}.$$

С помощта на правилата за „вдигане” на индекси 4-тензорът на ЕМ поле може да бъде записан в следната контравариантна форма

$$(3)\qquad F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ E_z/c & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}.$$

Накратко можем да запишем, че $F_{\mu\nu}=\left(\frac{\vec{E}}{c},\vec{B}\right)$ и $F^{\mu\nu}=\left(-\frac{\vec{E}}{c},\vec{B}\right)$.

От (2) се вижда, че компонентите на векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ се явяват компоненти на 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

От теорията на 4-тензорите е известно, че всеки антисиметричен 4-тензор може да се преобразува в **дуален** нему 4-тензор. Нека означим дуалния на $F_{\mu\nu}$ 4-тензор със $\tilde{F}_{\mu\nu}$. Връзката между двата тензора се дава с равенствата

$$\tilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma},$$

където с $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ са обозначени т.нар. **символи на Леви-Чевита**, за които е в сила представянето

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}=\begin{cases}0, & \textit{при два равни индекса},\\ 1, & \textit{при четна пермутация от индексите},\\ -1, & \textit{при нечетна пермутация от индексите.}\end{cases}$$

Оказва се, че на практика за осъществяването на тази трансформация $F\to\tilde{F}$ е достатъчно да се извършат следните две покомпонентни замени: $\frac{\vec{E}}{c}\to\vec{B}$ и $\vec{B}\to-\frac{\vec{E}}{c}$. В резултат на това за дуалния на $F_{\mu\nu}$ 4-тензор получаваме

$$(5)\qquad \tilde{F}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c\\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c\\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0\end{pmatrix}.$$

Въвеждането на дуалния 4-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ не е самоцелно – с негова помощ се въвеждат (*получават*) две величини, явяващи се **инварианти на ЕМ поле**. Тези инварианти са:

(6) $\quad J_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\cdot\dfrac{E_2}{c^2} + 2\cdot B^2$; и

(7) $\quad J_2 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\dfrac{4}{c}(\vec{E}\cdot\vec{B})$.

Тема 8. Трансформации на Лоренц за векторите на полето. Плътност на тока. Уравнение на непрекъснатостта

Както вече бе споменато, трансформационните закони за векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ могат да бъдат получени с помощта на трансформационните закони за 4-тензори. Тъй като компонентите на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ участват в 4-тензора на електромагнитното поле, логично е да се опитаме да получим трансформациите на Лоренц за векторите на полето с помощта на трансформационните закони за антисиметричния 4-тензор $F_{\mu\nu}$.

Затова нека най-напред получим трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричния 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис. За извеждането на тези трансформационни закони се приема (използва), че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на $F^{\mu\nu}$ се трансформира така, както се трансформира произведението от съответните компоненти на два контравариантни 4-вектора. А както е известно трансформациите на Лоренц за контравариантен 4-вектор се дават с равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x^0 = \gamma(x^{/0} + \beta.x^{/1}) \\ x^1 = \gamma(x^{/1} + \beta.x^{/0}) \\ x^2 = x^{/2} \\ x^3 = x^{/3} \end{array}\right., \quad \text{където } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \text{ и } \beta = \frac{V}{c}.$$

Така можем да получим последователно (*доказателството им е реализирано в Приложение, дадено в края на въпроса*) следните трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричния 4-тензор $F^{\mu\nu}$ в контравариантен запис:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} F^{01} = F^{/01} \\ F^{02} = \gamma[F^{/02} + \beta.F^{/12}] \\ F^{03} = \gamma[F^{/03} + \beta.F^{/13}] \\ F^{12} = \gamma[F^{/12} + \beta.F^{/02}] \\ F^{13} = \gamma[F^{/13} + \beta.F^{/03}] \\ F^{23} = F^{/23} \end{array}\right.$$

където $\Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix}$, т.е. първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба.

Ако вземем под внимание, че

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ и } F^{/\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{/}/c & -E_y^{/}/c & -E_z^{/}/c \\ E_x^{/}/c & 0 & -B_z^{/} & B_y^{/} \\ E_y^{/}/c & B_z^{/} & 0 & -B_x^{/} \\ E_z^{/}/c & -B_y^{/} & B_x^{/} & 0 \end{pmatrix},$$

то от 6-те трансформационни закона (1) се получават следните 6 равенствата

❶ $F^{01} = F^{/01} \Rightarrow E_x/c = E_x^{/}/c$, т.е. $\boxed{E_x = E^{/}_x}$.

❷ $F^{02} = \gamma[F^{/02} + \beta.F^{/12}] \Rightarrow -\dfrac{E_y}{c} = \gamma\left\{\left[-\dfrac{E^{/}_y}{c}\right] + \dfrac{V}{c}.[-B^{/}_z]\right\} \quad \Big|\cdot(-c)$, т.е.

$\boxed{E_y = \gamma\,(E^{/}_y + V.B^{/}_z)}$.

❸ $F^{03} = \gamma[F^{/03} + \beta.F^{/13}] \Rightarrow -\frac{E_z}{c} = \gamma\left\{\left[-\frac{E^{/}{}_z}{c}\right] + \frac{V}{c}.B^{/}{}_y\right\} \quad \Big|\cdot(-c)$, т.е.

$\boxed{E_z = \gamma\,(E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y)}$.

❹ $F^{12} = \gamma[F^{/12} + \beta.F^{/02}] \Rightarrow -B_z = \gamma\left\{-B^{/}{}_z + \frac{V}{c}.\left[-\frac{E^{/}{}_y}{c}\right]\right\} \quad \Big|\cdot(-1)$, т.е.

$\boxed{B_z = \gamma\left\{B^{/}{}_z + \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_y\right\}}$.

❺ $F^{13} = \gamma[F^{/13} + \beta.F^{/03}] \Rightarrow B_y = \gamma\left\{B^{/}{}_y + \frac{V}{c}\left[-\frac{E^{/}{}_z}{c}\right]\right\}$, т.е.

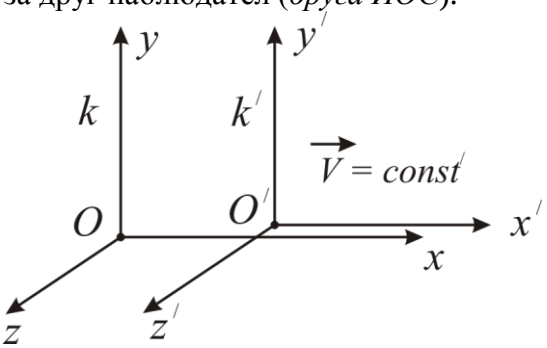
$\boxed{B_y = \gamma\left\{B^{/}{}_y - \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_z\right\}}$.

❻ $F^{23} = F^{/23} \Rightarrow -B_x = -B^{/}{}_x$, т.е. $\boxed{B_x = B^{/}{}_x}$.

И така, трансформациите на Лоренц за векторите на електромагнитното поле имат вида:

$$
(2)\qquad
\left|
\begin{aligned}
&E_x = E^{/}{}_x,\\
&E_y = \gamma\,(E^{/}{}_y + V.B^{/}{}_z) \equiv \frac{E^{/}{}_y + V.B^{/}{}_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\\
&E_z = \gamma\,(E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y) \equiv \frac{E^{/}{}_z - V.B^{/}{}_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad è\\
&B_x = B^{/}{}_x,\\
&B_y = \gamma\left\{B^{/}{}_y - \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_z\right\} \equiv \frac{B^{/}{}_y - \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\\
&B_z = \gamma\left\{B^{/}{}_z + \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_y\right\} \equiv \frac{B^{/}{}_z + \frac{V}{c^2}.E^{/}{}_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Трансформациите на Лоренц (2) показват **единната природа на електромагнитното поле**, но разкриват и една негова важна **<u>особеност</u>** - **ЕМ поле е относително**, т.е. то има една стойност за един наблюдател (*една ИОС*) и друга стойност за друг наблюдател (*друга ИОС*).



Тъй като формулите (2) са изведени за случая на т.нар. **специални трансформации** на Лоренц, за които скоростта на системата $K^{/}$ спрямо системата K е $\vec{V} = (V,0,0)$, то очевидно могат да се въведат **успоредни** ($\|$) и **перпендикулярни** ($\perp$) на $\vec{V}$ „компоненти” на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а именно

$\vec{E}_{\|} = (E_x,0,0)$ и $\vec{E}_{\perp} = (0,E_y,E_z)$, като $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{\|} + \vec{E}_{\perp}}$;

$\vec{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0)$ и $\vec{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z)$, като $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}}$.

Очевидно същото представяне по $(\parallel)$ и $(\perp)$ спрямо $\vec{V}$ „компоненти" може да се приложи и в ИОС K', т.е за „примованите" координати.

$\vec{E}'_{\parallel} = (E'_x, 0, 0)$ и $\vec{E}'_{\perp} = (0, E'_y, E'_z)$, като $\vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}$;

$\vec{B}'_{\parallel} = (B'_x, 0, 0)$ и $\vec{B}'_{\perp} = (0, B'_y, B'_z)$, като $\vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}$.

Ако запишем трансформациите на Лоренц (2) с помощта на така въведените „компоненти", то те ще имат вида на следните векторни равенства

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma[\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}'_{\perp} + \dfrac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}]\right) \end{array} \right. .$$

Вижда се, че при смяна на ИОС „компонентите" $\vec{E}_{\parallel}$ и $\vec{B}_{\parallel}$, които са насочени по посока на скоростта $\vec{V}$, **не се изменят**.

Може да се докаже и едно неочевидно свойство: ако напр. спрямо системата K' полето е само електрично (т.е. $\vec{B}' = 0$), или само магнитно (т.е. $\vec{E}' = 0$), то и в двата случая относно системата K електричното и магнитното полета са взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$). Действително:

1.) Допускаме, че полето в K' е **само електрично**, т.е. че $\boxed{\vec{B}' = 0}$. Това ще означава, че $\vec{B}'_{\parallel} = 0$ и $\vec{B}'_{\perp} = 0$. Тогава от (3) ще имаме

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{B}_{\parallel} = 0 \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \dfrac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] \end{array} \right. .$$

Ако изразим $\vec{E}'_{\perp} = \dfrac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза за $\vec{B}_{\perp}$, ще получим

$$\vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] = \gamma \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}] = \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че $\vec{B}_{\parallel} = 0$, ще имаме

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] + 0 \equiv \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}],$$

откъдето следва, че действително $\vec{B} \perp \vec{E}$.

2.) Допускаме, че полето в K' е **само магнитно**, т.е. че $\boxed{\vec{E}' = 0}$. Това ще означава, че $\vec{E}'_{\parallel} = 0$ и $\vec{E}'_{\perp} = 0$. Тогава от (3) ще имаме

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp} \end{array} \right. .$$

Ако изразим $\vec{B}'_{\perp} = \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}$ и заместим в израза за $\vec{E}_{\perp}$, ще получим

$$\vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] = -\gamma[\vec{V} \times \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}] = -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че $\vec{E}_{\parallel} = 0$, ще имаме

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = 0 - [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] \equiv -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}],$$

откъдето отново следва, че действително $\vec{E} \perp \vec{B}$.

В сила е и твърдение, обратно на току-що доказаното, а именно: ако относно някоя система K полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ СА взаимно перпендикулярни ($\vec{E} \perp \vec{B}$), но не равни по големина, то съществува такава система $K^{/}$, спрямо която полето е **само електрично** ($\vec{B}^{/} = 0$), или **само магнитно** ($\vec{E}^{/} = 0$).

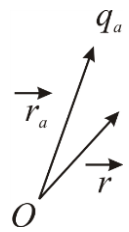
Плътност на тока. Уравнение на непрекъснатостта

Нека въведем величината **обемна плътност на заряда**, определена с равенството

(4) $$\rho(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV},$$

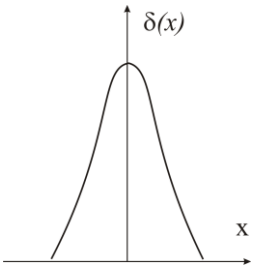
където Δq е електричният заряд в обем ΔV, а dq е зарядов елемент и може да се представи

(5) $$dq = \rho\, dV.$$



Понятието „обемна плътност на заряда” може да се използва и за описание на **точков(и) заряд(и)**. За целта се използва тримерната δ - **функция на Дирак** $\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$, имаща свойството

(6) $$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV = \begin{cases} 1, & \vec{r}_a \in V \\ 0, & \vec{r}_a \notin V \end{cases}.$$



δ - функция на Дирак $\delta(x)$ има още свойството (*виж чертежа*)

$$\left| \begin{array}{ll} \delta(x) \to \infty, & x \to 0 \\ \delta(x) \to 0, & x \neq 0 \end{array} \right. .$$

С помощта на δ - функция на Дирак обемната плътност на точков заряд може да се представи във вида

(7) $$\rho_a = q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

а за система от точкови заряди

(8) $$\rho = \sum_a q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \equiv \sum_a \rho_a,$$

където сумирането се извършва по всички заряди, съставящи системата. Съотношението (8) изразява свойството „**адитивност**” на обемната плътност на заряда.

Въвеждаме величината **4-вектор на плътността на тока**, дефинирана със съотношението

(9) $$j^{\mu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{dt}, \text{ за } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Този 4-вектор може да се представи в стандартната за 4-вектори форма

$j = (j^0, \vec{j})$, или още $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$, където $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$ е добре известният при стационарни електрични полета 3-мерен вектор на плътността на тока.

С помощта на (9) можем да получим в явен вид компонентите на 4-вектор на плътността на тока:

- при $\mu = 0$ $\quad j^0 = \rho \dfrac{dx^0}{dt} = \rho \dfrac{d(c.t)}{dt} = \rho c$;

- при $\mu = 1$ $\quad j^1 = \rho \dfrac{dx^1}{dt} = \rho \dfrac{dx}{dt} = \rho V_x$;

- при $\mu = 2$ $\quad j^2 = \rho \dfrac{dx^2}{dt} = \rho \dfrac{dy}{dt} = \rho V_y$; и

- при $\mu = 3$ $\quad j^3 = \rho \dfrac{dx^3}{dt} = \rho \dfrac{dz}{dt} = \rho V_z$.

Тогава очевидно ще имаме

(10) $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3) = \rho(V_z, V_y, V_z) \equiv \rho.\vec{V}$ - **обемна плътност на тока**.

Очевидно векторът $\vec{j}$, зададен чрез (10), определя във всяка точка посоката на скоростта на заряда и количеството преносим за единица време заряд.

С помощта на намерените в явен вид компоненти на 4-вектора на плътността на тока този 4-вектор може да бъде записан във вида

(11) $\boxed{j = (\rho.c, \vec{j})}$.

Като имаме предвид представянето (7) за обемната плътност на заряди, можем да запишем $\vec{j}$ чрез δ - функция на Дирак:

- за „ток”, обусловен от **един точков заряд**, обемната плътност на тока е

(12) $\vec{j}_a = q_a \vec{V}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$, а

- за ток, обусловен от **система от точкови заряди**, обемната плътност на тока е

(13) $\vec{j} = \sum_a \vec{j}_a = \sum_a q_a \vec{V}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$.

Под **уравнение за непрекъснатостта в диференциална форма** се разбира съотношението

(14) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0$.

То може да бъде записано чрез векторната операция **дивергенция**, приложена над 4-вектора на плътността на тока, а именно

(15) $\dfrac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, за $\mu = 0, 1, 2, 3$,

като по повтарящия се индекс „μ” се извършва сумиране, т.е.

(16) $$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = \frac{\partial(\rho.c)}{\partial(c.t)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0.$$

Приложение към тема 8:

$$F^{01} \to x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta.x'^1)]\cdot[\gamma(x'^1 + \beta.x'^0)] =$$
$$= \gamma^2[x'^0 x'^1 + x'^0 \beta.x'^0 + \beta.x'^1 x'^1 + \beta.x'^1.\beta.x'^0] \to \gamma^2[F'^{01} + \beta.F'^{00} + \beta.F'^{11} + \beta^2.F'^{10}] =$$

…….. обаче за антисиметричен тензор $F^{00} = F^{11} = 0$, и още $F^{10} = -F^{01}$ …….

$$= \gamma^2[F'^{01} - \beta^2.F'^{01}] = F'^{01}\gamma^2[1-\beta^2] = F'^{01}\left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right]^2\left[1-\frac{V}{c}\right]^2 \equiv F'^{01}.$$

$$F^{02} \to x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta.x'^1)]\cdot x'^2 = \gamma[x'^0 \cdot x'^2 + \beta.x'^1 \cdot x'^2] \to \gamma[F'^{02} + \beta.F'^{12}].$$

$$F^{03} \to x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta.x'^1)]\cdot x'^3 = \gamma[x'^0 \cdot x'^3 + \beta.x'^1 \cdot x'^3] \to \gamma[F'^{03} + \beta.F'^{13}].$$

$$F^{12} \to x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta.x'^0)]\cdot x'^2 = \gamma[x'^1 \cdot x'^2 + \beta.x'^0 \cdot x'^2] \to \gamma[F'^{12} + \beta.F'^{02}].$$

$$F^{13} \to x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta.x'^0)]\cdot x'^3 = \gamma[x'^1 \cdot x'^3 + \beta.x'^0 \cdot x'^3] \to \gamma[F'^{13} + \beta.F'^{03}].$$

$$F^{23} \to x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \to F'^{23}.$$

Тема 9. Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма. Тримерна форма на уравненията на Максуел

Ще изведем уравненията на полето от принципа на най-малкото действие, като смятаме за известно движението на зарядите, които го създават. За целта е нужно да запишем (чрез постулиране) физически коректен израз за действието, имащо вида

(1) $S = S_ч + S_п + S_{вз}$,

където:

$S_ч = -\sum_ь m_a.c\int_1^2 ds_a$ - действие, съответстващо на система от свободни частици;

(2) $S_{вз} = -\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a^{\ \mu}$ - действие, отчитащо взаимодействието между полето и система от заряди;

$S_п$ - действие за полето.

Определяме действието за полето $S_п$, налагайки му изисквания, произтичащи от общо-физически принципи:

① $S_п$ трябва да бъде релативистически инвариантна величина (скалар);

② под знака на интеграла, с който се изразява $S_п$, трябва да стои диференциал;

③ $S_п$ трябва да съдържа в себе си характеристика на полето. Логично е това да бъде 4-тензора на електромагнитното поле $F_{\mu\nu}$.

Обобщавайки всичко това постулираме, че

(3) $\boxed{S_п = -\frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, d\Omega}$,

където:

ε_0 - електрична константа на вакуума;

Ω - четиримерна пространствено-временна област.

В тема 7 бе показано, че величината $J_1 = F_{\mu\nu}.F^{\mu\nu}$ е инвариантна величина.

Лесно може да се покаже, че елементарната четиримерна пространствено-временна област

$$d\Omega = d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = c.dt\cdot dx.dy.dz = c.dt\cdot dV$$

е също инвариантна величина, т.е. $d\Omega = d\Omega^{/} = inv$.

Следователно действието (3) е релативистично инвариантна величина.

Заместваме (2) и (3) в (1) и получаваме следното представяне за действието

(4$^{/}$) $S = S_ч + S_п + S_{вз} = -\sum_ь m_a.c\int_1^2 ds_a - \sum_a q_a\int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a^{\ \mu} - \frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, d\Omega$.

В (4$^{/}$)величините A_μ и $F_{\mu\nu}$ се отнасят до полето, създадено от зарядите, т.е. A_μ и $F_{\mu\nu}$ зависят от положението (*в пространство-времето*) и от скоростите на зарядите.

Тъй като движението на зарядите се счита за известно (зададено), то първият член в дясната страна на (4$^{/}$), т.е. членът $S_ч = -\sum_ü m_a.c\int_1^2 ds_a$, може да бъде пропуснат, понеже неговата вариация ще се окаже равна на нула. Поради тази причина ще използваме следното представяне за действието

(4) $S = S_п + S_{вз} = -\sum_a q_a\int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a^{\ \mu} - \frac{\varepsilon_0.c}{4}\int_\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, d\Omega$.

Вторият от двата интеграла в (4) е четирикратен интеграл по пространствено-временната област. Затова логично е да се опитаме да представим и първия интеграл (който е сума от интеграли по мировата линия) в същия 4-кратен интегрален вид:

За тази цел най-напред умножаваме въпросния сбор от интеграли $\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu$ със равния на 1 интеграл от δ -функцията на Дирак

$$\int_{V_\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV\,,$$

където V_∞ е цялото 3-мерно пространство. В резултат това ще получим

$$\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu \int_{V_\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV \frac{dt}{dt} = \int_t \int_{V_\infty} \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \frac{dx_a{}^\mu}{dt} A_\mu(x_a)\, dt\, dV \frac{c}{c} =$$

…….. *използваме, че* $q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ и че $dt\, dV.c = d\Omega$ ……

$$= \int_\Omega \sum_a \rho_a \frac{dx_a{}^\mu}{dt} A_\mu \frac{d\Omega}{c} =$$ …….. *използваме, че* $\rho_a \frac{dx_a{}^\mu}{dt} = j_a{}^\mu$ …… $= \int_\Omega \sum_a j_a{}^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c} =$

…….. *използваме, че* $\sum_a j_a{}^\mu A_\mu = j^\mu$ ……

$= \int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c}$, т.е.

$$\boxed{\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu = \int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c}}.$$

С така намереното представяне за сбора от тези интеграли заместваме в (4) и получаваме представяне, допускащо обединение на двата интеграла

$$S = -\sum_a q_a \int_1^2 A_\mu(x_a)\, dx_a{}^\mu - \frac{\varepsilon_0.c}{4} \int_\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\, d\Omega = -\int_\Omega j^\mu A_\mu \frac{d\Omega}{c} - \frac{\varepsilon_0.c}{4} \int_\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\, d\Omega\,,$$

т.е.

(5) $$\boxed{S = -\int_\Omega \left(\frac{j^\mu A_\mu}{c} + \frac{\varepsilon_0.c}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega}.$$

Това е представяне за действието, с помощта на което ще изведем уравненията на полето, изхождайки от вариационния принцип на най-малкото действие

(6) $\delta S = 0$.

Прилагайки (6) спрямо (5), получаваме

(7) $$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c} \delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right) d\Omega = 0\ .$$

Нека най-напред определим вариацията $\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} (\delta F^{\mu\nu}) = 2\, (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} =$$

……. можем да използваме, че по дефиниция $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, следователно …….

$$= 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu} = 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu} =$$

… можем да разменим индексите $\mu \Leftrightarrow \nu$ в израза $\delta\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) F^{\mu\nu}$ и да използваме, че $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$, следователно …

$$= 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\nu\mu} = 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} - 2\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) (-F^{\mu\nu}) = 4\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu},$$

т.е. $\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 4\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu}$.

С така намерената вариация на $\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ заместваме в (7)

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right) d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \frac{\varepsilon_0.c}{4} 4\, \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 \text{ , т.е.}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 \ .$$

Ако в израза $\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right)$ сменим последователността на операциите „вариране" (т.е. δ), и диференциране (т.е. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$), ще получим $\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \to \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu$, което ще ни позволи да запишем

(8) $$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) F^{\mu\nu} \right) d\Omega \to \int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\frac{\partial(\delta A_\mu)}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega = 0 .$$

Ако отчетем, че

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu.F^{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} \right).F^{\mu\nu} + (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu},$$

то очевидно $\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu}.F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu.F^{\mu\nu}) - (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$. Заместваме така намереното представяне за $\frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu}.F^{\mu\nu}$ в (8), и получаваме

$$\int_\Omega \left(\frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu + \varepsilon_0.c.\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu.F^{\mu\nu}) - (\delta A_\nu).\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right] \right) d\Omega = 0 \text{ , т.е.}$$

$$\int_\Omega \frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu \, d\Omega + \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu.F^{\mu\nu}) \, d\Omega - \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu) \, d\Omega = 0$$

За втория интеграл, т.е. интеграла $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu.F^{\mu\nu}) \, d\Omega$, който всъщност е интеграл от 4-мерна дивергенция, се доказва чрез едно 4-мерно обобщение на теоремата на Остроградски-Гаус, че е равен на нула. С отчитането на този факт ще имаме

$$\int_\Omega \frac{j^\mu}{c}\delta A_\mu \, d\Omega - \varepsilon_0.c.\int_\Omega \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}(\delta A_\nu) \, d\Omega = 0 \text{ , или още след замяната } j^\mu \delta A_\mu \to j^\nu \delta A_\nu$$

(9) $$\int_\Omega \left(\frac{j^\nu}{c} - \varepsilon_0.c.\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right) \delta A_\nu \, d\Omega = 0 .$$

Понеже (9) трябва да бъде в сила при произволни вариации $\delta A_\nu \neq 0$, то остава да бъде равен на нула изразът

$$\left(\frac{j^\nu}{c} - \varepsilon_0.c.\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \right) \equiv 0 \text{ , т.е. } \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0.c^2} j^\nu .$$

Ако положим

(10) $$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0.c^2}$$

и наречем тази величина **магнитна константа**, то последното уравнение добива вида

(11) $$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 \, j^\nu \text{ за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Очевидно (11) дава търсените от нас уравнения на полето (4 уравнения) в ковариантна форма на запис. Наричат се още **уравнения на Максуел**.

Тези 4 уравнения свързват тензора на ЕМ поле $F^{\mu\nu}$ (*т.е. полевите вектори* $\vec{E}$ *и* $\vec{B}$) с източниците j^{ν} на движещите се заряди. Обаче броят на уравненията (т.е. 4) е по-малък от броя на неизвестните величини (т.е. 6), определящи полето (*и това са точно шестте компоненти на векторите* $\vec{E}$ *и* $\vec{B}$). Това означава, че четирите уравнения (11) не са достатъчни за определяне на полето.

Още 4 уравнения в 4-мерна форма, имащи вид, аналогичен на (11), но хомогенни, могат да бъдат получени за дуалния 4-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$, и те са

(12) $$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad \text{за} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

По този начин уравненията (1) и (12), т.е. общо 8 уравнения, са най-общите уравнения на полето в ковариантна форма.

Тримерна форма на уравненията на полето (уравненията на Максуел)

От практическа гледна точка по-удобна се явява тримерната форма на уравненията на Максуел, тъй като (*както ще бъде показано по-долу*) в тях ще участват наблюдаеми величини – полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

За получаване на тази тримерна форма на уравненията се използват уравненията (11), както и представянията на 4- тензора на ЕМ поле $F^{\mu\nu}$ и на 4-плътността на тока j^{ν} във вида

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad j^{\nu} = (\rho.c, \vec{j}).$$

❶ При $\nu = 0$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще имаме

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = \mu_0\, j^0,$$

или тъй като $F^{00} = 0$

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x} + \frac{\partial F^{20}}{\partial y} + \frac{\partial F^{30}}{\partial z} = \mu_0\, \rho.c \text{, т.е. } \frac{\partial\left(\frac{E_x}{c}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{E_y}{c}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{E_z}{c}\right)}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\rho.c\,.$$

След умножаване на последното равенство с „c” получаваме

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{, или още}$$

(13) $$\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ - уравнение на Максуел в тримерна форма.

❷ При $\nu = 1$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще имаме

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} = \mu_0\, j^1,$$

и понеже $F^{11} = 0$

$$\frac{\partial\left(-\frac{E_x}{c}\right)}{c.\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z} = \mu_0\, j_x, \quad \text{т.е.} \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0\, j_x\,.$$

Понеже $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = (rot\,\vec{B})_x$, то последното уравнение може да бъде записано още

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (rot\,\vec{B})_x = \mu_0\, j_x, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{(rot\,\vec{B})_x = \mu_0\, j_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}}.$$

❸ и ❹ За $\nu = 2$ и $\nu = 3$, при $\mu = 0, 1, 2, 3$ от (11) ще получим съответно

$$\boxed{(rot\,\vec{B})_y = \mu_0\, j_y + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}} \quad \text{и} \quad \boxed{(rot\,\vec{B})_z = \mu_0\, j_z + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}}$$

Обобщавайки последните 3 равенства в едно векторно равенство, ще имаме

(14) $$\boxed{rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Ако искаме да определим векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$, трябва да знаем съответно $div\,\vec{E}$, $rot\,\vec{E}$ и $div\,\vec{B}$, $rot\,\vec{B}$. Дотук знаем $div\,\vec{E}$ от (13) и $rot\,\vec{B}$ от (14). За да определим „липсващите” $rot\,\vec{E}$ и $div\,\vec{B}$, използваме, че по определение

(*) $$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi, \quad \text{и}$$

(**) $$\vec{B} = rot\,\vec{A}.$$

☞ Нека приложим векторната операция „***rot***” спрямо уравнението (*)

$$rot\,\vec{E} = -rot\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - rot\,(grad\,\varphi) = -\frac{\partial (rot\,\vec{A})}{\partial t} = \ldots \text{ от } (**) \ldots = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

понеже $rot\,(grad\,\varphi) = \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$. По този начин доказахме, че

(15) $$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

☞ Нека приложим векторната операция „***div***” спрямо уравнението (**)

$$div\,\vec{B} = div\,(rot\,\vec{A}) \equiv 0,$$

понеже $div\,(rot\,\vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$. По този начин доказахме, че

(16) $$\boxed{div\,\vec{B} = 0}.$$

Уравненията (13) – (16), или всъщност уравненията

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array}\right.$$

са <u>уравнения на електромагнитното поле в тримерна форма</u>. Те се наричат **уравнения на Максуел**.

Тема 10. Енергия на електромагнитното поле

Както стана ясно електромагнитното поле се определя еднозначно от полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяващи уравненията на Максуел. За да получим израз за енергията на ЕМ поле, използваме следните две уравнения на Максуел

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(понеже } \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\text{)}.$$

Умножаваме **скаларно** първото от тях с $\vec{B}$, а второто – с $\vec{E}$, след което почленно ги вадим, в резултат от което получаваме

$$\vec{B}\cdot rot\,\vec{E} - \vec{E}\cdot rot\,\vec{B} = -\left(\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \varepsilon_0\mu_0\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Тук следва да отчетем, че:

☞ $\vec{B}\cdot rot\,\vec{E} - \vec{E}\cdot rot\,\vec{B} = div\,(\vec{E}\times\vec{B})$;

☞ $\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}$ и аналогично $\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}$.

С отчитането на тези представяния ще имаме

$$div\,(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = -\mu_0\,(\vec{E}\cdot\vec{j}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\mu_0\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\,.$$

Ако двете страни на горното равенство разделим с магнитната константа μ_0 и след това интегрираме върху областта V_∞ (т.е. цялото тримерно пространство), ще получим

$$\int_{V_\infty} div\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,dV = -\int_{V_\infty}(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV - \int_{V_\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)dV\,.$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство изразяваме посредством теоремата на Гаус-Остроградски от векторния анализ, а именно

$$(*)\qquad \int_{V_\infty} div\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\,dV = \oint_{S_\infty}\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S}\,.$$

А съгласно формула (13) от тема № 8 за тока, обусловен от **система от точкови заряди**, обемната плътност на тока е

$$\vec{j} = \sum_a \vec{j}_a = \sum_a q_a\,\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\,,$$

следователно

$$\int_{V_\infty}(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV = \int_{V_\infty}\left(\vec{E}\cdot\sum_a q_a\,\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\right)dV = \sum_a\int_{V_\infty}[q_a\cdot\vec{E}\cdot\vec{V}_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)]\,dV = \sum_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E}\,,$$

където е отчетено, че $\int_{V_\infty}\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\,dV = 1$.

Всяко едно от произведенията ($q_a\cdot\vec{V}_a\cdot\vec{E}$), както бе показано в тема № 6, дава изменението $\frac{d\varepsilon_a}{dt} = q_a\,\vec{E}\cdot\vec{V}_a$ на механичната енергия на ***a***-тия заряд, следователно сумата $\sum_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E}$ дава изменението за единица време на пълната механична енергия на системата от заряди, намиращи се в областта V_∞, т.е.

$$(**)\qquad \sum_a q_a\vec{V}_a\cdot\vec{E} = \sum_a\frac{d\varepsilon_a}{dt}\,.$$

Заместваме (*) и (**) в изходното равенство, и получаваме

(1) $$\oint_{S_\infty} \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S} = -\sum_a \frac{d\varepsilon_a}{dt} - \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV .$$

Но съгласно граничните условия полето в безкрайност, т.е. върху точките от повърхността S_∞, е равно на нула, което ще рече, че както $\vec{E}_\infty$, така и $\vec{B}_\infty$, а следователно и $(\vec{E}\times\vec{B})_\infty$ са равни на нула, което означава, че целият интеграл в лявата страна на (1) е нула. Така от (1) получаваме

$$\sum_a \frac{d\varepsilon_a}{dt} + \int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV = 0 \text{, т.е.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{V_\infty}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV + \sum_a \varepsilon_a\right\} = 0 .$$

Ако означим

$\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a$ **- пълна механична енергия на зарядите**, и

(2) $W = \int_{V_\infty}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV$ **- енергия на ЕМ поле в цялото пространство**, то горното равенство добива още вида

(3) $$\frac{d}{dt}(W + \varepsilon) = 0 ,$$

изразяващ **закона за запазване на енергията на системата поле-частици в цялото пространство**. Равенство (3) изразява факта, че сборът от механичната енергия на зарядите и енергията на полето, създадено от тях, е **<u>неизменна величина</u>**.

Величината

(4) $$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} ,$$

участваща като подинтегрална функция в (2), се нарича **плътност** (обемна) **на електромагнитното поле**, и дава **енергията на полето в единица обем** от пространството, заемано от това поле. С въвеждането на обемната плътност на енергията можем да запишем (2) във вида

(2′) $$W = \int_{V_\infty} w\, dV .$$

Обемната плътност w на енергията на полето може да се представи още като сбор от 2 обемни плътности

(5А) $$w_E = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} ,$$ и (5Б) $$w_M = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} ,$$

наричани съответно обемни плътности на енергията на **електричното** и на **магнитното** полета, т.е.

$$w = w_E + w_M .$$

Нека отново се върнем на полученото по-горе представяне

$$div(\vec{E}\times\vec{B}) = -\mu_0 (\vec{E}\cdot\vec{j}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mu_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2) ,$$

и нека отново двете страни на горното равенство разделим с магнитната константа μ_0, но след това интегрираме не върху областта V_∞ (т.е. цялото тримерно пространство), а върху ограничена (крайна) пространствена област V, в резултат от което ще получим

$$\int_V div \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\, dV = -\int_V (\vec{E}\cdot\vec{j})\, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV .$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство отново изразяваме посредством теоремата на Гаус-Остроградски от векторния анализ, а именно

$$(***) \qquad \int_V div \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\, dV = \oint_S \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S}\,,$$

а изразът в дясната страна на горното уравнение ще бъде равен на взетата със знак „-„ скорост на изменение с времето на пълната енергия ($W+\varepsilon$) на системата „поле-частици”, т.е.

$$(****) \qquad -\int_V (\vec{E}\cdot\vec{j})\, dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) dV = -\frac{d}{dt}(W+\varepsilon)\,.$$

Така с отчитане на (***) и (****) получаваме

$$\oint_S \frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}(W+\varepsilon)\,.$$

В случая на ограничена пространствена област V, обаче, полето върху повърхността S на тази област не е нула (както би било при S_∞), поради което повърхнинният интеграл в лявата страна на горното равенство е различен от нула! Ако за подинтегралната функция на този интеграл въведем означението

(6) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$ **- вектор на Умов-Пойтинг**, то горното равенство може да се запише във вида

(7) $\frac{d}{dt}(W+\varepsilon) = -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ **- уравнение за баланса на енергията във област** V .

Тъй като изразът в лявата страна на (7) представлява изменението на пълната енергия $(W+\varepsilon)$ на полето и частиците за единица време в дадената област V, то величината $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ следва да се разглежда като **поток на енергията на полето** през повърхността S, което означава, че векторът на Умов-Пойтинг $\vec{S}$ е равен на повърхнинната плътност на този енергетичен поток.

С други думи $\vec{S}$ **характеризира процеса на разпространение на енергията на ЕМ поле**:

- посоката на $\vec{S}$ дава **посоката на разпространение на ЕМ енергия**, а

- големината на $\vec{S}$ дава енергията на ЕМ поле, преминала за единица време през единица площ, перпендикулярна на $\vec{S}$.

След всички тези пояснения на уравнението (7) за баланса на енергията може да се даде следната **интерпретация**:

Изменението за единица време $\frac{d}{dt}(W+\varepsilon)$ *на енергията на системата “поле + частици” е за сметка на енергетичния поток* $-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ *през повърхността* S *на тази област.*

Уравнението (7) за баланса на енергията във област V може да бъде записано още във вида

$$(7^{/}) \qquad \frac{dW}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dt} - \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\,.$$

В този си вид това уравнение показва, че **изменението за единица време** $\frac{dW}{dt}$ на **енергията на ЕМ поле** в ограничена област V е за сметка на **<u>работата</u>** (*за единица време*)

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ **на електричното поле над частиците**, както и за сметка на **<u>енергетичния поток</u>** $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ през повърхността S на тази област.

Знакът "-" пред $\frac{d\varepsilon}{dt}$ е поради това, че работата на електричните сили над частиците води до **намаляване на енергията на полето** $\frac{dW}{dt}$ (*с други думи когато* $\varepsilon\uparrow$, *то* $W\downarrow$, *и обратно, когато* $\varepsilon\downarrow$, *то* $W\uparrow$). Казано още по-просто **когато полето върши работа** (над зарядите) **енергията му намалява**.

Що се касае до **приноса на енергетичния поток** $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ към изменението за единица време $\frac{dW}{dt}$ на енергията на ЕМ поле, може да се каже, че:

А) когато $\vec{S}$ и $d\vec{S}$ са в **една и съща посока**, т.е. имаме "**изтичане**", т.е. "*<u>исток</u>*" на ЕМ енергия, то интегралът (потокът) $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ е **положителен**, обаче приносът му $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ е **отрицателен**, т.е. в този случай имаме "**загуба**" на ЕМ енергия и е логично енергията $\frac{dW}{dt}$ на полето да намалее;

Б) а когато $\vec{S}$ и $d\vec{S}$ са в **различни посоки**, т.е. имаме "**втичане**", т.е. "*<u>сток</u>*" на ЕМ енергия, то интегралът (потокът) $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ е **отрицателен**, обаче приносът му $\left(-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\right)$ е **положителен**, т.е. в този случай имаме "**прираст**" на ЕМ енергия и е логично енергията $\frac{dW}{dt}$ на полето да нарасне.

Тема 11. Електростатично поле – основни закони и енергия

<u>Определение</u>: поле, създадено от неподвижни заряди, се нарича **електростатично поле**.

Уравненията на това поле следват от уравненията на Максуел

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array}\right.$$

при условие, че

$$(1) \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \text{и} \qquad \vec{j} = \rho.\vec{V} = 0.$$

Равенствата (1) изразяват **условието за статичност на зарядите**.

От (1) и от уравненията на Максуел следва

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv 0, \end{array}\right. \Rightarrow \quad (2) \quad \left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = 0. \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0}$$

Уравненията (2) описват напълно електростатичното поле. Очевидно $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, обаче $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, т.е. интензитетът на електростатичното поле не се мени с времето, но може да бъде различен в различни точки от пространството.

Както е известно векторът $\vec{E}$ може да се изрази посредством скаларния потенциал φ и векторния потенциал $\vec{A}$ чрез съотношението

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\,\varphi .$$

Очевидно за електростатично поле, по силата на условието $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, следва да се приеме, че $\dfrac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$, вследствие на което получаваме

(3) $\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi}$.

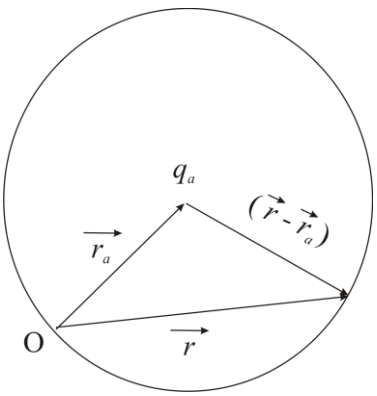
Нека заместим (3) в (2), и по-точно в $div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$:

$div(-\,grad\,\varphi) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, т.е. $div\;grad\,\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Обаче $div\;grad\,\varphi = \nabla \cdot \nabla\,\varphi = \nabla^2\,\varphi = \Delta\varphi$, където $\Delta = \nabla^2$ се нарича **оператор на Лаплас**. Така достигаме до уравнението

(4) $\boxed{\Delta\,\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$,

наречено **уравнение на Поасон**.



Нека определим интензитета на полето на неподвижен точков заряд q_a. Ще считаме, че този заряд е разположен в центъра на сферична повърхност с радиус $|\vec{r} - \vec{r}_a|$, заемаща област V от пространството.

Нека интегрираме (2) в областта V:

$$\int_V div\,\vec{E}\;dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV .$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство можем да представим чрез теоремата на Остроградски-Гаус от векторния анализ, а именно

$$\int_V div\,\vec{E}\;dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} ,$$

където с S е обозначена повърхността на сферата. Същевременно за обемната плътност ρ на точковия заряд ще използваме представянето чрез δ-функция на Дирак

$\rho = q_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$.

След отчитането на тези 2 представяния получаваме

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \frac{q_a\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)}{\varepsilon_0}\,dV .$$

Тъй като полето на точков заряд (*следва да*) притежава сферична симетрия, то можем да приемем, че във всяка точка от повърхността на сферата векторът на полето $\vec{E}$ и елементарният лицев вектор $d\vec{S}$ имат посоката на нормалата (*единичния нормален вектор*) $\vec{n}$ към сферата в тази точка, т.е.

(5) $\quad \vec{E} = \left|\vec{E}\right|.\vec{n}$, и $d\vec{S} = \left|d\vec{S}\right|.\vec{n}$,

следователно $\vec{E}\cdot d\vec{S} = \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}\right|\cdot\vec{n}\cdot\vec{n} = \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}\right|\cdot\vec{n}^2 \equiv \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}\right|$. Така получаваме още, че

$$\oint_S \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}\right| = \frac{q_a}{\varepsilon_0}\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\,dV \equiv \frac{q_a}{\varepsilon_0}, \text{ понеже } \int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\,dV = 1 \text{ при } \vec{r}_a \in V .$$

Тъй като $\left|\vec{E}\right| = const$ върху сферичната повърхност, то

$$\left|\vec{E}\right|\cdot\oint_S \left|d\vec{S}\right| = \frac{q_a}{\varepsilon_0}, \text{ или още, отчитайки, че } \oint_S \left|d\vec{S}\right| = S_{\tilde{N}\hat{o}\hat{a}\eth\grave{a}} = 4\pi\cdot\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^2$$

$$4\pi\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^2 = \frac{q_a}{\varepsilon_0},$$

откъдето следва представяне за големината на интензитета на полето на точковия заряд върху сферата

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{q_a}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^2},$$

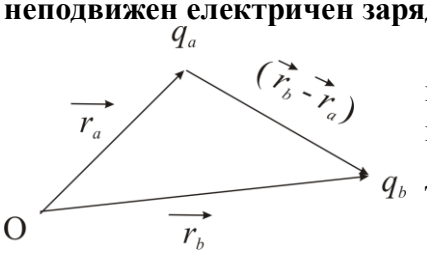
а с отчитане на (5)

$$\vec{E} = \frac{q_a\cdot\vec{n}}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^2}.$$

Тъй като единичният нормален вектор може да бъде представен във вида $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}_a}{\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|}$, то горната формула добива вида

(6) $$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_a\cdot(\vec{r}-\vec{r}_a)}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\left|\vec{r}-\vec{r}_a\right|^3}}.$$

Равенство (6) изразява **закона на Кулон за интензитета на полето на точков неподвижен електричен заряд**.



Отчитайки факта, че електростатичното поле няма магнитна съставяща, т.е. $\vec{B} \equiv 0$, за **силата на Лоренц**, с която полето на точковия заряд q_a действа върху всеки друг заряд q ще имаме

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} + q\cdot\vec{V}\times\vec{B} \equiv q\cdot\vec{E} .$$

Ако приложим горната формула за заряд $q = q_b$ (*виж чертежа*), отстоящ на разстояние $\left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|$ от заряда q_a, то за силата на взаимодействие между тях ще имаме

(7) $$\vec{F} = q_b\cdot\vec{E}_a = \frac{q_a\cdot q_b\cdot(\vec{r}_b-\vec{r}_a)}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\left|\vec{r}_b-\vec{r}_a\right|^3}.$$

Равенство (7) изразява **закона на Кулон за силата на взаимодействие между два точкови електрични заряда**. Силата $\vec{F}$ може да бъде „+” или „-” в зависимост от знака на зарядите q_a и q_b.

Както вече видяхме за електростатично поле интензитетът $\vec{E}$ и потенциалът φ са свързани със съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$.

Като се има предвид, че $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q_a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3} \equiv \dfrac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3}$, и се вземе под внимание съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$, лесно се съобразява, че

(8) $$\varphi(\vec{r}) = \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|} + const \equiv \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|} + const.$$

(* *В литературата този потенциал се нарича* ***Кулонов потенциал***)

Действително ако положим $r = \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|$, и използваме формулата от векторното смятане

$$grad\,\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot grad\,r = -\frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3},$$

лесно можем да установим, че прилагането на съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$ спрямо (8) води точно до коректното представяне (6) за $\vec{E}$.

Константата в (8) е без особено съществено значение, защото по принцип потенциалът е физична величина, определена с точност до адитивна константа, стойността на която може да бъде определена в зависимост от това къде (в коя точка) се приема, че потенциалът е нула. Логично е да се приеме, че $\varphi(r) \to 0$ при $r \to \infty$, следователно $const \to 0$ (т.е. приемаме, че константата е нула).

За **система от точкови заряди**, прилагайки принципа на суперпозицията, можем да запишем

(9) $$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a \cdot (\vec{r} - \vec{r}_a)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|^3}, \text{ и}$$

(10) $$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r} - \vec{r}_a\right|}.$$

А за система от огромен брой заряди, които са разпределени не дискретно, а непрекъснато в дадена пространствена област V, сумирането в (9) и (10) се заменя с интегриране, при което за интензитета и потенциала на електростатичното поле, създадено от такива заряди, ще имаме

(11) $$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(r^/) \cdot (r - r^/)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|r - r^/\right|^3} dV^/, \text{ и}$$

(12) $$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{\rho(r^/)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|r - r^/\right|} dV^/.$$

Съществува **теорема за единственост на решението на електростатичната задача**, според която интегралното представяне (12) за потенциала е **единственото решение на уравнението на Поасон** (4) $\boxed{\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ с област на решимост цялото пространство и гранично условие $\varphi_\infty \to 0$, както и в случай на ограничена в пространството област V, за който случай трябва да се знаят (дефинират) стойността на

потенциала и на неговата нормална производна $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ върху границата S_V на областта (задача на Нойман).

Енергия на електростатично поле

Плътността на енергията w_E на електростатичното поле се определя от общата формула за плътност на електромагнитната енергия /формула (4) от Тема (10) /

$$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0},$$

в която отчитаме, че стационарно електрично поле $\vec{B} = 0$ и следователно

$$(13) \qquad w_E = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} .$$

За да се определи енергията на електростатичното поле в цялото пространство V_∞, се пресмята обемния интеграл

$$(14) \qquad W_E = \int\limits_{V_\infty} w_E \, dV = \int\limits_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \, dV .$$

За пресмятането на този интеграл използваме следното представяне за скаларния квадрат $\vec{E}^2$:

$$(*) \qquad \vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (-grad\,\varphi) = -\vec{E} \cdot grad\,\varphi ,$$

а за определянето пък на $\vec{E} \cdot grad\,\varphi$ изхождаме от следното равенство във векторния анализ

$$div\,(\varphi \vec{E}) = \varphi\, div\,\vec{E} + \vec{E} \cdot grad\,\varphi ,$$

откъдето изразяваме търсеното от нас

$$(**) \qquad \vec{E} \cdot grad\,\varphi = div\,(\varphi \vec{E}) - \varphi\, div\,\vec{E} .$$

Заместваме (**) в (*), а след това заместваме (*) в (14), в резултат от което получаваме

$$W_E = \int\limits_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \, dV = -\int\limits_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0 \, \vec{E} \cdot grad\,\varphi}{2} \, dV = -\int\limits_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} div\,(\varphi \vec{E}) \, dV + \int\limits_{V_\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} \varphi \; div\,\vec{E} \; dV =$$

……. в последния интеграл отчитаме, че съгласно (2) $div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ …….

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E}) \, dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V_\infty} \varphi \, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E}) \, dV + \int\limits_{V_\infty} \frac{\varphi \rho}{2} \, dV .$$

Накрая за обемния интеграл $\int\limits_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E}) \, dV$ прилагаме теоремата на Остроградски-Гаус от векторния анализ, според която

$$\int\limits_{V_\infty} div\,(\varphi \vec{E}) \, dV = \oint\limits_{S_\infty} \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S} .$$

Понеже така получения повърхнинен интеграл върху S_∞ се изразява чрез стойностите на полето върху S_∞, а те (съгласно граничните условия) са $\varphi_\infty = 0$ и $\vec{E}_{\infty=0}$, то очевидно този интеграл е равен на нула, с което изразът за енергията W_E на електростатичното поле добива вида

$$(15) \qquad W_E = \int\limits_{V_\infty} \frac{\varphi \rho}{2} \, dV .$$

Формулите (14) и (15) определят **енергията на електростатичното поле на система от заряди в цялото пространство**.

За система от точкови заряди използваме представянето на обемната плътност на тези заряди чрез δ - функция на Дирак

$$\rho = \sum_a q_a\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

и след заместване в (15) получаваме

$$W_E = \int_{V_\infty} \frac{1}{2} \sum_a q_a \varphi(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV = \frac{1}{2} \sum_a q_a \int_{V_\infty} \varphi(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV = \sum_a \frac{q_a\, \varphi(\vec{r}_a)}{2},$$

където е използвано свойството на δ - функцията, че $\int_{V_\infty} \varphi(\vec{r})\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, dV = \varphi(\vec{r}_a)$.

И така формулата за **енергията на елекростатичното поле за система от точкови заряди** q_a добива вида

$$(16) \qquad W_E = \sum_a \frac{q_a\, \varphi(\vec{r}_a)}{2},$$

където $\varphi(\vec{r}_a)$ е потенциалът на полето, създадено от всички точкови заряди в точката $\vec{r}_a$, където се намира зарядът q_a. Този потенциал **за един точков заряд**, съгласно (8), е $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|}$, а за **система от точкови заряди** той е равен, съгласно (10), на

$$(10)☞ \qquad \varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|}.$$

Формално с последната формула за потенциала $\varphi(\vec{r})$ може да се замести в (16) и да се получи удобно представяне за електростатичната енергия, изразено само чрез зарядите q_a и техните координати $\vec{r}_a$. Тук възниква, обаче, **проблем от принципен характер**. За случая на един заряд формула (16) дава следното коректно представяне за енергията (**собствена енергия)**

$$(17) \qquad W_E = \frac{q.\varphi}{2},$$

където φ е потенциалът на полето, създадено от частицата в точката, в която се намира самата тя.

От формулата за потенциала на полето на **система от точкови заряди**

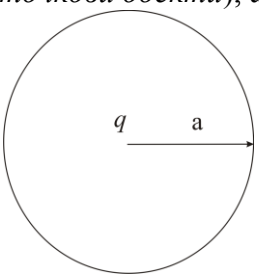
$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

се вижда, обаче, че потенциалът в коя да е точка $\vec{r}_a$, в която се намира някой от точковите заряди q_a, е безкрайно-голяма величина. Действително

$$\varphi(\vec{r}_a) = \sum_a \frac{q_a}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot |\vec{r}_a - \vec{r}_a|} \to \infty,$$

понеже знаменателят $|\vec{r}_a - \vec{r}_a| \to 0$.

Излиза че един заряд трябва да притежава **безкрайно голяма собствена енергия** (*енергията в точката* $\vec{r}_a$*, в която той се намира*), а следователно и **безкрайно голяма собствена маса**, което е **лишено от физичен смисъл**. Противоречието се получава, защото се **нарушават границите на приложимост на електродинамиката**. За да се избегне това противоречие частиците следва да се разглеждат **не като абстрактни точки** (*точкови обекти*), а като обекти с някаква **пространствена протяжност**.



Ето защо ще оценим разстоянието, **до което** електродинамиката се запазва като **логична** и **непротиворечива** теория. За целта най-напред определяме собствената електромагнитна енергия на една неподвижна заредена частица, имаща маса m. Тази собствена енергия, съгласно формулата на Айнщайн, е енергия на покой $\varepsilon = m \cdot c^2$.

От друга страна същата тази частица може да се разглежда

като класически протяжен обект. Приемаме, че тя заема сферична област с радиус a и е хомогенно заредена. Електростатичната енергия на такъв обект е $W_e = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Понеже тези две енергии (по своята физическа природа) съвпадат, то ще бъде в сила равенството

$$m \cdot c^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Ако приложим горните разсъждения за конкретен обект, напр. електрон, то $m \to m_e$, $q \to e_0$, $a \to r_e$ (*класически радиус на електрона*), и горното равенство добива вида

$$m_e \cdot c^2 = \frac{{e_0}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}, \text{ откъдето}$$

(18) $$r_e = \frac{{e_0}^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e \cdot c^2} \approx 2{,}8 \,.\, 10^{-15}\, m.$$

Определения по този начин **класически радиус на електрона** задава границите на приложимост на неквантовата електродинамика.

Съгласно (10) за потенциала на полето на система от точкови заряди в точка $\vec{r}_a$ ще имаме

$$\varphi(\vec{r}_a) = \sum_b \frac{q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|},$$

където за да се спазят границите на приложимост на електродинамиката е необходимо да се отхвърлят възможностите $b = a$, т.е. налага се изискването $a \neq b$. Ако с това представяне за потенциала заместим в (16), формулата за **енергията на елекростатичното поле на система от точкови заряди** q_a ще добие вида

(19) $$\boxed{W_E = \sum_a \sum_b \frac{q_a\, q_b}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|}}, \text{ при } \boxed{a \neq b}.$$

* **<u>Допълнение</u>**: ако заместим $\varphi(\vec{r}_a) = \sum_b \dfrac{q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|}$ в (16), **без** предварително да налагаме изискването $a \neq b$, то за **енергията на елекростатичното поле на система от точкови заряди** q_a ще получим представянето

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \\ a \neq b}} \sum_b \frac{q_a\, q_b}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_b - \vec{r}_a\right|} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{{q_a}^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \left|\vec{r}_a - \vec{r}_a\right|}.$$

Първият член (*в който индексите* a *и* b *са* ***различни***) представлява т.нар. **електростатична енергия на взаимодействието** на зарядите (*зависи от взаимното им разположение*). Този член **съвпада изцяло** с израза (19).

Вторият член (*в който на практика* $b = a$) е сбор от **собствените енергии** на всички точкови заряди. Този член не зависи от взаимното разположение на зарядите, **но** представлява сбор от **<u>безкрайно големите собствени енергии</u>** на всички заряди (т.е. той самият е също безкрайно голяма величина).

Поради невъзможността (<u>в рамките на класическата електродинамика</u>) да се определят (дефинират) коректно <u>собствените енергии на точкови заряди</u>, разглежданията се ограничават **само** до отчитане **енергията на взаимодействие**, т.е. величината, дефинирана коректно в (19), а членът, съдържащ безкрайно големите собствени енергии на зарядите, **не се разглежда** в класическата електродинамика. Той е обект на **квантовата електродинамика**.

Тема 12. Стационарно магнитно поле – основни закони, енергия

А.) Стационарни полета

Поле, независещо явно от времето, се нарича **стационарно поле**. На практика това са полета, създадени от източници, **плътностите на които не зависят от времето**, т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Условията за стационарност на ЕМ поле са

(1) $\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$, и $\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$.

Изискването за стационарност налага ограничение върху движението на зарядите. То трябва да се осъществява по такъв начин, че общото разпределение на зарядите в пространството да не се променя с времето. От уравнението за непрекъснатостта

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ и от условието за стационарност $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ следва равенството

(2) $div\,\vec{j} = 0$,

изразяващо т.нар. **условие за стационарност на токовете**. Нека отбележим, че условието (2) може да бъде в сила в два случая:

а) $\vec{j} = 0$, при което $\vec{B} = 0$, а това при $\rho \neq 0$ е случай на електростатично поле; и

б) $\vec{j} = \rho.\vec{V} \neq 0$, но при условие че $\rho \neq \rho(t)$.

Условията (1) и (2), комбинирани с уравненията на Максуел, дават уравненията, описващи <u>стационарните полета</u> (**стационарно електрично поле** и **стационарно магнитно поле**).

Уравненията на Максуел за **произволно електромагнитно поле** са

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Ако в тях отчетем (1) и (2), получаваме

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = 0, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}. \end{array}\right.$$

Уравненията

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\,\vec{E} = 0. \end{array}\right.$$

описват **стационарно електрично поле**, а уравненията

$$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{B} = 0, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}. \end{array}\right.$$

описват **стационарно магнитно поле**.

Прави впечатление, че **уравненията, описващи <u>стационарно електрично поле</u> са същите, както уравненията, описващи <u>електростатичното поле</u>**.

Нека в следващите разглеждания се спрем само на свойствата на стационарното магнитно поле.

Б.) Стационарно магнитно поле

Както вече видяхме уравненията, описващи **стационарно магнитно поле**, са

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} div\,\vec{B} = 0\,, \\ rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}\,. \end{array} \right.$$

От теорията на ЕМ поле е известно, че полевият вектор $\vec{B}$ може да се представи чрез магнитния векторен потенциал $\vec{A}(\vec{r},t)$ посредством съотношението

$$(4)\qquad \vec{B} = rot\,\vec{A}\,.$$

Нека заместим (4) в (3), при което ще получим

$$rot\,(rot\,\vec{A}) = \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Но от векторния анализ е известно, че

$rot\;rot\,\vec{A} \equiv \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = grad\,div\,\vec{A} - \Delta\,\vec{A}$, (където Δ е Лапласов оператор), следователно

$$grad\,div\,\vec{A} - \Delta\,\vec{A} = \mu_0\,\vec{j}\,.$$

Поради коментираната вече нееднозначност на потенциалите налагаме върху $\vec{A}$ следното **калибровъчно условие** (*т.е. условие, налагано затова, защото $\vec{A}$ не е определен с точност*)

$$(5)\qquad div\,\vec{A} = 0\,,$$

наречено **калибровъчно условие на Кулон**. С отчитането на (5) стигаме до следното **векторно уравнение**, наричано понякога **уравнение на Поасон**

$$(6)\qquad \Delta\,\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}\,.$$

Уравнение (6) е **векторен аналог** на скаларното **уравнение на Поасон** за скаларния потенциал φ, имащо вида

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Както е известно, решението на скаларното уравнение на Поасон се дава с израза

$$\varphi(r) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\rho(r^{/})\,dV^{/}}{4\pi\varepsilon_0\left|r - r^{/}\right|}\,.$$

Следвайки аналогията между скаларното и векторното уравнения на Поасон, можем да запишем, че решението на (6) се представя във вида

$$(7)\qquad \vec{A}(r) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left|r - r^{/}\right|}\,dV^{/}\,.$$

** Че (7) удовлетворява (6) може да се провери непосредствено.*

След като определихме чрез (7) векторния потенциал $\vec{A}(r)$, можем да изразим от (4) вектора на магнитната индукция $\vec{B}$:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} = rot\left(\int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left|r - r^{/}\right|}\,dV^{/}\right) = \int\limits_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\,rot\left(\frac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left|r - r^{/}\right|}\right)dV^{/}\,.$$

Нека за по-голяма компактност и прегледност на следващите записи да пресметнем отделно $rot\left(\dfrac{\vec{j}\,(r^{/})}{\left|r - r^{/}\right|}\right)$. За целта използваме формулата от векторния анализ

$$rot(u.U) = u\,rot U - U \times grad\, u\,,$$

в която скаларът $u = \dfrac{1}{\left| r - r^{/} \right|}$, а векторът $U = \vec{j}(r^{/})$. С прилагането на тази формула получаваме

$$rot\left(\frac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} rot\, \vec{j}(r^{/}) - \vec{j}(r^{/}) \times grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|}\,.$$

При по-нататъшното преобразуване на горния израз използваме 2 неща:

1) ако за удобство положим $r = \left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|$, и използваме формулата от векторното смятане $grad \dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^2} \cdot grad\, r = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = -\dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, ще получим че

$$\boxed{grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}}\text{; и}$$

2) понеже диференциалният оператор „rot" действа върху координатите $\vec{r}$, а векторът $\vec{j}(r^{/})$ не зависи от $\vec{r}$, а от $\vec{r}^{\,/}$, то очевидно $\boxed{rot\, \vec{j}(r^{/}) \equiv 0}$.

Замествайки тези две представяния, получаваме

$$rot\left(\frac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|}.0 - \vec{j}(r^{/}) \times grad \frac{1}{\left| r - r^{/} \right|} \equiv -\vec{j}(r^{/}) \times \left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3} \right) = \vec{j}(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\,,$$

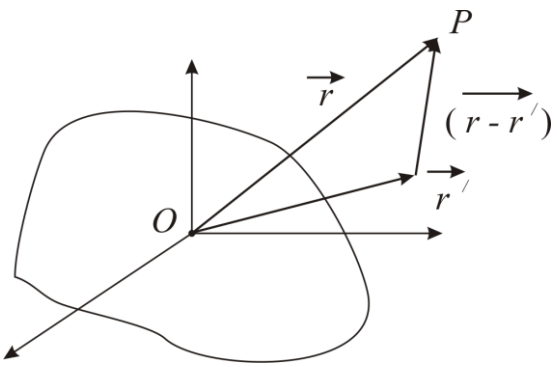
т.е. $rot\left(\dfrac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) = \vec{j}(r^{/}) \times \dfrac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}$. С така намерената $rot\left(\dfrac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right)$ се връщаме на представянето за $\vec{B}$ и получаваме

$$\vec{B} = \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} rot\left(\frac{\vec{j}(r^{/})}{\left| r - r^{/} \right|} \right) dV^{/} = \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\, dV^{/}\text{, т.е.}$$

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\vec{B} = \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(r^{/}) \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_a)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_a \right|^3}\, dV^{/}}.$$

Така полученият израз (8) за **индукцията на полето**, създадено от **стационарни токове**, е известен още като **закон на Био-Савар**.

Тема 13. Електрични мултиполни моменти



Както се вижда от формулата

$$\varphi(r) = \int_{V_\infty} \frac{\rho(r^{/})}{4\pi\varepsilon_0 \left| r - r^{/} \right|} dV^{/}$$

за определянето на потенциала на електростатичното поле се изисква познаването на разпределението $\rho(r^{/})$ на зарядите в областта V, като в общия случай решаването на горния интеграл и намирането на $\varphi(r)$ е достатъчно сложно.

Съществуват обаче задачи, при които потенциалът $\varphi(r)$ може да се намери относително просто при достатъчно общи предположения относно вида на функцията $\rho(r^{/})$. Такава е задачата за намиране на електростатичното поле на **<u>голямо разстояние</u>**, когато то е създадено от **пространствено ограничени източници**, т.е. източници,

заемащи ограничена пространствена област. Пример за такава система от заряди са атомните ядра, атомите, молекулите, йоните и др. За такива случаи се получават относително прости формули за т.нар. **мултиполно разложение на потенциала** при произволно разпределение на зарядите.

Нека V е **област**, заета от **пространствено ограничени заряди**. Търсим полето в точка P (точка на наблюдение), намираща се на достатъчно голямо разстояние от областта V, условието за което ще изразим във вида $|\vec{r}| >> |\vec{r}\,'|$. Полето в т. P се дава с израза

$$(1) \qquad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r\,')}{|r - r\,'|} dV\,'.$$

Ако въведем означенията $r = |\vec{r}|$ и $r\,' = |\vec{r}\,'|$, то условието $|\vec{r}| >> |\vec{r}\,'|$ може да бъде представено във вида $r >> r\,'$, или още

$$(2) \qquad \frac{r\,'}{r} << 1.$$

Тогава функцията $\frac{1}{|r - r\,'|}$, участваща в подинтегралната функция на (1), може да бъде представена в ред по степените на $\frac{r\,'}{r}$, а именно

$$\frac{1}{|r - r\,'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}\,')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r\,'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}} = \frac{1}{r\cdot\sqrt{1 - \left[-\left(\frac{r\,'}{r}\right)^2 + \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]}} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

където с x е обозначена безкрайно-малката величина $\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} - \left(\frac{r\,'}{r}\right)^2$. За $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ използваме редовото развитие

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + ...$$

Следователно

$$\frac{1}{|r - r\,'|} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{r}\cdot\left\{1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + ...\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} - \left(\frac{r\,'}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} - \left(\frac{r\,'}{r}\right)^2\right]^2 + ...\right\} =$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} - \frac{1}{r}\left(\frac{r\,'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{r}\left[\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} - \left(\frac{r\,'}{r}\right)^2\right]^2 + ... = ...$$

$$..... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}\,'\cdot r\,'\} - r\,'^2\,\delta\right]\cdot\vec{r}_0 + ... =$$

$$..... = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}\,'\cdot r\,'\} - r\,'^2\,\delta\right]\cdot\vec{r}_0 + ... ,$$

т.е. ограничавайки се до третия член в разложението ще имаме

$$(3) \qquad \frac{1}{|r - r\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3} + \frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}\,'\cdot r\,'\} - r\,'^2\,\delta\right]\cdot\vec{r}_0 + ...,$$

където:

$\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{r}$ е единичен вектор;

$\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\}$ е тензорно произведение на два вектора;

δ е единичен тримерен тензор от втори ранг.

Заместваме разложението (3) в интегралното представяне за потенциала (1) и получаваме (4)

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \frac{\rho(r^{/})}{r} dV^{/} + \int_V \frac{\rho(r^{/})}{r^2}(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}^{\,/}) dV^{/} + \int_V \frac{\rho(r^{/})}{2r^3}\vec{r}_0\left[3\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\} - r^{/2}\delta\right] \cdot \vec{r}_0 dV^{/} + \ldots\right].$$

Въвеждаме означенията:

(5) $\int_V \rho(r^{/}) dV^{/} = q$ **- пълен заряд на системата**;

(6) $\int_V \rho(r^{/}) \cdot \vec{r}^{\,/} dV^{/} = \vec{p}$ **- електричен диполен момент на системата** (векторна величина);

(7) $\int_V \rho(r^{/}) \left[3\{\vec{r}^{\,/} \cdot r^{/}\} - r^{/2}\delta\right] dV^{/} = d$ **- квадруполен момент на системата** (тензорна величина).

С отчитането на (5), (6) и (7) изразът за потенциала добива вида

(8) $$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\vec{r}_0 \cdot d \cdot \vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots\ldots = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \ldots\ldots$$

С горната формула потенциалът се представя като сума от членове, съдържащи нарастващи степени на разстоянието r (в знаменател) от точката на наблюдение (т. P) до системата от заряди, създаваща полето. Това представяне се нарича **мултиполно разложение на потенциала**. При $r >> r^{/}$ записаните в (8) членове определят потенциала $\varphi(r)$ достатъчно точно, а останалите (т.е. представените в (8) с многоточие) намаляват много бързо и дават несъществен принос.

Когато общият заряд (5) на системата е $q \neq 0$, то най-същественият член в (8), описващ полето, е първият, а именно членът

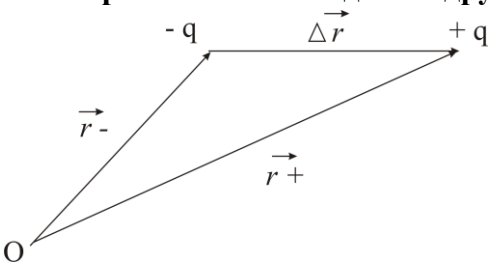
(9) $$\varphi_1(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

който по своя запис прилича на поле на един точков заряд q.

Ако обаче $q = 0$, то $\varphi_1(r)$ не може да служи за описание на полето, и тогава „преминаваме” към следващия по големина член $\varphi_2(r)$

(10) $$\varphi_2(r) = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

описващ полето на електричен дипол. По определение **<u>електричен дипол</u>** е **система от два <u>еднакви по големина</u>, но <u>различни по знак</u> заряда, поставени на достатъчно малко разстояние $\Delta\vec{r}$ един от друг**.



Според (6) диполният момент на такава система от заряди е (виж фигурата)

$$\vec{p} = q \cdot \vec{r}_+ - q \cdot \vec{r}_- = q \cdot \Delta\vec{r},$$

където $\Delta\vec{r}$ е вектор с посока от $-q$ към $+q$.

Ясно е, че за електричен дипол $q = 0$, обаче $\vec{p} \neq 0$.

За да определим интензитета (електричния вектор $\vec{E}$) на полето на дипола, прилагаме спрямо (10) съотношението $\vec{E} = -grad\,\varphi$:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi_2 \equiv -grad\,\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,grad\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,grad\left[\frac{1}{r^3}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right] = \ldots$$

…. използваме, че $grad\,(u.v) = u.grad\ v + v.grad\ u$ …..

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,grad\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\,grad\,\frac{1}{r^3}\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,grad\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\,grad\,\frac{1}{r^3}\right] =$$

…. използваме, че $grad\,(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}$ и че $grad\,\frac{1}{r^3} = -3\frac{1}{r^4}\,grad\,r \equiv \frac{-3}{r^4}\vec{r}_0$ …..

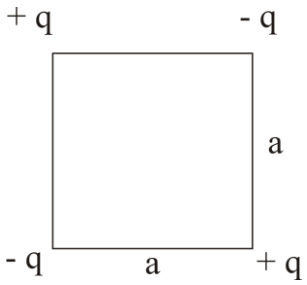
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\,\vec{p} + (\vec{p}\cdot\vec{r})\frac{-3}{r^4}\vec{r}_0\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}3(\vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r})\vec{r}_0 - \frac{1}{r^3}\,\vec{p}\right] = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\,r^3}\,.$$

И така за интензитета на полето на дипол получихме израза

(11) $$\vec{E}(r) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\,r^3}\,.$$

Когато системата от заряди е такава, че за нея $q = 0$ и $\vec{p} = 0$, то тази система от заряди се нарича **електричен квадрупол**. Потенциалът на полето в този случай се дава с третия член от (8), а именно

(12) $$\varphi_3(r) = \frac{\vec{r}_0 \cdot d \cdot \vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\,,$$



където величината d, дефинирана в (7) като **квадруполен момент**, е <u>тензорна величина</u>. Електричен квадрупол е например следната система от заряди (виж фигурата).

Тема 14. Магнитни мултиполни моменти

Магнитните мултиполни моменти са понятия, свързани с задачата за намиране на магнитното поле на **ограничена система** от **стационарни токове** на **<u>голямо разстояние</u>** от системата.

Разглеждаме обемни токове с плътност $\vec{j}(r)$, течащи в ограничена пространствена област V. Магнитното поле на тези токове ще представим чрез магнитния векторен потенциал $\vec{A}(r,t)$ посредством формула (7) от тема 12, а именно

(1) $$\vec{A}(r) = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}(r^/)}{\left|r - r^/\right|}\,dV^/\,.$$

Понеже се интересуваме от магнитното поле на големи разстояния от областта V, в която текат стационарните токове, приемаме, че

$$\frac{r^/}{r} << 1\,.$$

Тогава функцията $\frac{1}{\left|r - r^/\right|}$, участваща в подинтегралната функция на (1), може да бъде представена в ред по степените на $\frac{r^/}{r}$, а именно

(3) $$\frac{1}{\left|r - r^/\right|} = \ldots\ldots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^/}{r^3} + \ldots\ldots.$$

* **Забележка**: *третия член в редовото развитие (3) е сложен, затова не е представен.*

Заместваме (3) в (1) и за магнитния векторен потенциал получаваме

$$\vec{A}(r)=\int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(r^/)}{\left|r-r^/\right|}\,dV^/=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(r^/)\left(\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^/}{r^3}+....\right)dV^/ \text{, т.е.}$$

$$(4)\qquad \vec{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\vec{j}(r^/)}{r}\,dV^/ +\int_V \frac{\vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)}{r^3}\,dV^/ +....\right].$$

Ще докажем, че първият интеграл в (4) е равен на нула. За тази цел разглеждаме израза $div^/\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\right]$, в който:

☞ $\vec{a}$ - константен вектор;

☞ $div^/$ - това е дивергенция, „действаща” само върху $r^/$, но не и върху r.

За намирането на горната дивергенция използваме формулата от векторното смятане

$div(u.\vec{U})=u\,div\vec{U}+\vec{U}\cdot grad\,u$, следователно

$div^/(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)=(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\;div^/\vec{j}(\vec{r}^/)+\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot grad^/(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)$.

Тук следва да отчетем 2 неща:

1. съгласно условието за стационарност на токовете $div^/\vec{j}(\vec{r}^/)\equiv 0$, и
2. $grad^/(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)=\vec{a}$, следователно

$\Rightarrow div^/\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\right]=(\vec{a}\cdot\vec{r}^/).0+\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^/)$.

Нека така полученото равенство

$$(5)\qquad div^/\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\right]=\vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^/)$$

интегрираме върху областта V:

$$(5^/)\qquad \int_V div^/\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\right]dV^/=\int_V \vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/.$$

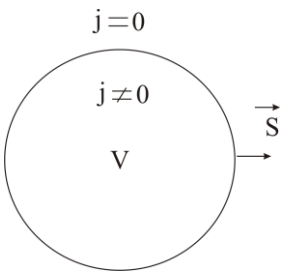
Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство представяме чрез повърхнинен интеграл с помощта на теоремата на Остроградски-Гаус:

$$\int_V div^/\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\right]dV^/=\oint_S(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot d\vec{S},$$

като по този начин ($5^/$) добива вида

$$\oint_S(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot d\vec{S}=\int_V \vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/ \text{, или още } \boxed{\oint_S(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot d\vec{S}=\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/}.$$

Скаларното произведение в повърхнинния интеграл представяме във вида $\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot d\vec{S}=\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot\vec{n}\left|d\vec{S}\right|=j_n(r^/)\left|d\vec{S}\right|$, където $j_n(r^/)$ е проекцията на $\vec{j}(\vec{r}^/)$ върху $\vec{n}$.



Обаче съгласно постановката на задачата, която решаваме, липсват токове, които да пресичат ограничената област V (*и по този начин да я напускат*), следователно $\boxed{j_n(r^/)\equiv 0}$ (*виж чертежа*).

От казаното става ясно, че

$$\oint_S(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,\vec{j}(\vec{r}^/)\cdot d\vec{S}=\oint_S(\vec{a}\cdot\vec{r}^/)\,j_n(r^/)\left|d\vec{S}\right|\equiv 0,$$

следователно и $\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/=0$.

Но тъй като векторът $\vec{a}$ е константен, но произволен вектор (т.е. $\vec{a}\neq 0$), то равенството $\vec{a}\cdot\int_V \vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/=0$ е възможно само тогава, когато

$$(6)\qquad \int_V \vec{j}(\vec{r}^/)\,dV^/=0.$$

Ако първият от интегралите в (4) представим във вида

$\int\limits_V \frac{\vec{j}(r^/)}{r}\, dV^/ = \frac{1}{r}\int\limits_V \vec{j}(r^/)\, dV^/$ (*изнасяме* r, *защото по него не се интегрира*), и отчетем (6), получаваме, че действително $\int\limits_V \frac{\vec{j}(r^/)}{r}\, dV^/ = 0$, с което доказателството, че първият интеграл в (4) е равен на нула, е завършено.

С „отпадането" на първия интеграл това равенство (4) добива вида

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)}{r^3}\, dV^/ + ... \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)}{r^3}\, dV^/,$$ или още

$$(4^/) \quad \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/,$$

което означава, че на практика мултиполното разложение на магнитния векторен потенциал $\vec{A}(r)$ започва от втория член в (4). Ще отбележим, че изнасянето в знаменател на (r^3) извън интеграла $(4^/)$ е възможно, тъй като интегрирането се извършва по $r^/$, а не по r.

Нека преобразуваме този втори член, прилагайки векторното равенство

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

спрямо съдържащия се в $(4^/)$ израз $\vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)$, приемайки $\vec{a}\equiv\vec{r}^/$, $\vec{b}\equiv\vec{j}(r^/)$ и $\vec{c}\equiv\vec{r}$, което ще ни даде

$$[\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r} = (\vec{r}^/\cdot\vec{r})\,\vec{j}(r^/) - [\vec{j}(r^/)\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^/,$$ откъдето

$$(\vec{r}^/\cdot\vec{r})\,\vec{j}(r^/) = [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r} + [\vec{j}(r^/)\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^/.$$

Заместваме с така намереното представяне на $(\vec{r}^/\cdot\vec{r})\,\vec{j}(r^/)$ в $(4^/)$ и получаваме

$$(4^{//}) \quad \vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/ = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r}\, dV^/ + \int\limits_V [\vec{j}(r^/)\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^/\, dV^/\right]$$

С помощта на (5) се доказва, че вторият интеграл вдясно $\int\limits_V [\vec{j}(r^/)\cdot\vec{r}]\,\vec{r}^/\, dV^/$ е равен на взетия със знак „минус" интеграл отляво $\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/$, в резултат на което от горният израз за $\vec{A}(r)$ получаваме следното равенство

$$\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/ = \int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r}\, dV^/ - \int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/,$$

от което следва, че

$$2\cdot\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/ = \int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r}\, dV^/,$$ т.е.

$$\boxed{\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/ = \frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r}\, dV^/}.$$

С така намереното представяне за интеграла $\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/$ заместваме в $(4^{//})$, и за $\vec{A}(r)$ получаваме

$$\vec{A}(r) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec{j}(r^/)(\vec{r}\cdot\vec{r}^/)\, dV^/ = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\times\vec{r}\, dV^/ = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]\, dV^/\right]\times\vec{r}$$

т.е

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]dV^/\right]\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r}^/\times\vec{j}(r^/)]dV^/\right]\times\vec{r}_0.$$

Ако по аналогия с електричния диполен момент въведем **магнитен диполен момент** $\vec{m}$, дефиниран със съотношението

(7) $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V [\vec{r}\,' \times \vec{j}\,(r\,')]dV\,'$, /аналог на $\vec{p} = \int_V \rho(r\,')\cdot \vec{r}\,'\,dV\,'$ /

то окончателно за мултиполното разложение на магнитния векторен потенциал получаваме представянето

(8) $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\vec{m}\times\vec{r}_0 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r^2}$ /аналог на $\varphi(r) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ /.

Формула (8) изразява магнитния векторен потенциал на голямо разстояние от ограничена система от стационарни токове. Формула (8) се нарича още **формула за полето на магнитен дипол**.

Както се вижда от (7) **магнитният диполен** момент **зависи от разпределението на стационарните токове** $\vec{j}\,(r\,')$ в пространствената област V.

Нека определим и индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле на голямо разстояние от ограничена система от стационарни токове. За целта прилагаме съотношението

$\vec{B} = rot\,\vec{A}$,

което, приложено спрямо (8), дава

(*) $\vec{B} = rot\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}rot\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]$.

За получената ротация от произведението „*скалар х вектор*" прилагаме формулата от векторния анализ

$\boxed{rot(u\vec{V}) = u\,rot\vec{V} - \vec{V}\times grad\,u}$,

от която за $u = \frac{1}{r^3}$ и $\vec{V} = \vec{m}\times\vec{r}$ получаваме

$$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{1}{r^3}rot(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times grad\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3}rot(\vec{m}\times\vec{r}) - (\vec{m}\times\vec{r})\times\left(\frac{-3}{r^4}\vec{r}_0\right).$$

За пресмятането пък на ротацията $rot(\vec{m}\times\vec{r})$ от векторното произведение на два вектора, използваме друга формула от векторния анализ, а именно

$\boxed{rot(\vec{U}\times\vec{V}) = \vec{U}\,div\vec{V} - \vec{U}\cdot Grad\vec{V} + \vec{V}\,div\vec{U} - \vec{V}\cdot Grad\vec{U}}$.

Прилагането на горната формула спрямо $rot(\vec{m}\times\vec{r})$ дава

$rot(\vec{m}\times\vec{r}) = \vec{m}\,div\,\vec{r} - \vec{m}\cdot Grad\,\vec{r} + \vec{r}\,div\,\vec{m} - \vec{r}\cdot Grad\,\vec{m}$.

Обаче:

- $div\,\vec{r} = 3$;
- $Grad\,\vec{r} = \delta$ (*единичен тензор*);
- $Grad\,\vec{m} = 0$ (*градиент от константен вектор*),

следователно $rot(\vec{m}\times\vec{r}) = 3\vec{m} - \vec{m}\cdot\delta \equiv 3\vec{m} - \vec{m} = 2\vec{m}$, откъдето за $rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]$ получаваме

(**) $rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{1}{r^3}2\vec{m} - (\vec{m}\times\vec{r})\times\left(\frac{-3}{r^4}\vec{r}_0\right) = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0$.

Развиваме двойното векторно произведение $(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0$ по известната вече формула $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}}$, и получаваме

$(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0 = (\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - (\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0)\vec{m} = (\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{m}$. Заместваме $(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0$ в (**) и получаваме

$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right] = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r}_0)\times\vec{r}_0 = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}[(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{m}] = \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \frac{3\vec{m}}{r^3}$, т.е.

$$rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]=\frac{3}{r^3}(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\frac{\vec{m}}{r^3}=\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{m}}{r^3}$$

Остава да заместим така намерената ротация в (*), и да получим следния израз за индукцията на полето на магнитен дипол

(9) $$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}rot\left[\frac{1}{r^3}(\vec{m}\times\vec{r})\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{m}}{r^3}.$$

Ако сравним (9) с формула (11) от предната тема 14, даваща интензитета на електричното поле на електричен дипол

$$\vec{E}(r)=\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}_0)\vec{r}_0-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

ще установим голяма прилика. Именно тази прилика е дала основание величината $\vec{m}$, фигурираща в (9), да бъде наречена *магнитен диполен момент* (*по аналогия с* $\vec{p}$*-електричен диполен момент*).

Тема 15. Вълново уравнение на полето

В теорията на електромагнитното поле се доказва, че е възможно да съществува поле дори и тогава, когато отсъстват източници на такова, т. е. когато

(1) $\rho=0,\qquad \vec{j}=0.$

За този случай уравненията на Максуел

(2) $$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0},\\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ div\,\vec{B}=0,\\ rot\,\vec{B}=\mu_0\,\vec{j}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t},\end{array}\right.$$

добиват вида

(3) $$\left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=0,\\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ div\,\vec{B}=0,\\ rot\,\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\end{array}\right.$$

За да получим вълновото уравнение, което трябва да удовлетворява електричния вектор $\vec{E}$, прилагаме операцията „ротация” спрямо второто от уравненията (3)

$$rot\ rot\,\vec{E}=rot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$ съгласно (3).

А в лявата страна на горното равенство имаме

$rot\ rot\,\vec{E}=grad\,div\,\vec{E}-\Delta\vec{E}\equiv-\Delta\vec{E}$, понеже съгласно (3) $div\,\vec{E}=0$.

Така стигаме до равенството

(4) $$\boxed{\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}.$$

По подобен начин, само че прилагайки операцията „ротация” спрямо четвъртото от уравненията (3), получаваме подобно уравнение и за $\vec{B}$

(5) $$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}.$$

Уравнения от вида

$$\Delta\psi(r,t) - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = -f(r,t)$$

се наричат **нехомогенни вълнови уравнения**, в които:

- ☞ $\psi(r,t)$ - функцията, описваща разпространяващия се вълнов процес;
- ☞ V - скорост на разпространение на вълновия процес;
- ☞ $f(r,t)$ - плътност на източниците на вълновия процес.

Ако $f(r,t) = 0$, то вълновото уравнение става **хомогенно**.

От казаното дотук става ясно, че уравненията (4) и (5) са хомогенни вълнови уравнения, удовлетворявани от полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ съответно, а скоростта на разпространение на електромагнитната вълна (вълновия процес) е $V = c$.

Извод: векторите на полето $\vec{E}$ и $\vec{B}$ удовлетворяват хомогенни вълнови уравнения.

Нека видим <u>какви вълнови уравнения удовлетворяват потенциалите</u> φ (*скаларен*) и $\vec{A}$ (*векторен*) на ЕМ поле. За целта използваме следната контравариантна форма на запис на уравненията на Максуел, получена в Тема 9, формула (11)

(*) $$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \mu_0\, j^{\nu} \text{ за } \mu,\nu = 0,1,2,3,$$

където 4-тензорът $F^{\mu\nu}$, наречен контравариантен 4-тензор на електромагнитното поле, има компоненти, изразяващи се чрез компонентите на контравариантния 4-потенциал A^{μ} посредством съотношението /формула (1) от Тема 7/

(**) $$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \text{ за } \mu,\nu = 0,1,2,3.$$

Нека припомним, че 4-потенциалът A^{μ} е 4-вектор, който се изразява посредством скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали във вида

$$A = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z\right).$$

Ако заместим (**) в (*), получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}\right) = \mu_0\, j^{\nu}, \text{ т.е.}$$

(***) $$\frac{\partial^2 A^{\nu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x_{\mu}} - \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x_{\nu}} = \mu_0\, j^{\nu}.$$

Може да се покаже, че скаларното произведение от 4-мерните диференциални оператори

$$\partial^2 \equiv \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = -\Box,$$

където

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

е **операторът на Даламбер.** Чрез оператора на Даламбер ще изразим първия член $\frac{\partial^2 A^{\nu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x_{\mu}}$ в лявата страна на (***), докато втория член $\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\mu}\,\partial x_{\nu}}$ просто ще представим във вида

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right).$$

Отчитайки така направените забележки в (***), получаваме следното уравнение, удовлетворявано от 4-потенциала

$$-\Box A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right) = \mu_0\, j^\nu .$$

Понеже потенциалите не са еднозначно определени, можем спрямо тях да прилагаме т.нар. **калибровъчни условия**. Нека в конкретния случай приложим следното калибровъчно условие за 4-потенциала

(6) $$\boxed{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0}.$$

Така ще получим вълново уравнение за 4-потенциала във вида

$\Box A^\nu = -\mu_0\, j^\nu$, или още

(7) $$\boxed{\Delta A^\nu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^\nu}, \text{ за } \mu,\nu = 0,1,2,3.$$

Извод: 4-потенциалът $A = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$ удовлетворява **нехомогенни вълнови уравнения**.

Нека запишем уравнения (7) в тримерна форма:

☞ при $\nu = 0 \;\Rightarrow\; \Delta A^0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^0$,

където $A^0 = \frac{\varphi}{c}$, а $j^0 = \rho \cdot c$. Така получаваме

$$\Delta\left(\frac{\varphi}{c}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\varphi}{c}\right) = -\mu_0\, \rho \cdot c .$$

След умножаване с „c” и отчитане, че $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, получаваме

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\rho \cdot c^2 \equiv -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ т.е.}$$

(7$^/$) $$\boxed{\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ **,- вълново уравнение за скаларния потенциал** φ.

☞ при $\nu = 1 \;\Rightarrow\; \Delta A^1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} = -\mu_0\, j^1$,

където $A^1 = A_x$, а $j^1 = j_x$. Така получаваме

$$\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_x .$$

☞ при $\nu = 2$ и $\nu = 3$ получаваме съответно

$$\Delta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_y, \text{ и}$$

$$\Delta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0\, j_z .$$

Обобщавайки последните **три скаларни равенства** в **едно векторно равенство**, получаваме

(7 //) $\boxed{\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\,\vec{j}}$ - **вълново уравнение за магнитния векторен потенциал** $\vec{A}$.

Нека запишем калибровъчното условие (6) по компоненти с цел и него да представим в тримерна форма

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial A^0}{\partial x^0}+\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}=0,$$ или още

$$\frac{\partial(\varphi/c)}{\partial(ct)}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0.$$

Но тъй като $\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=div\,\vec{A}$, то очевидно ще имаме

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div\,\vec{A}=0,$$ или още

(6 /) $$div\,\vec{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Това е тримерният запис на калибровъчното условие (6), изразяващ едно съотношение, което следва да удовлетворяват компонентите на потенциалите $\vec{A}$ и φ.

За да знаем полето, следва да знаем:

☞ или **четирите компоненти** (*3+1*) на потенциалите $\vec{A}$ и φ , които при зададени ρ и $\vec{j}$ се получават като решения на (7 /) и (7 //);

☞ или **шестте компоненти** на полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$, изразени или като решения на (4) и (5), или напр. чрез потенциалите $\vec{A}$ и φ посредством съотношенията:

(8) $$\left|\begin{array}{l}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi\\ \vec{B}=rot\,\vec{A}\end{array}\right..$$

Ясно е, че по първия начин (чрез $\vec{A}$ и φ) задачата за определяне на полето се облекчава, тъй като се свежда до намирането на 4 неизвестни величини – скалара φ и трите компоненти на вектора $\vec{A}$.

Оказва се, че съществува и алтернативен **трети метод** за определяне на полето посредством една единствена векторна величина, наречена **вектор на Херц** $\vec{Z}$, с което задачата се свежда до намиране само на три компоненти – компонентите на въпросния вектор на Херц. Потенциалите $\vec{A}$ и φ се изразяват чрез вектора на Херц посредством съотношенията

(9) $$\left|\begin{array}{l}\varphi=-div\,\vec{Z}\\ \vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}\end{array}\right.,$$

или още (*казано с други думи*) ако знаем вектора на Херц $\vec{Z}$**,** можем с помощта на равенства (9) да определим потенциалите $\vec{A}$ и φ, а оттам – чрез равенства (8) да определим полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Самият вектор на Херц може да бъде определен като решение на следното нехомогенно вълново уравнение

(10) $\Delta\vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$,

където $\vec{P}$ е т.нар. **поляризационен вектор** (вектор на поляризацията).

Нека в заключение разгледаме уравнението за непрекъснатостта

(11) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$.

Лесно се съобразява, че това уравнение се удовлетворява тъждествено, ако са изпълнени съотношенията

(12) $\left|\begin{array}{l}\rho = -div\,\vec{P}\\ \vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\end{array}\right.$, понеже $\left|\begin{array}{l}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[-div\,\vec{P}] = -div\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\\ div\,\vec{j} = div\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\end{array}\right.$

В този смисъл може да се каже, че уравнения (11) и (12) са еднакви.

Същото заключение може да бъде направено и за уравнение (6 $^{/}$), записано във вида

(6 $^{/}$) $div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$,

и уравнения (9)

(9) $\left|\begin{array}{l}\varphi = -div\,\vec{Z}\\ \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}\cdot\end{array}\right.$

Наистина ако приложим операцията div спрямо второто от уравнения (9), ще имаме

$div\,\vec{A} = \frac{1}{c^2}div\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[div\,\vec{Z}] =$ ….. отчитаме че $\varphi = -div\,\vec{Z}$ ….. $= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}[-\varphi] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$,

следователно $div\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, т.е. в сила е (6 $^{/}$), к.т.д.

Тема 16. Плоска монохроматична електромагнитна вълна

Всяка вълна може да се представи в дадена точка като суперпозиция от **плоски монохроматични вълни**.

Ако електромагнитното поле има характер на плоска монохроматична вълна, то полевите вектори $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са

(1^{А}) $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$; и

(1^{Б}) $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$,

където $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ са **комплексни постоянни вектори** (*постоянни вектори с комплексни компоненти*). Модулът на всяка компонента (1) е амплитудата, а аргумента – **фазовата константа** на съответния полеви вектор ($\vec{E}$ или $\vec{B}$).

Уравненията (1) са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максуел при **отсъствие на източници** ($\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$):

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} div\,\vec{E}=0\,, \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \\ div\,\vec{B}=0\,, \\ rot\,\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,. \end{array}\right.$$

Ако се заместят ($1^{А,Б}$) в (2), се получават следните връзки, даващи много полезна информация относно пространствената структура на ЕМ поле:

$$(3.1)\quad \vec{E}\cdot\vec{n}=0\,,\qquad (3.2)\quad \vec{B}\cdot\vec{n}=0\,,\qquad (3.3)\quad \vec{B}=\frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}\,.$$

А) Доказателство на (3.1):

Ако заместим ($1^{А}$) в първото от уравнения (2), получаваме:

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t)=div\left(\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=\left(div\,\vec{E}_0\right)e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}+\vec{E}_0\,.grad\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\equiv$$

$$\equiv\vec{E}_0\,.grad\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}=\vec{E}_0\,.grad\left(e^{i\omega t}\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right)=\vec{E}_0\,e^{i\omega t}\,.grad\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}=$$

$$=\vec{E}_0\,e^{i\omega t}e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\,.grad\left(-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\,.grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})=$$

$$=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\,.grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})\,.$$

Ако използваме формулата от векторния анализ $grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r})=\vec{n}$, получаваме

$$div\,\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}\,.\vec{n}\,.$$

Но съгласно (2) $div\,\vec{E}(\vec{r},t)=0$, откъдето следва

$-\dfrac{i\omega}{c}\vec{E}\,.\vec{n}=0$, т.е. $\vec{E}\,.\vec{n}=0$, к.т.д.

Б) Доказателство на (3.2): напълно аналогично на това за (3.1), като в този случай заместваме ($1^{Б}$) във третото от уравнения (2).

В) Доказателство на (3.3):

Заместваме ($1^{А}$) и ($1^{Б}$) в третото от уравнения (2) и получаваме:

$$rot\left(\vec{E}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0\,e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right).$$

Ако приложим формулата от векторния анализ

$rot\,(uU)=u\,rotU-U\times grad\,u$,

ще получим

$$e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}rot\left(\vec{E}_0\right)-\vec{E}_0\times grad\left(e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)}\right)=-\vec{B}_0\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\omega t})\,.$$

Отчитайки, че $rot\,(\vec{E}_0)=0$, получаваме

$$-\vec{E}_0\times e^{i\omega t}grad\left(e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}\right)=-\vec{B}_0\,e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}(i\omega e^{i\omega t})$$

$$-\vec{E}_0 \times e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}} grad\left(-i\omega \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) = -i\omega \vec{B}_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}}$$

$$-\left(\frac{-i\omega}{c}\right)\vec{E}_0 e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \times grad\,(\vec{n}\cdot\vec{r}) = -i\omega \vec{B}_0 e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right)} \qquad \Big| : (-i\omega)$$

$$-\frac{1}{c}\vec{E}\times\vec{n} = \vec{B}, \text{ т.е. } \quad \vec{B} = -\frac{\vec{E}\times\vec{n}}{c} \equiv \frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}, \text{ к.т.д.}$$

От (3.1) и (3.2) следва, че електричното и магнитното полета при плоска монохроматична вълна са перпендикулярни на вектора $\vec{n}$ (*векторът, даващ посоката на разпространение на ЕМ вълна*).

От (3.3) следва, че $\vec{E}$ и $\vec{B}$ са перпендикулярни помежду си и лежат в равнина с уравнение $\vec{n}\cdot\vec{r} = d$, където d е разстоянието до началото координатната система. При това трите вектора $\vec{n}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$ образуват дясна тройка взаимно ортогонални вектори. Това означава, че векторът $\vec{B}$ се „получава" от $\vec{E}$ като го завъртим около $\vec{n}$ на ъгъл $\pi/2$, и след това умножим с константата $1/c$. Всичко това означава, че можем да изследваме ЕМ вълна, изучавайки само и единствено $\vec{E}$.

Нека разгледаме координатна система, спрямо която

(4) $\quad \vec{n} = (0, 0, 1)$,

т.е. оста $O\vec{z}$ на тази координатна система има посоката на разпространение на вълната, която следва да няма компонента по $O\vec{z}$, т.е.

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0).$$

Компонентите на вектора на полето са равни на реалните части на комплексните вектори (1), следователно зависимостта от координатите и времето на коя да е от тези компоненти може да се запише във вида

(5) $$u(\vec{r},t) = u_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{c}\right) + \varphi\right],$$

където u_0 и φ са съответно амплитудата и фазовата константа на разглежданата компонента.

Имайки предвид това, и отчитайки, че $\vec{E}_0 = (A, B, 0)$, за проекциите E_x и E_y на електричния вектор получаваме

(6) $$\left| \begin{array}{l} E_x = a\cdot\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \alpha\right] \\ E_y = b\cdot\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \beta\right] \end{array} \right.,$$

където:

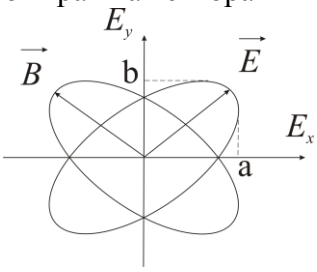
- ☞ $A = a\cdot e^{i\alpha}$,
- ☞ $B = b\cdot e^{i\cdot\beta}$,
- ☞ $\vec{n}\cdot\vec{r} = z$.

Равенства (6) могат да бъдат записани още във вида

$$\left| \begin{array}{l} \frac{E_x}{a} = \cos\,(\psi + \alpha) = \cos\psi\cdot\cos\alpha - \sin\psi\cdot\sin\alpha \\ \frac{E_y}{b} = \cos\,(\psi + \beta) = \cos\psi\cdot\cos\beta - \sin\psi\cdot\sin\beta \end{array} \right.,$$

където $\psi = \omega\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

Решавайки тази система от уравнения спрямо $\cos\psi$ и $\sin\psi$, и замествайки след това в тъждеството $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, получаваме уравнение на траекторията, описвано от края на вектора $\vec{E}$



(7) $$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - 2\frac{E_x \cdot E_y}{a \cdot b}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Съгласно (6) E_x и E_y са ограничени, следователно (7) е **уравнение на елипса в неканоничен вид**. Тази елипса е вписана в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$ (виж фигурата).

Елипсата, описвана от края на вектора $\vec{B}$ има оси, завъртени относно осите на елипсата на електричния вектор $\vec{E}$ на ъгъл $\pi/2$, а посоките на въртене на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ съвпадат.

Определение: Плоска монохроматична вълна, в която краят на вектора $\vec{E}$ описва елипса, се нарича **елиптично-поляризирана вълна**, а самото явление – **елиптична поляризация на светлината**.

Ще разгледаме два частни случая:

1) $\alpha - \beta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, където k - цяло число. За този случай уравнение (7) добива вида

$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1$ - уравнение на елипса в каноничен вид.

При $a = b$ елипсата преминава в окръжност

(8) $$E_x^2 + E_y^2 = a^2,$$

А самата вълна в този случай ще бъде (*ще се нарича*) **кръгово поляризирана вълна**.

2) $\alpha - \beta = k \cdot \pi$, където k - цяло число. За този случай уравнение (7) добива вида

$$\left(\frac{E_x}{a} \pm \frac{E_y}{b}\right)^2 = 0.$$

От това уравнение може да се заключи, че краят на вектора $\vec{E}$ остава върху отсечка, лежаща върху права, минаваща през началото на координатната система, и чийто ъглов коефициент („*наклон*”) е $\pm\frac{b}{a}$. Вълната в този случай се определя като **линейно поляризирана вълна**.

Когато гледано от посоката на $\vec{n}$, краят на вектора $\vec{E}$ се движи по елипсата в **директна посока** (т.е. посока, обратна на часовниковата стрелка), то вълната се нарича **дясно поляризирана вълна**, а когато движението на края на електричния вектор $\vec{E}$ е в **индиректна посока** (т.е. посока на часовниковата стрелка), то вълната се нарича **ляво поляризирана вълна**. При първия случай $0 < \alpha - \beta < \pi$, а при втория случай $\pi < \alpha - \beta < 2 \cdot \pi$. За линейно поляризирани вълни тези понятия нямат смисъл.

Определение: равнината, определена от посоката на разпространение на вълната (т.е. от $\vec{n}$) и малката полуос на елипсата, описвана от края на вектора $\vec{E}$, се нарича **равнина на поляризацията**, докато равнината, определена от $\vec{n}$ и голямата полуос на елипсата, описвана от края на вектора $\vec{E}$, се нарича **равнина на трептенето**. Тези две равнини са взаимно перпендикулярни.

За кръгово поляризирани вълни тези равнини не са определени. Ако посоките на трептене на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$ хаотично се променят, то вълната е неполяризирана.

Може да се докаже, че всяка елиптично поляризирана вълна може да се представи като **суперпозиция от две линейно поляризирани вълни с взаимно перпендикулярни равнини на поляризация**, както и като **суперпозиция от две кръгово поляризирани в противоположни посоки плоски електромагнитни вълни**.

За вектора на Умов-Пойтинг на плоска монохроматична електромагнитна вълна ще имаме

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \text{ ...от (3) } \vec{B} = \frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c} \text{ ... } = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c}[(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{E}] = \ldots$$

$$\text{... пак от (3) } \vec{E}\cdot\vec{n} = 0 \text{ ....}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}[(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n} - 0\cdot\vec{E}] = \frac{(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{n}}{\mu_0 c}, \text{ т.е.}$$

(8) $$\vec{S} = \frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\,\vec{n}\,.$$

Определяме също и плътността ω на електромагнитната енергия на полето на плоска вълна

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^{\,2}}{2} + \frac{\vec{B}^{\,2}}{2\mu_0} = \omega_E + \omega_M\,.$$

С помощта на съотношенията (3), т.е. $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$ и $\vec{B} = \frac{\vec{n}\times\vec{E}}{c}$ лесно може да се покаже, че $\omega_E = \omega_M$. Действително

(*) $$\omega_M = \frac{\vec{B}^{\,2}}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{(\vec{n}\times\vec{E})^2}{c^2}\,.$$

За определянето на $(\vec{n}\times\vec{E})^2$ използваме известната формула от векторното смятане

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$, или още

$(\vec{a}\times\vec{b})^2 \equiv (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{a}) \equiv \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

При $\vec{a}\to\vec{n}$ и $\vec{b}\to\vec{E}$ от горната формула получаваме, че

$(\vec{n}\times\vec{E})^2 = \vec{n}^{\,2}\vec{E}^{\,2} - (\vec{n}\cdot\vec{E})^2 \equiv \vec{E}^{\,2}$, понеже $\vec{n}^{\,2} = 1$ и $\vec{n}\cdot\vec{E} = 0$ съгласно (3).

Заместваме така намереното $(\vec{n}\times\vec{E})^2$ в (*) и получаваме

$$\omega_M = \frac{1}{2\mu_0}\frac{(\vec{n}\times\vec{E})^2}{c^2} = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\vec{E}^{\,2} = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2} \equiv \omega_E, \text{ к.т.д.}$$

Щом $\omega_M = \omega_E = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2}$, то общата обемна плътност на ЕМ лъчение на плоска монохроматична вълна е

(9) $$\omega = \omega_E + \omega_M = 2\cdot\omega_E = 2\cdot\frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{2} = \varepsilon_0\vec{E}^{\,2}\,.$$

От (8) и (9) следва, че

(10) $$\vec{S} = \frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\,\vec{n} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\frac{\vec{E}^{\,2}}{\mu_0 c}\,\vec{n} = \frac{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2}}{(\varepsilon_0\mu_0)c}\,\vec{n} = \frac{\omega}{(1/c^2)c}\,\vec{n} = c\,\omega\,\vec{n}\,.$$

Извод: електромагнитната енергия на полето на плоска монохроматична вълна се разпространява по посока на единичния вектор $\vec{n}$ със скорост „c”.

Тъй като полето е бързопроменлива функция на времето, можем да определим и **средните по време** стойности на $\vec{S}$ и ω. С помощта на (8) и (9) се доказва, че тези средни стойности са съответно

(11) $\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\mu_0 c}\vec{n}$, и

(12) $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_0\right|^2}{\mu_0 c^2}$,

където $\left|\vec{E}_0\right|^2 = a^2 + b^2$.

Лесно се вижда, че и между средните стойности на $\vec{S}$ и ω съществува съотношение, аналогично на (10), т.е.

$\bar{\vec{S}} = c\bar{\omega}\vec{n}$.

Величината $I = \left|\bar{\vec{S}}\right|$ се нарича **интензитет на плоска електромагнитна вълна**. Това е **енергията**, преминала **за единица време през единица площ**, разположена **перпендикулярно** на посоката на разпространение на вълната.

Тема 17. Функция на Грин за нехомогенното вълново уравнение. Закъсняващи потенциали

Както бе показано в тема 15, нехомогенното вълново уравнение може да бъде записано във вида

(1) $\Box\, u(x) = -j(x)$,

където $u(x)$ е коя да е от компонентите на величините, които го удовлетворяват, а $j(x)$ е съответната компонента на плътността на източниците на полето. Ще смятаме, че източниците са разпределени в **ограничена пространствена област**, а ще <u>търсим</u> **полето в цялото пространство**.

Също така **ще считаме**, че **влиянието на полето**, което частиците създават, върху движението на същите (*т.е. самите*) тези частици, е **пренебрежимо малко**.

Както е известно от теорията на диференциалните уравнения **общото решение** на нехомогенно линейно уравнение може да се представи като сума от общото решение u_0 на съответното му хомогенно уравнение и частен интеграл (*частно решение*) u_1 на нехомогенното уравнение, т.е.

(2) $u = u_0 + u_1$.

Решението u_0 очевидно не зависи от плътността на източниците на полето $j(x)$. Следователно u_0 може да се разглежда като решение, описващо полето на безкрайно отдалечен източник, върху което се наслагва полето u_1, създадено от източници с плътност $j(x)$.

Решението на нехомогенното уравнение се намира с помощта на **функцията на Грин**. Това е функция $G(x, x')$, удовлетворяваща уравнение като (1), но **не** за случая на протяжни пространствени източници $j(x)$, а за случай на **точков източник**, намиращ се в точка с радиус-вектор $\vec{r}'$, който източник **действа мигновено** (в момент t'). По този начин ако $x' = (c\cdot t', \vec{r}')$ е 4-вектора на точката, от която въпросния точков източник **излъчва**, а $x = (c\cdot t, \vec{r})$ е 4-вектора на точката, в която **се търси полето**, то **функцията на Грин се определя като решение на уравнението**

(3) $\Box\, G(x, x') = -\delta(x - x')$

с **област на решимост цялото пространство-време** и <u>**гранично условие**</u> $G(x, x') = 0$ в (*върху*) точките на безкрайната гранична повърхност Σ_∞, където $\delta(x - x')$ е **4-мерната функция на Дирак**.

Чрез функцията $G(x, x^{/})$ решението на нехомогенното вълново уравнение (1) се представя във вида

(4) $$u(x) = u_0(x) + u_1(x) \equiv u_0(x) + \int d^4x^{/}\, G(x - x^{/})\, j(x^{/}),$$

където интегрирането е по всички възможни стойности на компонентите на $x^{/} = (c \cdot t^{/}, \vec{r}^{\,/})$ (*т.е. на точката на излъчване*).

За нас интерес представлява полето $u_1(x)$, затова ще търсим решението (4) без $u_0(x)$.

Уравнението (3) се удовлетворява не от една, а от множество функции на Грин, всяка от които, съгласно (4), ще дава различни решения за $u(x)$. За да се определи **единствено решение** за разглежданата задача, е необходимо да вземем предвид **принципа за причинност**. Според този принцип **причината** (*т.е. състоянието и движението на зарядите в източника*) трябва да **<u>предшества</u> следствието** (*т.е. възбуждане на поле в точката на наблюдение*), което означава, че функцията u в момент t трябва да се определя от състоянието на източниците (т.е. зарядите) в някакъв **по-ранен** момент $t^{/}$. Това означава, че функцията на Грин $G(x - x^{/})$ трябва да бъде равна на нула при $t < t^{/}$. Така логично достигаме до понятието **закъсняваща функция на Грин** $G_{ret}(x - x^{/})$, която представлява **такова решение на (3)**, което се **анулира** при $t < t^{/}$, и което е **различно от нула** при $t > t^{/}$:

(5) $$G_{ret}(x - x^{/}) = \begin{cases} \neq 0, & (t - t^{/}) > 0 \\ 0, & (t - t^{/}) < 0 \end{cases}.$$

За решение на (3) вземаме следното **фурие-разложение** на функцията на Грин и на δ - функцията

(6) $$G(x - x^{/}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(k)\, e^{-i \cdot k \cdot (x - x^{/})}\, d^4(k),$$

(7) $$\delta(x - x^{/}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i \cdot k \cdot (x - x^{/})}\, d^4(k),$$

където k е вълновият 4-вектор, определен като $k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$, а $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$. Интегрирането в (6) и (7) е по всички стойности на 4-компонентите на k. Нека „разпишем” скаларното произведение от 4-вектори, участващо в експонентите на (6) и (7)

$$k \cdot (x - x^{/}) = k^0 \cdot (x - x^{/})^0 - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}^{\,/}) = \frac{\omega}{c} \cdot (ct - ct^{/}) - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}^{\,/}) =$$

$$= \omega \cdot (t - t^{/}) - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}^{\,/}) = \omega \cdot \tau - \vec{k} \cdot \vec{R},$$

където са използвани означенията $\tau = (t - t^{/})$ и $\vec{R} = (\vec{r} - \vec{r}^{\,/})$.

Заместваме (6) и (7) в (3), при което съкращавайки множителя $\frac{1}{(2\pi)^4}$ и отчитайки, че операторът на Даламбер е

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

получаваме

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \int \tilde{G}(k)\, e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}\, e^{i \cdot \vec{k} \cdot \vec{R}}\, d^4(k) = -\int e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}\, e^{i \cdot \vec{k} \cdot \vec{R}}\, d^4(k).$$

След извършването на необходимите диференциални операции под (във) интеграла в лявата страна на горното равенство (*ще бъдат приведени в Приложение*) се получава

(9) $$\int e^{-i\cdot k\cdot(x-x')}\left\{\left[-\vec{k}^{\,2}+\frac{\omega^2}{c^2}\right]\cdot\tilde{G}(k)+1\right\}d^4(k)=0\,,$$

откъдето следва алгебричното уравнение за фурие-образа $\tilde{G}(k)$

(10) $$\left[-\vec{k}^{\,2}+\frac{\omega^2}{c^2}\right]\cdot\tilde{G}(k)=-1\,,$$ или още

(11) $$\tilde{G}(k)=-\frac{c^2}{\omega^2-c^2\vec{k}^{\,2}}\,.$$

Заместваме така намереното $\tilde{G}(k)$ от (11) в (6). При това вземаме под внимание, че $d^4(k)=d\left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right)=\frac{1}{c}d\omega\cdot d^3\vec{k}$, както и че $e^{-i\cdot k\cdot(x-x')}=e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}\,e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}}$,

и получаваме

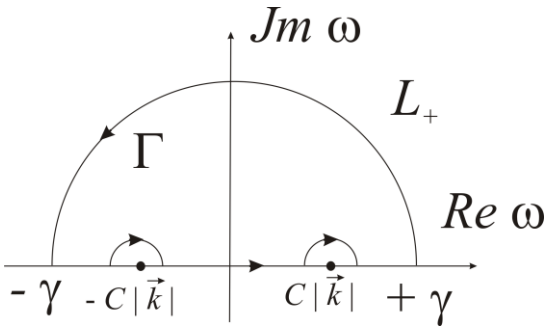
$$G(x-x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{G}(k)e^{-i\cdot k\cdot(x-x')}d^4(k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\left[-\frac{c^2}{\omega^2-c^2\vec{k}^{\,2}}\right]e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}\,e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}}\,\frac{1}{c}d\omega\cdot d\vec{k}\,,$$ т.е.

(12) $$G(x-x')=\frac{-c}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{k}\;e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;\frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2-c^2\vec{k}^{\,2}}\,,$$

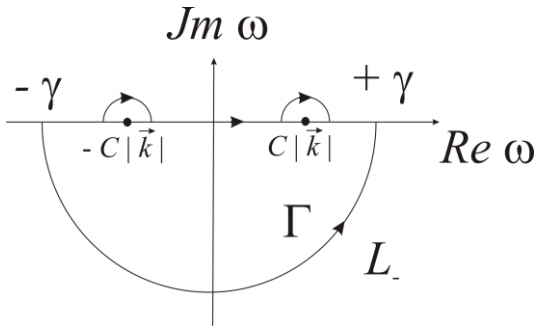
като в (12) интегрираме по цялото пространство на 3-мерния вектор $\vec{k}$.

Вторият интеграл в (12), обаче, т.е. интегралът по ω, има полюсни особености (*полюси*) в точките $\omega=\pm\,c\left|\vec{k}\right|$. Следователно (12) няма смисъл, ако не бъдат зададени правила, дефиниращи контура на интегриране. В зависимост от тези правила се получават различни функции на Грин. Ето защо ще се опитаме, следвайки принципа за причинност, да намерим (*определим*) интеграционния контур по такъв начин, че да получим закъсняващата функция на Грин (5).

За тази цел разглеждаме равнината на комплексната променлива ω. Полюсите на подинтегралната функция $\frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2-c^2\vec{k}^{\,2}}$ са върху реалната ос (*виж фигурите*). При това ако $\tau<0$, то интегралът по ω в (12) е еквивалентен на интеграл по затворен контур L_+ в горната полуравнина (*фиг. А*), състоящ се от отсечката $[-\gamma,+\gamma]$от реалната ос и полуокръжността Γ с достатъчно голям радиус. При този избор на контура L_+ подинтегралната функция е непрекъсната и аналитична в областта, ограничена от L_+.



Фиг. А



Фиг. Б

Понеже разглеждаме случая $\tau=(t-t')<0$, за който съгласно (5) трябва $G(x-x')$ да е равна на нула, то за тази цел очевидно интегралът по ω в (12), за избрания на фиг. А контур, **трябва да е равен на нула.**

При $\tau = (t - t^{/}) > 0$ интегралът (12), съгласно (5), трябва да е различен от нула. За този случай е необходимо интегралът да се пресметне по контура L_{-}, представен на фиг. Б. За пресмятането на интеграла в този случай се прилага теоремата за резидуумите, съгласно която

$$(13)\qquad \oint\limits_{L_-} d\omega \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} \equiv \int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} + \int\limits_{\Gamma} d\omega \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} = -2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Res}_{\omega=\omega_K} \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}}\,.$$

При $\gamma \to \infty$ интегралът $\int\limits_{\Gamma} d\omega \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}}$ клони съм нула (съгласно лемата на Жордан от комплексния анализ), а $\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}}$, и тъй като точките $\omega = \pm\, c\left|\vec{k}\right|$ са единствените полюси на подинтегралната функция, то при $\gamma \to \infty$ сборът от резидуумите в дясната страна на (13) се запазва, вследствие на което ще имаме

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} = -2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Res}_{\omega=\omega_K} \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} =$$

$$= -2\pi i \cdot \left[\lim_{\omega \to +c\left|\vec{k}\right|} \frac{[\omega - c\left|\vec{k}\right|]\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{[\omega + c\left|\vec{k}\right|]\cdot[\omega - c\left|\vec{k}\right|]} + \lim_{\omega \to -c\left|\vec{k}\right|} \frac{[\omega + c\left|\vec{k}\right|]\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{[\omega + c\left|\vec{k}\right|]\cdot[\omega - c\left|\vec{k}\right|]} \right] =$$

$$= -2\pi i \cdot \left[\lim_{\omega \to +c\left|\vec{k}\right|} \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{[\omega + c\left|\vec{k}\right|]} + \lim_{\omega \to -c\left|\vec{k}\right|} \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{[\omega - c\left|\vec{k}\right|]} \right] =$$

$$= -2\pi i \cdot \left[\frac{e^{-i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{[c\left|\vec{k}\right| + c\left|\vec{k}\right|]} + \frac{e^{i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{[-c\left|\vec{k}\right| - c\left|\vec{k}\right|]} \right] \frac{i}{i} = -2\pi i^2 \cdot \left[\frac{e^{-i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{2\cdot i\cdot c\left|\vec{k}\right|} + \frac{e^{i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{-2\cdot i\cdot c\left|\vec{k}\right|} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{c\left|\vec{k}\right|} \cdot \left[\frac{e^{-i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{2\cdot i} - \frac{e^{i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{2\cdot i} \right] = -\frac{2\pi}{c\left|\vec{k}\right|} \cdot \left[\frac{e^{i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{2\cdot i} - \frac{e^{-i\cdot c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau}}{2\cdot i} \right] = -\frac{2\pi}{c\left|\vec{k}\right|} \cdot \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\,.$$

И така получихме, че

$$(14)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} = -\frac{2\pi}{c\left|\vec{k}\right|} \cdot \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\,.$$

Заместваме така намереният интеграл в (12) и получаваме

$$G_{ret}(x - x^{/}) \equiv \frac{-c}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k}\; e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\cdot\omega\cdot\tau}}{\omega^2 - c^2\vec{k}^{\,2}} = \frac{-c}{(2\pi)^4} \int e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}} \left[-\frac{2\pi}{c\left|\vec{k}\right|} \cdot \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau) \right] d^3\vec{k}$$

$$(15)\qquad G_{ret}(x - x^{/}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{R}}\, \frac{\sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)}{\left|\vec{k}\right|}\, d^3\vec{k}\;.$$

За да пресметнем този интеграл, въвеждаме в пространството на вектора $\vec{k}$ сферична координатна система с ос $O\vec{z}$ по посока на вектора $\vec{R} = (\vec{r} - \vec{r}^{\,/})$, като ъгълът между $\vec{k}$ и $\vec{R}$ означаваме с θ. В сферични координати елементарният обемен елемент в пространството на вектора $\vec{k}$ е $d^3\vec{k} = \left|\vec{k}\right|^2 \cdot \sin\theta \cdot d\left|\vec{k}\right| \cdot d\theta \cdot d\varphi$, при което (15) ще добие вида

$$G_{ret}(x - x^{/}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\left|\vec{k}\right|=0}^{\infty} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|\cdot\cos\theta}\, \frac{\sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)}{\left|\vec{k}\right|}\, \left|\vec{k}\right|^2 \sin\theta \cdot d\left|\vec{k}\right| \cdot d\theta \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot\cos\theta} \left|\vec{k}\right| \cdot \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\cdot\sin\theta\cdot d\left|\vec{k}\right|\cdot d\theta\cdot d\varphi .$$

Интегрираме по ъгловите променливи (интегралът по φ дава 2π)

$$G_{ret}(x-x^{/}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot 2\pi\cdot \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} e^{i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot\cos\theta} \left|\vec{k}\right| \cdot \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\cdot \frac{2\cdot i\cdot\left|\vec{R}\right|}{2\cdot i\cdot\left|\vec{R}\right|} \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\left|\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau) \left[\frac{1}{2\cdot i}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} e^{i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot\cos\theta}\, d\{-i\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|\cdot\cos\theta\}\right]\cdot d\left|\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau) \left[-\frac{1}{2\cdot i} e^{i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|\cdot\cos\theta}\Bigg|_{0}^{\pi}\right]\cdot d\left|\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau) \left[\frac{e^{i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|} - e^{-i\cdot|\vec{k}|\cdot|\vec{R}|}}{2\cdot i}\right]\cdot d\left|\vec{k}\right|, \quad \text{т.е.}$$

(16) $$G_{ret}(x-x^{/}) = \frac{1}{2\cdot\pi^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\cdot\sin(\left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|)\cdot d\left|\vec{k}\right| .$$

Преобразуваме произведението от синусите в подинтегралната функция, използвайки тригонометричното тъждество

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

в резултат от което получаваме

$$\sin(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau)\cdot\sin(\left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|) = \frac{1}{2}[\cos(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau - \left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|) - \cos(c\left|\vec{k}\right|\cdot\tau + \left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{R}\right|)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|)\} - \cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)\}].$$

След заместване в (16) ще получим

$$G_{ret}(x-x^{/}) = \frac{1}{2\cdot\pi^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}[\cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|)\} - \cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)\}]\right]\cdot d\left|\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot\left|\vec{R}\right|} \left\{\int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} [\cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|)\}\cdot d\left|\vec{k}\right| - \int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)\}]\cdot d\left|\vec{k}\right|\right\}, \text{ т.е.}$$

$$G_{ret}(x-x^{/}) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\left|\vec{R}\right|} \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} [\cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|)\}\cdot d\left|\vec{k}\right| - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\vec{k}|=0}^{\infty} \cos\{\left|\vec{k}\right|(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)\}]\cdot d\left|\vec{k}\right|\right\}.$$

Накрая остана да отчетем, че съгласно интегралното представяне на δ -функцията

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\cdot\xi\cdot x}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(\xi\cdot x)\, d\xi ,$$

с което горното представяне за $G_{ret}(x-x^{/})$ добива вида

$$G_{ret}(x-x^{/}) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\left|\vec{R}\right|}[\delta(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|) - \delta(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)].$$

Понеже разглеждаме случая $\tau > 0$, а освен това и $\left|\vec{R}\right| \geq 0$, то аргументът $(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)$ на втората делта-функция $\delta(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|)$ е винаги **различен от нула**. Това обаче означава, че самата делта-функция тъждествено е равна на нула $\boxed{\delta(c\cdot\tau + \left|\vec{R}\right|) = 0}$ (*този резултат е следствие от свойствата на делта-функцията*). По този начин представянето за $G_{ret}(x - x^{/})$ добива вида

$$(*) \qquad G_{ret}(x - x^{/}) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\left|\vec{R}\right|}\ \delta(c\cdot\tau - \left|\vec{R}\right|)\ .$$

Ако в (*) вземем под внимание полаганията $\tau = (t - t^{/})$ и $\vec{R} = (\vec{r} - \vec{r}^{\,/})$, както и още едно свойство на делта-функцията, изразяващо се с равенството

$$\delta(\alpha\cdot x) = \frac{\delta(x)}{\left|\alpha\right|},$$

ще получим (при $\alpha \equiv c$):

$$(17) \qquad G_{ret}(x - x^{/}) = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,/}\right|\cdot c}\ \delta\left(t - t^{/} - \frac{\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,/}\right|}{c}\right).$$

С помощта на представянето (17) за закъсняващата функция на Грин можем да представим решението на нехомогенното уравнение (4) за всички важни за теорията на ЕМ поле случаи. Нека припомним, че интерес за нас представлява частното решение $u_1(x)$ на (4), поради което вместо представянето

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) \equiv u_0(x) + \int d^4x^{/}\, G(x - x^{/})\, j(x^{/})$$

ще използваме представянето

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) \rightarrow \int d^4x^{/}\, G(x - x^{/})\, j(x^{/}),$$

където безкрайно-малкият пространствено-временен елемент $d^4x^{/}$ може да се представи в следната тримерна форма

$$d^4x^{/} \rightarrow c\cdot dt^{/}\, d^3\vec{r}^{\,/} \equiv c\cdot dt^{/}\, dV^{/}.$$

Нека припомним още, че в уравнението

$$(1) \qquad \Box\ u(x) = -j(x),$$

$u(x)$ е коя да е от компонентите на величините, които го удовлетворяват, а $j(x)$ е съответната компонента на плътността на източниците на полето.

Нехомогенни вълнови уравнения от типа (1) удовлетворяват скаларният потенциал φ, векторният потенциал $\vec{A}$ и векторът на Херц $\vec{Z}$. Явният вид на тези нехомогенни вълнови уравнения бе получен в тема 15, уравнения ($7^{/}$), ($7^{//}$) и (10) съответно:

($7^{/}$) *от тема 15*: $\quad \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,

($7^{//}$) *от тема 15*: $\quad \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{j}$,

(10) *от тема 15*: $\quad \Delta\vec{Z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} = -\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$.

Всяко едно от тези уравнения може да бъде представено във вида (1), ако бъдат извършени следните замени (*съответно*):

$$(18) \qquad j(x) \rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad j(x) \rightarrow \mu_0\,\vec{j} \ \text{ и } \ j(x) \rightarrow \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

Нека получим в явен вид представяне за скаларния потенциал φ, а представянията за векторния потенциал $\vec{A}$ и вектора на Херц $\vec{Z}$ ще запишем по аналогия.

Решението на нехомогенното вълново уравнение за скаларния потенциал φ ще представим чрез функцията на Грин във вида

$$\varphi(x) = \int d^4x' \, G(x-x') \, j(x') \equiv \int d^4x' \, G(x-x') \left(\frac{\rho(\vec{r}\,', t')}{\varepsilon_0} \right),$$

или с отчитането на (17) и (18)

$$\varphi(\vec{r},t) = \int_V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right| \cdot c} \, \delta\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) \left(\frac{\rho(\vec{r}\,', t')}{\varepsilon_0} \right) c \cdot dt' \, dV' \text{, т.е.}$$

$$(**) \qquad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) \rho(\vec{r}\,', t') \, dt' \right] dV' .$$

Нека разгледаме отделно интеграла по времето, съдържащ δ - функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) \rho(\vec{r}\,', t') \, dt' .$$

Използваме свойството на δ - функцията $\delta(-x) = \delta(x)$, от което следва

$$\delta\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) = \delta\left[-\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) \right] = \delta\left(t' - t + \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) = \delta\left(t' - \left[t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right] \right).$$

Тогава $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - t' - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right) \rho(\vec{r}\,', t') \, dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t' - \left[t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right] \right) \rho(\vec{r}\,', t') \, dt'$.

Ако спрямо последния интеграл приложим още едно свойство на δ - функцията, а именно

$$\int_a^b F(x) \, \delta(x - x_0) \, dx = \begin{cases} F(x_0), & \text{àêî } a < x_0 < b \\ 0, & \text{àêî } x_0 \notin (a,b) \end{cases},$$

ще получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t' - \left[t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right] \right) \rho(\vec{r}\,', t') \, dt' = \; \ldots . \; t' \to \left[t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right] \; \ldots . = \rho\left[\vec{r}\,', \, t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right].$$

Остава да заместим стойността на така намерения интеграл в представянето (**) за скаларния потенциал φ

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \rho\left[\vec{r}\,', \, t - \frac{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|}{c} \right] dV' \text{, или окончателно}$$

$$(19^{\text{А}}) \quad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,', \, t - \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right| / c)}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \, dV' .$$

А аналогичните представяния за векторния потенциал $\vec{A}$ и вектора на Херц $\vec{Z}$ са

$$(19^{\text{Б}}) \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', \, t - \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right| / c)}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \, dV' \text{, и}$$

$$(19^{\text{В}}) \quad \vec{Z}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,', \, t - \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right| / c)}{\left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right|} \, dV' .$$

Тези потенциали ($19^{\text{А, Б, В}}$), определени с помощта на закъсняващата функция на Грин, се наричат **закъсняващи потенциали**. Видът на времения аргумент ($t - \left| \vec{r} - \vec{r}\,' \right| / c$)

показва, че полето в точка $\vec{r}$ в момента време t се определя от състоянието на източниците (намиращи се в т. $\vec{r}\,'$) в един по-ранен момент време $t' = t - \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|/c$.

Закъснението във времето ($-\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|/c$) е проява на **принципа за причинност** – времето $\boxed{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|/c}$ е необходимо за предаване (*т.е. разпространение*) на електромагнитното смущение от източника на полето ($\vec{r}\,'$) до точката на наблюдение ($\vec{r}$) със скорост „c”.

Тема 18. Излъчване на нерелативистична система от заряди

С помощта на формули (19) за закъсняващите потенциали от предишния раздел може да се определи полето на **променливи, пространствено ограничени системи от заряди (респ. токове)**. Нека V е ограничена пространствена област, изпълнена със заряди и токове с плътности съответно $\rho(\vec{r},t)$ и $\vec{j}(\vec{r},t)$.

Нека l е един **характерен за** V **пространствен размер**, а T е времето, за което $\rho(\vec{r},t)$ и $\vec{j}(\vec{r},t)$ се изменят съществено.

Нека приемем още, че времето l/c за разпространение на електромагнитното смущение (лъчение) в рамките на излъчващата система е много по-малко от характерното време T за движение на зарядите в системата, т.е.

(1) $\dfrac{l}{c} << T$.

При периодични движения T е периода, така че (1) може да бъде записано още във вида

(2) $l << \lambda$,

където λ е дължината на вълната на излъченото от зарядите електромагнитно поле.

Ако означим със $v = l/T$ големината на характерната скорост на движение на зарядите във V, то разделяйки двете страни на (1) ще получим съотношението

(3) $\dfrac{v}{c} << 1$, или още $\boxed{v << c}$,

което означава, че движението на зарядите в пространствено-ограничената област V се извършва с **нерелативистична скорост**. В частност скоростите на електроните в атомите и молекулите удовлетворяват условието (3), следователно разглежданията в този раздел ще важат с пълна сила за тях.

Ще изследваме полето на излъчване от източници, удовлетворяващи условията (1) – (3). Поради сложността на задачата в общия случай, ще разделим (условно) пространството на 3 области. Критерий за това разделяне ще бъде съотношението между дължината на вълната λ и разстоянието r от източника до точката на наблюдение:

1.) Областта, за точките на която е в сила условието

(4) $\boxed{l << r << \lambda}$,

се нарича **близка** или **квазистационарна зона**;

2.) Областта, за която

$\boxed{r \approx \lambda}$,

се нарича **междинна** или **преходна зона;**

3.) Областта, за която

(5) $\boxed{r >> \lambda}$,

се нарича **далечна** или **вълнова зона.**

Полето във втората (*междинната*) зона има твърде комплициран характер и не представлява особен интерес, поради което няма да го разглеждаме.

<u>Поле в близката зона</u>

От условието (4), с което се дефинира тази зона, следва че $\frac{r}{c} << \frac{\lambda}{c}$, т.е. времето за разпространение r/c на електромагнитното смущение (*лъчение*) до точката на наблюдение е малко в сравнение с характерния период $(\lambda/c) \equiv T$ на движение на зарядите. Това означава, че членът ($\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|/c$), фигуриращ във формули (19^{А}) и (19^{Б}) от предната тема, изразяващи скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали, може да се пренебрегне (*т.е.* ***пренебрегваме приноса на закъснението***), при което тези формули придобиват вида

$$(6)\qquad \varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',\,t-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|/c)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dV' \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',\,t)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dV', \text{ и}$$

$$(6')\qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',\,t-\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|/c)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dV' \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',\,t)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,dV'.$$

Очевидно полето в този случай се определя от **мигновеното разпределение** на зарядите и токовете в системата.

Използвайки разложението по степените на $\frac{r'}{r} \le \frac{l}{r}$, аналогично на полученото в тема 13 (*електрични мултиполни моменти*) разложение (3), получаваме

$$\frac{1}{\left|r-r'\right|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}+\frac{\vec{r}_0}{2r^3}\left[3\{\vec{r}\,'\cdot r'\}-r'^2\,\delta\right]\cdot\vec{r}_0+\ .....,$$

откъдето скаларният потенциал полето на **променливи, пространствено ограничени системи от заряди** може да се представи във вида

$$(7)\qquad \varphi(r,\,t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{p}(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\frac{\vec{r}_0\cdot d(t)\cdot\vec{r}_0}{8\pi\varepsilon_0 r^3}+.....,$$

където:

- ☞ $q=\int_V \rho(r')\,dV'$ - **пълен заряд на системата**, за който се доказва, че $q \ne q(t)$;
- ☞ $\vec{p}(t)=\int_V \rho(r',\,t)\cdot\vec{r}\,'\,dV'$ - **електричен диполен момент на системата**;
- ☞ $d(t)=\int_V \rho(r',\,t)\,\left[3\{\vec{r}\,'\cdot r'\}-r'^2\,\delta\right]dV'$ - **квадруполен момент на системата**.

По същия начин и магнитният векторен потенциал на полето на **променливи, пространствено ограничени системи от токове** може да бъде представен във вида

$$(7')\qquad \vec{A}(r,\,t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{j}(r',\,t)\,dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}(t)\times\vec{r}_0}{r^2}+.....,$$

където $\vec{m}(t)=\frac{1}{2}\int_V[\vec{r}\,'\times\vec{j}(r',\,t)]dV'$ е **магнитния диполен момент** на системата от токове.

<u>Извод 1</u>: от представянето (7) следва, че **в близката зона** мултиполното разложение на скаларния потенциал φ за **променливи, пространствено ограничени заряди**, е същото, както в случая на **статични заряди** [*виж формула (8) от тема 13*]. Това означава, че в близката зона електричното поле може да се представи като **суперпозиция** от полетата на **<u>постоянен точков заряд</u>** q и на **<u>променливи с времето</u> електричен дипол** $\vec{p}(t)$ и **по-висши мултиполи**.

<u>Извод 2</u>: При разложението (7 $'$) на векторния потенциал на полето на **променливи, пространствено ограничени токове** има различие от стационарния случай [*виж формула (8) от тема 14*]. Първият член в (7 $'$) **отсъства** в представянето за

векторния потенциал на полето на стационарни токове. За този член се доказва равенството

$$\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{j}(r^{/}, t)\, dV^{/} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t),$$

с помощта на което (7$^{/}$) се представя във вида

$$(8)\qquad \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}(t)}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}(t)\times\vec{r}_0}{r^2} + ...$$

На (8) може да се даде следната **тълкувателна интерпретация**: в **близката зона** магнитното поле на **променливи, пространствено ограничени токове**, се представя като **суперпозиция** от магнитното поле на **<u>токов елемент</u>** $dI = \dot{\vec{p}}(t)$, дължащ се на движението на зарядите, определящи електричния диполен момент $\vec{p}(t)$ на ограничената, но променлива система от заряди, **и** от полето на **<u>променливи магнитни мултиполи</u>** - $\vec{m}(t)$ и др.

Поле в далечната зона

При изпълнение на условието (5) , т.е. $r >> \lambda$, е в сила следното представяне

$$\left|r - r^{/}\right| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}^{/})^2} = \sqrt{r^2 + r^{/2} - 2\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}} = r\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{r^{/}}{r}\right)^2 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}}{r^2}} \approx$$

$$\approx r\cdot\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}}{r^2}} \approx r\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}}{r^2} + ...\right) = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}^{/}}{r} + ... = r - \vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/} + ...,$$ т.е.

$\boxed{\left|r - r^{/}\right| \approx r - \vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/}}$, където $\vec{r}_0 = grad\,\vec{r}$. Тогава изразът, отчитащ влиянието на „закъснението" , ще добие вида

$$t - \frac{\left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|}{c} \approx t - \frac{r}{c} - \frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/}}{c}.$$

Заместваме това представяне за „закъснението" във представянията за плътностите на зарядите $\rho(\vec{r}^{/}, t - \left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|/c)$ и на токовете $\vec{j}(\vec{r}^{/}, t - \left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|/c)$ от формулите (19^{А}) и (19^{Б}) от предната тема 17, изразяващи скаларния φ и векторния $\vec{A}$ потенциали, **<u>обаче</u>** $\left|r - r^{/}\right|$ в знаменателите на φ и $\vec{A}$ заменяме само с r, т.е. $\left|r - r^{/}\right| \approx r$. Така получаваме

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}^{/}, t - \left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|/c)}{\left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|}\, dV^{/} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}^{/}, t - r/c - (\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/})/c)}{r}\, dV^{/},$$ и

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}^{/}, t - \left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|/c)}{\left|\vec{r} - \vec{r}^{/}\right|}\, dV^{/} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}^{/}, t - r/c - (\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/})/c)}{r}\, dV^{/}.$$

Представяме подинтегралните функции в горните два интеграла във вид на разложения (*редове*) по степените на $(\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/})/c$, и получаваме

$$(9)\qquad \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int_V \rho\left(\vec{r}^{/}, t - \frac{r}{c}\right) dV^{/} + \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\vec{r}^{/}, t - \frac{r}{c}\right)\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/}}{c}\right) dV^{/} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(\vec{r}^{/}, t - \frac{r}{c}\right)\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/}}{c}\right)^2 dV^{/}\right] + ...,$$ и аналогично

$$(9^{/})\qquad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\int_V \vec{j}\left(\vec{r}^{/}, t - \frac{r}{c}\right) dV^{/} + \int_V \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}\left(\vec{r}^{/}, t - \frac{r}{c}\right)\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}^{/}}{c}\right) dV^{/}\right] + ...$$

Първият интеграл в дясната страна на (9), т.е. $\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right) dV'$, дава общият заряд q на системата, за който лесно се доказва, че не зависи от времето. И понеже за далечната зона $r >> \lambda$, то може (*с известна доза условност*) да се приеме, че и r е „константа", която не зависи от времето, и този извод очевидно може да се разпространи за „целия" първи интеграл в дясната страна на (9). Следователно, когато изразяваме полевия вектор $\vec{E}$ чрез познатото съотношение $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi$, то приносът към полето $\vec{E}$, който посредством $grad\,\varphi$ ще дойде от първия член (*т.е. интеграл*) в (9), **ще бъде нулев**. Ето защо за потенциала φ първият **приносен член** $\varphi_p(\vec{r},t)$ (*член с принос към полето* $\vec{E}$) в (9) ще бъде **не първия, а втория**, т.е.

$$\varphi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right)\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{r}\,'}{c}\right)dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{r}_0}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right)\vec{r}\,'\,dV'\right].$$

Но интегралът $\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right)\vec{r}\,'\,dV'$ представлява точно **електричния диполен момент** $\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ на системата, следователно

$$\varphi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{r}_0}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_V \rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right)\vec{r}\,'\,dV'\right] \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{r}_0}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{r}_0}{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

т.е.

$$(10)\quad \boxed{\varphi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{r}_0}{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}.$$

За да представим в подобен вид за далечната зона и израза за приносната част $\vec{A}_p(\vec{r},t)$ (*частта, даваща реален принос към магнитното поле* $\vec{B} = rot\,\vec{A}$) на магнитния векторен потенциал, използваме че както следва от (9$'$)

$$(9'')\quad \vec{A}_p(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\limits_V \vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right)dV'.$$

За обемния интеграл, фигуриращ в израза за $\vec{A}_p(\vec{r},t)$ ще докажем представянето

$$\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\,',t)\,dV' = -\int\limits_V \vec{r}\,'\,div'\left[\vec{j}(\vec{r}\,',t)\right]dV'.$$

За тази цел отново (*както в Тема 14*) разглеждаме израза $div'\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,')\right]$, в който:

- ☞ $\vec{a}$ - константен вектор;
- ☞ div' - това е дивергенция, „действаща" **само** върху r', но не и върху r.

За намирането на горната дивергенция отново използваме формулата от векторното смятане

$\boxed{div(u.\vec{U}) = u\,div\vec{U} + \vec{U}\cdot grad\,u}$, следователно

$$div'\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,')\right] = (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,div'\vec{j}(\vec{r}\,') + \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot grad'(\vec{a}\cdot\vec{r}\,').$$

Тук следва да отчетем, че $\boxed{grad'(\vec{a}\cdot\vec{r}\,') = \vec{a}}$, но **за разлика от разглежданията в тема 14 вече нямаме условие за стационарност на токовете**, следователно $\boxed{div'\vec{j}(\vec{r}\,') \neq 0}$, и

$$\Rightarrow\quad div'\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,')\right] = (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,div'\vec{j}(\vec{r}\,') + \vec{a}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,').$$

Нека така полученото равенство интегрираме върху ограничената област V:

$$\int_V div'\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\right]dV' = \int_V \left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,') + \vec{a}\cdot\vec{j}\,(\vec{r}\,')\right]dV' \;.$$

Обемният интеграл в лявата страна на горното равенство представяме чрез повърхнинен интеграл с помощта на **теоремата на Остроградски-Гаус**

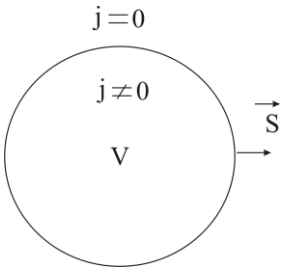
$$\int_V div'\left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\right]dV' = \oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}\,,$$

като по този начин изходното равенство добива вида

$$\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,') + \int_V \vec{a}\cdot\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dV'\,,$$

или още $\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \vec{a}\cdot\int_V \vec{r}\,'\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,') + \vec{a}\cdot\int_V \vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dV'$.

Скаларното произведение в повърхнинния интеграл отново представяме във вида $\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot\vec{n}\left|d\vec{S}\right| = j_n(r')\left|d\vec{S}\right|$, където $j_n(r')$ е проекцията на $\vec{j}\,(\vec{r}\,')$ върху $\vec{n}$.



Обаче съгласно постановката на задачата, която решаваме, липсват токове, които да пресичат **ограничената област** V (*и по този начин да я напускат*), следователно $\boxed{j_n(r') \equiv 0}$ (*виж чертежа*).

От казаното става ясно, че

$$\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\;j_n(r')\left|d\vec{S}\right| \equiv 0\,,$$

следователно и сборът от двата обемни интеграла в дясната страна трябва да е нула, т.е.

$$\vec{a}\cdot\left\{\int_V \vec{r}\,'\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,') + \int_V \vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dV'\right\} = 0$$

Но тъй като векторът $\vec{a}$ е константен, но **произволен вектор** (т.е. $\vec{a} \neq 0$), то горното равенство е възможно само тогава, когато

$$\int_V \vec{r}\,'\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,') + \int_V \vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dV' = 0\,,\text{ т.е.}$$

$\boxed{\int_V \vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dV' = -\int_V \vec{r}\,'\;div'\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\;dV'}$, с което доказателството приключва.

С отчитане на така доказаното равенство представянето ($9^{//}$) добива вида

$$\vec{A}_p(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{j}\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{r}\,'\;div\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)dV'\,.$$

Но съгласно уравнението за непрекъснатостта

$$\frac{\partial\rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} + div\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right) = 0\,,\text{ т.е. } div\,\vec{j}\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{\partial\rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\,,$$

следователно

$$\vec{A}_p(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V \vec{r}\,'\left[-\frac{\partial\rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \vec{r}\,'\;\rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)dV'\right]$$

Но по дефиниция величината в средни скоби дава **електричния диполен момент** $\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ **на системата**, т.е.

$$\int_V \vec{r}\,'\;\rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}\right)dV' = \vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

следователно

$$(10^{/})\quad \boxed{\vec{A}_p(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}.$$

Както се вижда потенциалите (10) и ($10^{/}$) **в далечната зона** се определят напълно от електричния диполен момент на системата, т.е. това са потенциали на **<u>променлив електричен дипол.</u>**

С помощта на представянията за потенциалите (10) и ($10^{/}$) можем да определим векторите на полето

$$\vec{E}_p(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}_p(\vec{r},t)}{\partial t} - grad\,\varphi_p(\vec{r},t) = ... = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}_0\right]\times\vec{r}_0, \text{ и}$$

$$\vec{B}_p(\vec{r},t) = rot\,\vec{A}_p(\vec{r},t) = ... = \frac{\mu_0}{4\pi c r}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{r}_0\right].$$