

**Учебно пособие**  
за сем. упражнения (*задачи*) по Електродинамика  
Гл. ас. Петко Митев

**Тема: Кинематика на релативистка частица. 4-вектори и 4-тензори.**  
**Преобразования на Лоренц**  
❖ Теоретичен минимум

📖 **Първи постулат на Айнщайн:**

Всички физични явления протичат по един и същ начин спрямо всяка инерциална отправна система.

Айнщайн издига и хипотеза за съществуването на крайна (*пределна*) скорост  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , с която се предават взаимодействия в природата.

📖 **Втори постулат на Айнщайн:**

Скоростта на светлината във вакуум е **една и съща** спрямо **всяка** инерциална ОС. Тя **не зависи** от движението на източника или приемника на светлината.

📖 Съвкупността от постулатите **I** и **II** се нарича **Принцип на относителността на Айнщайн**, който е основополагащ принцип в **Специалната теория на относителността (СТО)**.

📖 **Кинематика на релативистка частица в 4-мерна формулировка:**

🔗 **4-вектор:** 4-компонентна величина, която при смяна на координатната система (*КС*) се трансформира по закона

✓ 
$$X^\mu = \Lambda^\mu_\nu \cdot X'^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

където в частност

✓ 
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✓ **Контравариантен 4-вектор:**  $A^\mu \equiv (A^0, \vec{A})$ ;

✓ **Ковариантен 4-вектор:**  $A_\mu \equiv (A^0, -\vec{A})$ .

🔗 Връзка между **ковариантни** и **контравариантни** 4-вектори

✓ 
$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

където

✓ 
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{метричен тензор (инвариант)}.$$

✎ **Скаларен квадрат на 4-вектор:**

✓  $A^2 = A_\mu A^\mu \equiv A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu = A^0 A^0 - \vec{A} \cdot \vec{A} = (A^0)^2 - (\vec{A})^2.$

📖 **4-радиус-вектор:**  $X^\mu = (ct, \vec{r}).$

📖 **Контравариантен 4-тензор** от II ранг: величина, която при смяна на КС се трансформира по закона

✓  $\Phi^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \cdot \Lambda^\nu_\sigma \cdot \Phi'^{\lambda\sigma}.$

Тензорите биват:

- симетрични:  $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$ , и
- антисиметрични:  $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$ , като очевидно  $\Phi^{kk} = 0.$

📖 **Интервал:**  $(dS)^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu.$

$$ds = \sqrt{dX^\mu dX_\mu} = \sqrt{(c \cdot dt)^2 - (dr)^2} = c \cdot dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = c \cdot dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \cdot d\tau,$$

където  $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} < dt$  е т.нар. **собствено време**.

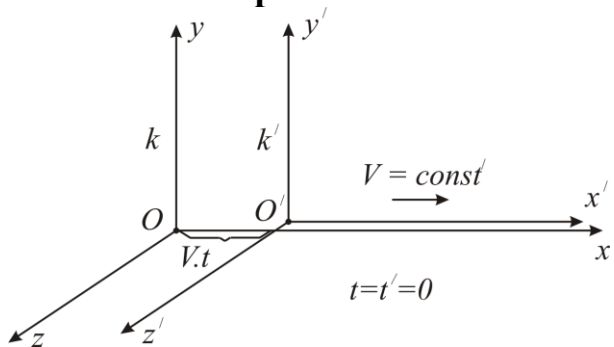
Щом  $ds = c \cdot d\tau$ , то очевидно  $ds$  е **инвариантна величина** (в качеството си на величина, явяваща се произведение от други два инварианта).

а) Интервали, за които  $(dS)^2 = 0$  са **светлинно-подобни**.

б) Интервали, за които  $(dS)^2 > 0$ , са **временно-подобни**. Две събития, свързани с временно-подобен интервал, са **причинно-свързани събития**.

в) Интервали, за които  $(dS)^2 < 0$ , са **пространствено-подобни**. Две събития, „свързани“ с пространствено-подобен интервал, **не могат** да бъдат **причинно-следствено свързани помежду си!**

📖 **Трансформации на Лоренц. Трансформации на Лоренц за 4-вектор:**



✓ 
$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

$$\text{и } \checkmark \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

За компонентите на **4-радиус-вектора**  $x^\mu = (ct, \vec{r})$  и за компонентите на произволен **4-вектор**  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  „правите“ и „обратните“ преобразования на Лоренц имат (съответно) вида:

$$\checkmark \begin{cases} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{cases}; \quad \checkmark \begin{cases} A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1) \\ A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0) \\ A^2 = A'^2 \\ A^3 = A'^3 \end{cases}.$$

$$\checkmark \begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}; \quad \checkmark \begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases}.$$

Преобразованията на Лоренц са известни още във вид на преобразования за 3-те пространствени координати и времето (като независима променлива):

$$(1) \begin{cases} x = \frac{x' + V.t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x' + V.t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \end{cases}, \quad \text{и } (2) \begin{cases} x' = \frac{x - V.t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.(x - V.t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma.\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{cases}.$$

След умножаването на уравненията за трансформация на времето (последните от горните уравнения) със „с“ (скоростта на светлината), уравненията (1) и (2) стават уравнения за трансформация на величини с една и съща (пространствена) размерност

$$(3) \quad \begin{cases} x = \gamma \cdot \left( x' + \frac{V}{c} \cdot (ct') \right) \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma \cdot \left( (ct') + \frac{V}{c} x' \right) \end{cases}, \text{ и} \quad (4) \quad \begin{cases} x' = \gamma \cdot \left( x - \frac{V}{c} \cdot (ct) \right) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma \cdot \left( (ct) - \frac{V}{c} x \right) \end{cases},$$

и в този си вид те съответстват напълно на трансформационните закони за компонентите на **4-радиус-вектора**  $x^\mu = (ct, \vec{r})$ , като за целта е необходимо само в (3) и (4) да се направи следната формална замяна в означенията:  $ct = x^0$ ,  $x = x^1$ ,  $y = x^2$  и  $z = x^3$ , както и да се отчете, че  $\frac{V}{c} = \beta$ .

### 📖 Следствия от трансформациите на Лоренц:

① **Относителност на пространствените интервали** (*скъсяване на дължините*):

$$\checkmark l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \text{ т.е. } l = \frac{l_0}{\gamma}, \text{ където:}$$

☞  $l_0$  - **собствена дължина** на обекта (*дължина в  $K'$ , т.е. спрямо наблюдател, движещ се заедно с обекта и намиращ се в покой спрямо него*); и

☞  $l$  - **координатна дължина** на обекта (*дължина в  $K$ , т.е. спрямо неподвижен наблюдател в  $K$ , относно който, обаче, обектът се движи*).

② **Относителност на временните интервали:**

$$\checkmark \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \text{ т.е. } \Delta t = \gamma \cdot \Delta \tau, \text{ където}$$

☞  $\Delta \tau$  - **собствено време** в  $K'$ ;

☞  $\Delta t$  - **координатно време**, определено за наблюдател в  $K$ , спрямо който обектът се движи.

Понеже при  $V < c$  очевидно  $\gamma > 1$ , то  $\Delta t > \Delta \tau$ , т.е. **координатното време** (*времето спрямо неподвижен наблюдател, относно който обектът се движи*) е **по-голямо от собственото време** (*времето спрямо наблюдател, който се движи заедно с обекта, но относно който обектът е в покой*).

③ **Относителност на едновременността**, т.е. две събития, които са едновременни относно дадена ИОС, са неедновременни относно всяка друга ИОС, движеща се със скорост  $V \neq 0$  спрямо дадената ИОС.



**\* Задача** (зад. 298/стр. 50) Дадено е уравнение на окръжност  $x'^2 + y'^2 = R^2$  спрямо отправна система  $K'$ . Да се получи уравнението на тази крива спрямо системата  $K$ . Да се даде релативистично тълкувание на получения резултат.

**Решение:**

За намирането на уравнението на тази крива в ОС  $K$ , ще приложим обратните трансформации на Лоренц, записани във вида

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \gamma \cdot (x - V \cdot t) \\ y' = y \\ t' = \gamma \cdot \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \end{cases} .$$

След заместването на  $x'$  и  $y'$  в уравнението на кривата (*окръжност*) в  $K'$ , получаваме

$$(2) \quad [\gamma \cdot (x - V \cdot t)]^2 + y^2 = R^2 \quad | : R^2$$

$$(3) \quad \frac{[\gamma \cdot (x - V \cdot t)]^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + y^2 = R^2$$

В този си вид уравнение (3) е уравнение на елипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , за която

двете полуоси имат големина съответно

$$(4a) \quad a = R \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv f(V), \text{ и} \quad (4b) \quad b = R = const .$$

Ако (*формално*)  $V \rightarrow c$ , то очевидно  $a \rightarrow 0$ . На този резултат може да се даде следната релативистична интерпретация: при високи (*релативистични*) скорости на движение линейните размери на материални обекти в направление на движението се редуцират (*скъсяват*). Линейните размери в направление, перпендикулярно по отношение на движението, обаче, не се променят. В нерелативистичния случай  $V \ll c$  подобна редукция на линейните размери не се наблюдава (*тя е несъществена*).

Числена оценка (зад. 295): ако приложим този резултат за Земята, разглеждана като кълбо с радиус  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ , имащо скорост на движение  $V = 30 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ , то релативистичното „скъсяване” на земния диаметър в направление на движението на Земята при нейното движение около Слънцето ще

$$\text{бъде } \Delta D = 2 \cdot \Delta R = 2 \left\{ R - R \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right\} = \dots = 6,4 \text{ cm} .$$

**\* Задача** (зад. 299/стр. 51) Да се докаже че трансформацията с уравнения

$$(1^a) \quad x' = x \cdot ch \psi - c \cdot t \cdot sh \psi \text{ и} \quad (1^b) \quad t' = t \cdot ch \psi - \frac{x}{c} \cdot sh \psi$$

запазва разстоянието (*интервала*) между две точки (*събития*) в пространство-времето.

**Доказателство:** по определение

$$S'^2_{12} = (ct'_1 - ct'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 = \{(ct_1 \cdot ch \psi - x_1 \cdot sh \psi) - (ct_2 \cdot ch \psi - x_2 \cdot sh \psi)\}^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\{(x_1 \cdot ch \psi - ct_1 \cdot sh \psi) - (x_2 \cdot ch \psi - ct_2 \cdot sh \psi)\}^2 = \\
& = \{c(t_1 - t_2) \cdot ch \psi - (x_1 - x_2) \cdot sh \psi\}^2 - \{(x_1 - x_2) \cdot ch \psi - c(t_1 - t_2) \cdot sh \psi\}^2 = \\
& = c^2(t_1 - t_2)^2 \cdot ch^2 \psi - 2c(t_1 - t_2)(x_1 - x_2) \cdot sh \psi \cdot ch \psi + (x_1 - x_2)^2 sh^2 \psi - \\
& - [(x_1 - x_2)^2 ch^2 \psi - 2c(t_1 - t_2)(x_1 - x_2) \cdot sh \psi \cdot ch \psi + c^2(t_1 - t_2)^2 \cdot sh^2 \psi] = \\
& = c^2(t_1 - t_2)^2 \cdot [ch^2 \psi - sh^2 \psi] - (x_1 - x_2)^2 [ch^2 \psi - sh^2 \psi] = \\
& = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2,
\end{aligned}$$

понеже  $ch^2 \psi - sh^2 \psi = 1$ . И така, доказахме, че

$$S'_{12}{}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \equiv S_{12}{}^2,$$

с което доказахме инвариантността на пространствено-временния интервал  $S_{12}{}^2$ .

★ **Задача:** да се изведат формули за релятивистично преобразуване на скоростта за случая  $\vec{V} \parallel O\vec{x}$ .

**Решение:** скоростта на материална точка спрямо ИОС ( $K$ ) е

$$(1) \quad V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Скоростта на същата материална точка спрямо друга ИОС ( $K'$ ), движеща се със скорост  $\vec{V} \parallel O\vec{x}$ , т.е.  $\vec{V}(V, 0, 0)$  спрямо първата, е

$$(2) \quad V'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Съгласно формулите (*обратните преобразования*) на Лоренц за координатите имаме

$$(3) \quad \begin{cases} x' = \gamma \cdot (x - V \cdot t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \cdot \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \end{cases} \Rightarrow (4) \quad \begin{cases} dx' = \gamma \cdot (dx - V \cdot dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma \cdot \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right) \end{cases}.$$

Замествайки (4) в (2), получаваме последователно

$$(5) \quad V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma \cdot (dx - V \cdot dt) / dt}{\gamma \cdot \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right) / dt} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - \frac{V}{c^2} (dx/dt)} = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}};$$

$$(6) \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \cdot \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right) / dt} = \frac{V_y}{\gamma \cdot \left( 1 - V_x \frac{V}{c^2} \right)}, \text{ и}$$

$$(7) \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \cdot \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right) / dt} = \frac{V_z}{\gamma \cdot \left( 1 - V_x \frac{V}{c^2} \right)}.$$

\***Допълнение:** с тези формули за трансформация на скоростта може да се аргументира (*математически*) принципът за инвариантност на скоростта на

светлината, и по-конкретно факта, че тя не може да надвиши стойността „ $c$ ”. Действително, ако изходим от предпоставката  $V_x \rightarrow c$ , и  $V_y = V_z = 0$ , то съгласно изведените по-горе формули (5), (6) и (7) ще следва, че и  $V'_y = V'_z = 0$ , обаче

$$(8) \quad V'_x = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}} \rightarrow \frac{c - V}{1 - c \frac{V}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{c - V}{\left(\frac{c - V}{c}\right)} = c.$$

Така обосновахме, че при  $V_x \rightarrow c$  е в сила и  $V'_x \rightarrow c$ , к.т.д.

**\* Задача:** да се изведат формули за релятивистично преобразуване на ускорението за случая  $\vec{V} \parallel O\vec{x}$ .

**Решение:** ускорението на материална точка (по компоненти) спрямо ИОС ( $K$ ) е

$$(1) \quad a_x = \frac{dV_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}.$$

Ускорението на същата материална точка спрямо друга ИОС ( $K'$ ), движеща се със скорост  $\vec{V} \parallel O\vec{x}$ , т.е.  $\vec{V}(V,0,0)$  спрямо първата, е

$$(2) \quad a'_x = \frac{dV'_x}{dt'}; \quad a'_y = \frac{dV'_y}{dt'}; \quad a'_z = \frac{dV'_z}{dt'}.$$

Имаме вече доказани (в предната задача) следните формули за релятивистично преобразуване на скоростите на материална точка:

$$(3) \quad V'_x = \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}}; \quad V'_y = \frac{V_y}{\gamma \cdot \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)}; \quad V'_z = \frac{V_z}{\gamma \cdot \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)},$$

а за релятивистичното трансформиране на безкрайно малкия интервал време отново можем да използваме преобразованието

$$(4) \quad dt' = \gamma \cdot \left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right).$$

Нека определим най-напред трансформационния закон на компонентата  $a'_x = \frac{dV'_x}{dt'}$  на ускорението. За целта ще е необходимо да определим  $dV'_x$  от (3):

$$(5) \quad dV'_x = d \left( \frac{V_x - V}{1 - V_x \frac{V}{c^2}} \right) = \frac{dV_x \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right) - (V_x - V) \left(-dV_x \frac{V}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{dV_x - V_x dV_x \frac{V}{c^2} + V_x dV_x \frac{V}{c^2} - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x - V dV_x \frac{V}{c^2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} = \frac{dV_x \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2}, \text{ т.е.}$$

$$(6) \quad dV_x' = \frac{dV_x}{\gamma^2 \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2}.$$

Замествайки (6) и (4) в (2), получаваме последователно

$$(7) \quad a_x' = \frac{dV_x'}{dt'} = \frac{dV_x}{\gamma^2 \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^2} \times \frac{1}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right) / dt} = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3}.$$

И така доказахме трансформационния закон за компонентата  $a_x'$  на ускорението

$$(8) \quad a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3} \equiv \frac{a_x \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - V_x \frac{V}{c^2}\right)^3}.$$

По аналогичен начин могат да бъдат определени трансформационните закони за  $a_y'$  и  $a_z'$ .

**\* Задача** (стр. 52/зад. 315) Два 4-вектора се наричат колинеарни, ако съответните им компоненти са пропорционални, т.е. ако

$$(1) \quad \frac{A^0}{B^0} = \frac{A^1}{B^1} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{A^3}{B^3} = k.$$

Да се докаже, че свойството колинеарност на два 4-вектора е инвариантно относно трансформациите на Лоренц.

**Решение:** за контравариантни 4-вектори преобразованията на Лоренц имат вида:

$$(2) \quad \begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases} \quad \text{и} \quad (3) \quad \begin{cases} B'^0 = \gamma(B^0 - \beta B^1) \\ B'^1 = \gamma(B^1 - \beta B^0) \\ B'^2 = B^2 \\ B'^3 = B^3 \end{cases}.$$

С помощта на (2) и (3) получаваме последователно

$$(4) \quad \frac{A'^0}{B'^0} = \frac{\gamma(A^0 - \beta A^1)}{\gamma(B^0 - \beta B^1)} = \frac{A^0 - \beta A^1}{B^0 - \beta B^1} = \frac{(kB^0) - \beta(kB^1)}{B^0 - \beta B^1} = k;$$

$$(5) \quad \frac{A'^1}{B'^1} = \frac{\gamma(A^1 - \beta A^0)}{\gamma(B^1 - \beta B^0)} = \frac{A^1 - \beta A^0}{B^1 - \beta B^0} = \frac{(kB^1) - \beta(kB^0)}{B^1 - \beta B^0} = k;$$

$$(6) \quad \frac{A'^2}{B'^2} = \frac{A^2}{B^2} = \frac{(kB^2)}{B^2} = k; \text{ и}$$

$$(7) \quad \frac{A'^3}{B'^3} = \frac{A^3}{B^3} = \frac{(kB^3)}{B^3} = k.$$

С това доказахме всъщност, че



$$(8) \quad \frac{A^{/0}}{B^{/0}} = \frac{A^{/1}}{B^{/1}} = \frac{A^{/2}}{B^{/2}} = \frac{A^{/3}}{B^{/3}} = k,$$

т.е. че 4-векторите  $A^\mu$  и  $B^\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) са колинеарни както в  $K$ , така и в  $K'$ , с което докажахме, че действително свойството „колинеарност“ е инвариантно свойство за 4-вектори.

## Тема: Релятивистична електродинамика

### ❖ Теоретичен минимум

📖 **4-скорост:**  $u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$ ,  $\mu=0,1,2,3$ , където

$$\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ - собствено време,}$$

$$\Rightarrow X^\mu = (ct, \vec{r}) \text{ - 4-радиус-вектор.}$$

$$\checkmark \quad u = (u^0, \vec{u}) = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right), \quad \checkmark \quad u^2 = u_\mu u^\mu = c^2.$$

📖 **4-вектор „енергия-импулс“ (4-импулс):**

$$\checkmark \quad P^\mu = m_0 \cdot u^\mu, \quad \mu=0,1,2,3$$

$$\checkmark \quad P = (p^0, \vec{p}),$$

$$\checkmark \quad P = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad \text{където}$$

$$\checkmark \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m_0 \vec{V}.$$

$$\checkmark \quad P^2 = (P^0)^2 - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \equiv inv \quad \text{- скаларен квадрат.}$$

$$\checkmark \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

📖 **Енергия на релятивистка частица:**

$$\checkmark \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \cdot m_0 c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma \cdot E_0, \quad \checkmark \quad E_0 = m_0 c^2.$$

$$\checkmark \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m_0 \text{ - релятивистична маса на частица, зависеща}$$

от скоростта  $\vec{v}$ , с която тя се движи, а  $m_0$  - маса в покой.

$$\checkmark \quad E = T + m_0 c^2, \quad \checkmark \quad T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \equiv (\gamma - 1) E_0.$$

$$\checkmark \quad \text{Сила на Лоренц: } \frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{E} + q \cdot (\vec{V} \times \vec{B}).$$

📖 **Полезни съотношения:**

$$\checkmark \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)};$$

$$\checkmark \quad \vec{v} = \frac{c \vec{p}}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}};$$

$$\checkmark \quad v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} = c \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}$$

Енергия  $E_\gamma$  и импулс  $p_\gamma$  на  $\gamma$ -квант (фотон):

$$\checkmark \quad E_\gamma = \hbar \omega, \quad \checkmark \quad p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{\hbar \omega}{c} = \hbar k.$$



★ **Задача:** Да се докаже представянето  $E = m_0 c^2 + T$ .

**Доказателство:**

По определение:

$$(1) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-x}},$$

където за удобство сме въвели обозначението  $\frac{v^2}{c^2} = x$ . Нека развием функцията

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  в ред на Тейлър в околност на т.  $x_0 = 0$ . Така  $f(x)$  ще се представи във вида

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

където  $f^{(n)}(0)$  са стойностите на  $n$ -тата производна на функцията  $f(x)$  в т.  $x_0 = 0$ .

Нека определим поне първите две от тях:

$$n=0 \Rightarrow f^{(0)}(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1;$$

$$n=1 \Rightarrow f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2 \cdot (1-x)^{3/2}} \Rightarrow f^{(1)}(0) = \frac{1}{2 \cdot (1-0)^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Така очевидно получаваме

$$(3) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \dots = 1 + \frac{1}{2} x + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} x$$

С отчитането на (3) и на полагането  $x = \frac{v^2}{c^2}$  изразът за енергията (1) добива вида

$$(4) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-x}} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 + m_0 c^2 \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} = m_0 c^2 + T.$$

★ **Задача:** Заряд  $q$  с маса в покой  $m_0$  се намира в покой в началото на КС. Върху заряда действа постоянно електрично поле, насочено по оста Ох.

Определете релятивистичната скорост и изразете координатите на заряда (*частицата*) като функция на времето.

**Решение:**

Начални условия (при  $t = 0$ ):

$$(1) \quad \vec{p}(0) = \vec{p}_0(0,0,0); \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0(0,0,0); \quad \vec{V}(0) = \vec{V}_0(0,0,0).$$

Полетата, действащи върху частицата, са

$$(2) \quad \vec{E} = (E, 0, 0), \quad \text{и} \quad (3) \quad \vec{B} = (0, 0, 0).$$

Тогава силата на Лоренц, действаща върху заряда, ще бъде

$$(4) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}),$$

или по компоненти:

$$(5) \quad \frac{d p_x}{dt} = q E; \quad \frac{d p_y}{dt} = 0; \quad \frac{d p_z}{dt} = 0.$$

След интегриране на ОДУ (5) с отчитане на началните условия (1) ще имаме:

$$(6) \quad p_x = q E t; \quad p_y = \text{const} \equiv 0; \quad p_z = \text{const} \equiv 0.$$

От друга страна релятивисткият импулс се представя във вида (*по компоненти*):

$$(7) \quad p_x = \gamma_x \cdot m_0 \cdot V_x; \quad p_y = \gamma_y \cdot m_0 \cdot V_y; \quad p_z = \gamma_z \cdot m_0 \cdot V_z.$$

След сравняването на равенства (6) и (7) получаваме

$$(8) \quad \gamma_x \cdot m_0 \cdot V_x = q E t; \quad V_y = 0; \quad V_z = 0.$$

Решаваме първото от тях относно  $V_x$ :

$$\frac{m_0 \cdot V_x}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} = q E t \quad \Big|^2 \quad m_0^2 \cdot V_x^2 = q^2 E^2 \cdot t^2 \left( 1 - \frac{V_x^2}{c^2} \right),$$

$$V_x^2 \left( m_0^2 + \frac{q^2 E^2 \cdot t^2}{c^2} \right) = q^2 E^2 \cdot t^2, \quad V_x^2 \left( m_0^2 + \frac{q^2 E^2 \cdot t^2}{c^2} \right) = q^2 E^2 \cdot t^2,$$

$V_x^2 (m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2) = q^2 E^2 t^2 c^2$ , откъдето след коренуване получаваме

$$(9) \quad V_x = \frac{dx}{dt} = q E \cdot c \cdot t (m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

като очевидно  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = c$ , както би следвало и да се очаква. Интегрираме (9),

което е ОДУ с разделящи се променливи

$$\begin{aligned} (10) \quad x(t) &= \int V_x(t) dt + C_1 = \int q E \cdot c \cdot t (m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt + C_1 = \\ &= q E \cdot c \int \frac{t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2}} dt + C_1 = \frac{q E \cdot c}{2} \int \frac{d t^2}{\sqrt{m_0^2 c^2 + (q E t)^2}} + C_1 = \\ &= \frac{q E \cdot c}{2} \cdot \frac{1}{(q E)^2} \int \frac{d (q E t)^2}{\sqrt{m_0^2 c^2 + (q E t)^2}} + C_1 = \frac{c}{2 q E} \int [m_0^2 c^2 + (q E t)^2]^{-\frac{1}{2}} d (q E t)^2 + C_1 = \\ &= \frac{c}{2 q E} \frac{1}{1/2} [m_0^2 c^2 + (q E t)^2]^{\frac{1}{2}} + C_1 = \frac{c}{q E} \sqrt{m_0^2 c^2 + (q E t)^2} + C_1 = \\ &= \frac{c}{q E} \left\{ \sqrt{m_0^2 c^2 + (q E t)^2} + C_1' \right\}. \end{aligned}$$

И така

$$(11) \quad x(t) = \frac{c}{qE} \left\{ \sqrt{m_0^2 c^2 + (qEt)^2} + C_1' \right\},$$

където интеграционната константа  $C_1'$  се определя от началните условия (1), а именно: щом  $x(0) = \frac{c}{qE} \left\{ \sqrt{m_0^2 c^2} + C_1' \right\} = \frac{c}{qE} \left\{ m_0 c + C_1' \right\} \equiv 0$ , то очевидно  $C_1' = -m_0 c$ , откъдето следва

$$(12) \quad x(t) = \frac{c}{qE} \left\{ \sqrt{m_0^2 c^2 + (qEt)^2} - m_0 c \right\}.$$

От уравнения (8) и от началните условия (1) получаваме още, че

$$(13) \quad y(t) = 0, \quad \text{и} \quad z(t) = 0.$$

★ **Задача** (зад. 320/стр. 52) Коя от величините за частица с маса в покой  $m_0$  е най-голяма:

$$\text{а) } \frac{m_0 V^2}{2}; \quad \text{б) } \frac{p^2}{2m_0}; \quad \text{в) } T \text{ (кинетична енергия)}$$

**Решение:**

Нека изразим всяка една от трите величини посредством релативистичния фактор  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$  и енергията на частицата в покой  $E_0 = m_0 c^2$ :

$$\text{а) По определение } E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \text{ следователно}$$

$$(1) \quad E^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = E_0^2.$$

Ако отчетем още, че всъщност  $E = \gamma \cdot E_0$ , то (1) добива вида

$$(2) \quad \gamma^2 E_0^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = E_0^2, \text{ откъдето } \gamma^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = 1, \quad \gamma^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} = 1,$$

$$\gamma^2 \frac{V^2}{c^2} = \gamma^2 - 1, \text{ т.е. } V^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} c^2. \text{ С така намерената стойност на } V^2 \text{ можем да}$$

определим величината

$$(3) \quad \frac{m_0 V^2}{2} = \frac{m_0}{2} V^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} m_0 c^2 \equiv \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} E_0 = \frac{(\gamma - 1) \cdot (\gamma + 1)}{2\gamma^2} E_0.$$

б) Величината  $\frac{p^2}{2m_0}$  ще изразим от условието за инвариантност на квадрата

на 4-импулса:

$$(4) \quad \left( \frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

откъдето

$$p^2 = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2 = \left( \frac{\gamma m_0 c^2}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2 = (\gamma m_0 c)^2 - m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 - m_0^2 c^2 = (\gamma^2 - 1) m_0^2 c^2.$$

Тогава

$$(5) \quad \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2m_0} p^2 = \frac{1}{2m_0} (\gamma^2 - 1) m_0^2 c^2 = \frac{(\gamma^2 - 1)}{2} m_0 c^2 \equiv \frac{(\gamma^2 - 1)}{2} E_0.$$

в) Накрая изразяваме и кинетичната енергия  $T$  посредством  $E_0$ , като за тази цел използваме представянето

$$(6) \quad E = T + m_0 c^2,$$

откъдето, отчитайки отново че  $E = \gamma m_0 c^2$ , следва

$$(7) \quad T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \equiv (\gamma - 1) E_0.$$

И така дотук имаме:

$$(8.1) \quad \frac{m_0 V^2}{2} = \frac{(\gamma - 1) \cdot (\gamma + 1)}{2\gamma^2} E_0;$$

$$(8.2) \quad \frac{p^2}{2m_0} = \frac{(\gamma - 1) \cdot (\gamma + 1)}{2} E_0, \text{ и}$$

$$(8.3) \quad T = (\gamma - 1) E_0.$$

От (8.1) и (8.2), с отчитане на (8.3), имаме

$$(9.1) \quad \frac{m_0 V^2}{2} = \frac{(\gamma + 1)}{2\gamma^2} T; \quad \text{и} \quad (9.2) \quad \frac{p^2}{2m_0} = \frac{(\gamma + 1)}{2} T.$$

Понеже релативистичният фактор  $\gamma > 1$ , то съгласно (9.2)

$$(10) \quad \frac{p^2}{2m_0} > T.$$

А ако отчетем (9.2) в (9.1), ще получим

$$(11) \quad \frac{m_0 V^2}{2} = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{p^2}{2m_0} \right),$$

което при  $\gamma > 1$  означава, че

$$(12) \quad \frac{m_0 V^2}{2} < \frac{p^2}{2m_0}.$$

От (10) и (12) заключаваме, че най-голямата измежду трите величини е  $\frac{p^2}{2m_0}$ .

При тези обстоятелства от (9.1) можем да заключим, че  $\frac{m_0 V^2}{2}$  е най-малката.

**\* Задача** (зад. 322/стр. 52) Изразете големината  $p$  на импулса на една релативистка частица посредством кинетичната ѝ енергия  $T$ .

**Решение:**

За решаването на задачата е достатъчно да използваме инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

$$(1) \quad \left( \frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

както и формулата за пълната енергия

$$(2) \quad E = T + m_0 c^2.$$

Заместваме (2) в (1)

$$(3) \quad \left( \frac{T + m_0 c^2}{c} \right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2 \quad | \cdot c^2$$

$$(4) \quad (T + m_0 c^2)^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4, \text{ откъдето}$$

$$p^2 c^2 = (T + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2T.m_0 c^2 + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^4 = T^2 + 2T.m_0 c^2 = T(T + 2.m_0 c^2).$$

След разделяне с  $c^2$  и коренуване получаваме точно

$$(5) \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2.m_0 c^2)},$$

което представлява търсената зависимост.

**\* Задача** (зад. 323/стр. 52) Изразете скоростта  $\vec{V}$  на една релятивистка частица посредством нейния импулс  $\vec{p}$ .

**Решение:**

Отново използваме формулата, изразяваща инвариантността на скаларния квадрат на 4-импулса

$$(1) \quad \left( \frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2,$$

и формулата за пълната енергия, записана този път, обаче, в стандартната релятивистична форма

$$(2) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Заместваме  $E$  от (2) в (1) и решаваме така полученото уравнение относно скоростта  $\vec{V}$ :

$$\left( \frac{1}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - p^2 = m_0^2 c^2, \Rightarrow \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = p^2 + m_0^2 c^2,$$

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}, \Rightarrow \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}, \Rightarrow V^2 = \frac{p^2 + m_0^2 c^2 - m_0^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2} \cdot c^2,$$

$$V^2 = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2} \cdot c^2, \text{ откъдето заключаваме, че}$$

$$(3) \quad \vec{V} = \frac{\vec{p} \cdot c}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}.$$

**\* Задача** (зад. 324/стр. 52) Изразете скоростта  $V$  на една релятивистка частица посредством нейната релятивистична енергия  $E$ .

**Решение:**

По определение

$$(1) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad |^2, \Rightarrow E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \Rightarrow 1 - \frac{V^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{E^2},$$

$$\frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}, \quad \Rightarrow \quad V^2 = \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}\right) c^2, \text{ откъдето след коренуване}$$

$$(2) \quad V = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} = c \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}.$$

**\* Задача:** Върху намираща се в покой частица, имаща маса  $m_1$  (маса в покой) пада друга (втора) частица с маса  $m_2$  (маса в покой), в резултат от което се образува нова частица с маса  $M$  ( $M > m_1 + m_2$ ). Да се определи минималната кинетична енергия  $T_2^{\min}$  на втората частица, достатъчна за осъществяването на такъв процес.

**Решение:**

За решаването на задачата ще използваме следните основни формули от релативистката динамика:

$$(Ф.1) \quad P^2 = P'^2,$$

където  $P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$  и  $P' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}'\right)$  са стойностите на 4-импулса на системата в две

различни координатни системи  $K$  и  $K'$ , използвани за описанието на системата преди и след взаимодействието съответно;

$$(Ф.2) \quad E = T + m_0 c^2;$$

$$(Ф.3) \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)};$$

Нека най-напред разгледаме стълкновението на частиците в лабораторна КС ( $K$ ). За енергиите и импулсите на двете частици имаме съответно

$$(1) \quad E_1 = m_1 c^2 \quad (\text{енергия на частица в покой});$$

$$(2) \quad p_1 = 0; \text{ и}$$

$$(3) \quad E_2 = T_2 + m_2 c^2;$$

$$(4) \quad p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T_2(T_2 + 2m_2 c^2)}.$$

Пълната енергия и пълният импулс на системата до удара е:

$$(5) \quad E = E_1 + E_2 = (m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2;$$

$$(6) \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \equiv \vec{p}_2.$$

Тогава пълният 4-вектор на импулса на системата е

$$(7) \quad P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2}{c}, \vec{p}_2\right),$$

чийто скаларен квадрат е

$$(8) \quad P^2 = \left(\frac{(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2}{c}\right)^2 - p_2^2 = \frac{1}{c^2} [(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2]^2 - p_2^2.$$

Същия кинематичен анализ на системата провеждаме и след взаимодействието на частиците, но този път го реализираме спрямо КС ( $K'$ ), свързана с центъра на масите на частиците.

При това следва да вземем под внимание и обстоятелството, че под минимална кинетична енергия  $T_2^{\min}$  на втората частица се разбира такава енергия,

при която новообразуваната се частица с маса  $M$  само ще се „композира”, без да притежава каквато и да е кинетична енергия, т.е. енергията и импулса на системата (*частицата*) след удара ще бъдат съответно

$$(9) \quad E' = M \cdot c^2 \text{ (енергия на частица в покой).}; \text{ и } (10) \quad \vec{p}' = 0 \text{ (частица в покой).}$$

Тогава 4-импулса в системата  $K'$  ще бъде

$$(10) \quad P' = \left( \frac{E'}{c}, \vec{p}' \right) = \left( \frac{M \cdot c^2}{c}, 0 \right),$$

а неговият скаларен квадрат ще бъде

$$(11) \quad P'^2 = \left( \frac{M \cdot c^2}{c} \right)^2 - 0 \equiv M^2 \cdot c^2.$$

Остана да приложим (Ф.1), изразяваща инвариантността на квадрата на 4-импулса, а именно отчитайки (8) и (11), и с уговорката че  $T_2 \rightarrow T_2^{\min}$  ще имаме

$$(12) \quad \frac{1}{c^2} [(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2^2 = M^2 \cdot c^2 \quad | \cdot c^2$$

$$(13) \quad [(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2^{\min}]^2 - p_2^2 \cdot c^2 = M^2 \cdot c^4$$

Ако в (13) заместим  $p_2$  от (4) (*отново с уговорката че  $T_2 \rightarrow T_2^{\min}$* ), ще имаме

$$(14) \quad [(m_1 + m_2) \cdot c^2 + T_2^{\min}]^2 - c^2 \frac{1}{c^2} [T_2^{\min} (T_2^{\min} + 2m_2 c^2)] = M^2 \cdot c^4.$$

Решаваме горното уравнение относно  $T_2^{\min}$ :

$$(m_1 + m_2)^2 \cdot c^4 + 2(m_1 + m_2) \cdot c^2 T_2^{\min} + \{T_2^{\min}\}^2 - \{T_2^{\min}\}^2 - 2T_2^{\min} m_2 c^2 = M^2 \cdot c^4;$$

$$(m_1 + m_2)^2 \cdot c^4 + 2m_1 \cdot c^2 T_2^{\min} = M^2 \cdot c^4;$$

$$2m_1 \cdot c^2 T_2^{\min} = M^2 \cdot c^4 - (m_1 + m_2)^2 \cdot c^4.$$

И така

$$(15) \quad T_2^{\min} = \frac{\{M^2 - (m_1 + m_2)^2\}}{2m_1} \cdot c^2.$$

Понеже по условие  $M > m_1 + m_2$ , то очевидно  $T_2^{\min} > 0$ . А ако  $T_2 > T_2^{\min}$ , то частицата, образувана след взаимодействието, няма да остане в покой, а ще започне да се движи със някаква (*различна от нула*) скорост.

**Тема: 4-тензор на електромагнитното поле. Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма. Уравнения на Максвел.**

❖ **Теоретичен минимум**

📖 **4-потенциал:**  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ , или още  $A^\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right)$ , където:

☞  $\varphi$  - скаларен потенциал на ЕМ поле;

☞  $\vec{A}$  - магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.

✓ **Интензитет на електричното поле:**  $\vec{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

✓ **Индукция на магнитното поле:**  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

📖 **Антисиметричен 4-тензор на ЕМ поле  $F_{\mu\nu}$ :**



$$\checkmark \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \text{ като очевидно } F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}.$$

$$\checkmark \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix};$$

$$\checkmark \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

### 📖 Обемна плътност на точков(и) заряд(и):

$$\checkmark \quad \rho_a = q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

$$\checkmark \quad \rho = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \equiv \sum_a \rho_a - \text{за система от точкови заряди}$$

### 📖 4-вектор на плътността на тока:

$$\checkmark \quad j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}, \quad \text{за } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

$$\checkmark \quad j^\mu = (\rho.c, \vec{j}).$$

$$\Rightarrow \vec{j}_a = q_a \vec{V}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) - \text{„ток“}, \text{ обусловен от един точков заряд;}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \sum_a \vec{j}_a = \sum_a q_a \vec{V}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) - \text{ток на с-ма от точкови заряди.}$$

### 📖 Уравнение за непрекъснатостта в диференциална форма:

$$\checkmark \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0,$$

или още в **4-мерна форма**, записано чрез **векторна 4-дивергенция**, приложена над 4-вектора на плътността на тока

$$\checkmark \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \text{за } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

### 📖 Уравнение на електромагнитното поле в ковариантна форма.

$$\checkmark \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 j^\nu, \quad \text{за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

където  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c^2}$  - магнитна константа.

### 📖 Тримерна форма на уравненията на Максвел

Уравненията

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array} \right.$$

са уравнения на електромагнитното поле в **тримерна форма**. Те се наричат **уравнения на Максвел**.

### 📖 **Енергия на ЕМ поле**

✓  $W = \int_{V_\infty} \left( \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) dV$  - **енергия на ЕМ поле в цялото пространство.**

✓  $w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$  - **обемна плътност на енергията на ЕМ поле,**

✓  $w_E = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2},$  и ✓  $w_M = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}.$

✓  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$  - **вектор на Умов-Пойтинг.**



★ **Задача:** Да се определят (в явен вид) компонентите на **4-тензора на електромагнитното поле**  $F_{\mu\nu}$ .

**Решение:**

**4-тензорът**  $F_{\mu\nu}$ , наречен **тензор на електромагнитното поле**, има компоненти, които се изразяват чрез компонентите на ковариантния 4-потенциал  $A_\mu$  и тези на контравариантния 4-радиус-вектор  $X^\mu$  посредством съотношението

$$(1) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \text{ за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Нека припомним, че:

☞ **4-радиус-векторът**  $X^\mu$  е 4-вектор с компоненти

$$(2) \quad X \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z);$$

☞ **4-потенциалът**  $A^\mu$  е 4-вектор, който се изразява посредством **скаларния**  $\varphi$  и **векторния**  $\vec{A}$  **потенциали** във вида

$$(3^A) \quad A^\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right) \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left( \frac{\varphi}{c}, A_x, A_y, A_z \right) - \text{контравариантна форма; и}$$

$$(3^B) \quad A_\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, -\vec{A} \right) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = \left( \frac{\varphi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z \right) - \text{ковариантна форма.}$$

Чрез потенциалите  $\varphi$  и  $\vec{A}$  се изразяват и **полевите вектори**  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (векторите на електромагнитното поле), а именно:

$$(*) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } \varphi(\vec{r}, t), \text{ т.е.}$$

$$(4) \quad \boxed{E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \boxed{E_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad \boxed{E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}},$$

и

$$(**) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$(5) \quad \boxed{B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}}, \quad \boxed{B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}}, \quad \boxed{B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}.$$

Нека отбележим, че  $F_{\mu\nu}$  е **антисиметричен тензор**, т.е.  $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ , като очевидно  $F_{kk} = 0$ , и трябва следователно да притежава **матрично представяне** от вида

$$(6) \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нека припомним още, че в алгебрата на тензорите се използват т.нар. операции „сваляне” и „качване” на индекс(и), като се следва едно общо **правило**: когато индексът е „0” (т.е. **временен индекс**), знакът на компонентата на тензора **не се променя**, обаче когато индексът е 1, 2 или 3 (т.е. **пространствен индекс**), то знакът на компонентата на тензора **се променя**. От казаното следва, че когато операциите „сваляне” и „качване” на индекси се прилага едновременно и за двата индекса на 4-тензор, то:

- ако те са в комбинация „временен+пространствен”, знакът се мени;
- ако те са в комбинация „пространствен+пространствен”, знакът не се променя.

След всичко казано дотук можем да намерим компонентите на 4-тензора на електромагнитното поле с помощта на (1):

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \frac{\partial(-A_x)}{\partial(ct)} - \frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x} = \frac{1}{c} \left( -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \dots \text{от } (*) \dots = \frac{1}{c} E_x = \frac{E_x}{c}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{F_{01} = \frac{E_x}{c}}.$$

По аналогичен начин се доказва, че  $\boxed{F_{02} = \frac{E_y}{c}}$  и  $\boxed{F_{03} = \frac{E_z}{c}}$ .

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \dots \text{от } (**) \dots = -B_z \equiv -(\text{rot } \vec{A})_z,$$

т.е.  $\boxed{F_{12} = -B_z}$ .

Аналогично определяме още

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = \frac{\partial(-A_z)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \dots \text{от (**)} \dots = B_y \equiv (\text{rot } \vec{A})_y,$$

т.е.  $F_{13} = B_y$ .

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = \frac{\partial(-A_z)}{\partial y} - \frac{\partial(-A_y)}{\partial z} = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \dots \text{от (**)} \dots = -B_x \equiv -(\text{rot } \vec{A})_x,$$

т.е.  $F_{23} = -B_x$ .

И така, определихме всичките 6 на брой **независими** компоненти на **антисиметричния** 4-тензор на ЕМ. Останалите 6 се получават от правилото за антисиметричност  $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ , а четирите елемента по главния диагонал са **равни на нула** (свойство на антисиметричните тензори). Следователно ковариантният 4-тензор на ЕМ може да се запише в следния **явен вид**

$$(7) \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощта на правилата за „вдигане“ на индекси 4-тензорът на ЕМ поле може да бъде записан и в следната контравариантна форма

$$(8) \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

или накратко  $F_{\mu\nu} = \left(\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$  и  $F^{\mu\nu} = \left(-\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right)$ .

От (7) и (8) се вижда, че компонентите на векторите на полето  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  се явяват компоненти на 4-тензора на електромагнитното поле  $F_{\mu\nu}$ .

**\* Задача:** Да се определят трансформационните закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор  $\Phi^{\mu\nu}$  в контравариантен запис.

**Решение:** ще докажем, че

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{01} = \Phi'^{01} \\ \Phi^{02} = \gamma[\Phi'^{02} + \beta \cdot \Phi'^{12}] \\ \Phi^{03} = \gamma[\Phi'^{03} + \beta \cdot \Phi'^{13}] \\ \Phi^{12} = \gamma[\Phi'^{12} + \beta \cdot \Phi'^{02}] \\ \Phi^{13} = \gamma[\Phi'^{13} + \beta \cdot \Phi'^{03}] \\ \Phi^{23} = \Phi'^{23} \end{array} \right. \quad \text{където } \Phi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} & \Phi^{02} & \Phi^{03} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} & \Phi^{12} & \Phi^{13} \\ \Phi^{20} & \Phi^{21} & \Phi^{22} & \Phi^{23} \\ \Phi^{30} & \Phi^{31} & \Phi^{32} & \Phi^{33} \end{pmatrix},$$

\*Първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба..

За извеждането на тези трансформационни закони се приема (*използва*), че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на  $\Phi^{\mu\nu}$  се трансформира така, както се трансформира производението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. А както е известно трансформациите на Лоренц за контравариантен 4-вектор се дават с равенствата

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 = \gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1) \\ x^1 = \gamma(x'^1 + \beta \cdot x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{array} \right., \text{ където } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ и } \beta = \frac{V}{c}.$$

Така можем да получим последователно

$$\begin{aligned} \Phi^{01} &\rightarrow x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta \cdot x'^0)] = \\ &= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta \cdot x'^0 + \beta \cdot x'^1 x'^1 + \beta \cdot x'^1 \cdot \beta \cdot x'^0] \rightarrow \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta \cdot \Phi'^{00} + \beta \cdot \Phi'^{11} + \beta^2 \cdot \Phi'^{10}] = \dots \\ &\dots \text{ но за антисиметричен тензор } \Phi^{00} = \Phi^{11} = 0, \text{ и още } \Phi^{10} = -\Phi^{01} \dots \dots \\ &= \gamma^2 [\Phi'^{01} - \beta^2 \cdot \Phi'^{01}] = \Phi'^{01} \gamma^2 [1 - \beta^2] = \Phi'^{01} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right]^2 \left[ 1 - \frac{V}{c} \right]^2 \equiv \Phi'^{01}. \end{aligned}$$

$$\Phi^{02} \rightarrow x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^0 \cdot x'^2 + \beta \cdot x'^1 \cdot x'^2] \rightarrow \gamma [\Phi'^{02} + \beta \cdot \Phi'^{12}].$$

$$\Phi^{03} \rightarrow x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma [x'^0 \cdot x'^3 + \beta \cdot x'^1 \cdot x'^3] \rightarrow \gamma [\Phi'^{03} + \beta \cdot \Phi'^{13}].$$

$$\Phi^{12} \rightarrow x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta \cdot x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^1 \cdot x'^2 + \beta \cdot x'^0 \cdot x'^2] \rightarrow \gamma [\Phi'^{12} + \beta \cdot \Phi'^{02}].$$

$$\Phi^{13} \rightarrow x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta \cdot x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma [x'^1 \cdot x'^3 + \beta \cdot x'^0 \cdot x'^3] \rightarrow \gamma [\Phi'^{13} + \beta \cdot \Phi'^{03}].$$

$$\Phi^{23} \rightarrow x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \rightarrow \Phi'^{23}.$$

**★ Задача:** Да се определят трансформационните закони за компонентите на симетричен 4-тензор  $\Phi^{\mu\nu}$  в контравариантен запис.

**Решение:**

За извеждането на трансформационните закони за 10-те независими компоненти на симетричен четиритензор  $\Phi^{\mu\nu} = \Phi^{\nu\mu}$  отново използваме, че при смяна на ИОС всяка контравариантна компонента на  $\Phi^{\mu\nu}$  се трансформира така, както се трансформира произведението от компоненти на два контравариантни 4-вектора. Така получаваме последователно:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Phi^{00} &\rightarrow x^0 x^0 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] = \\ &= \gamma^2 (x'^0 x'^0 + 2\beta \cdot x'^0 x'^1 + \beta^2 x'^1 x'^1) \rightarrow \gamma^2 (\Phi'^{00} + 2\beta \cdot \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{11}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Phi^{01} &\rightarrow x^0 x^1 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta \cdot x'^0)] = \\ &= \gamma^2 [x'^0 x'^1 + x'^0 \beta \cdot x'^0 + \beta x'^1 x'^1 + \beta x'^1 \cdot \beta \cdot x'^0] \rightarrow \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11} + \beta^2 \Phi'^{10}] = \\ &\dots \text{ за симетричен тензор } \Phi^{10} = \Phi^{01} \dots \\ &= \gamma^2 [\Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{01} + \beta \Phi'^{00} + \beta \Phi'^{11}] = \gamma^2 [(1 + \beta^2) \Phi'^{01} + \beta (\Phi'^{00} + \Phi'^{11})]. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{02} \rightarrow x^0 x^2 = [\gamma(x'^0 + \beta \cdot x'^1)] \cdot x'^2 = \gamma [x'^0 \cdot x'^2 + \beta x'^1 \cdot x'^2] \rightarrow \gamma [\Phi'^{02} + \beta \Phi'^{12}].$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{03} \rightarrow x^0 x^3 = [\gamma(x'^0 + \beta x'^1)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^0 \cdot x'^3 + \beta x'^1 \cdot x'^3] \rightarrow \gamma[\Phi'^{03} + \beta \Phi'^{13}].$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Phi^{11} &\rightarrow x^1 x^1 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] = \\ &= \gamma^2 [x'^1 \cdot x'^1 + \beta x'^1 \cdot x'^0 + \beta x'^0 \cdot x'^1 + \beta^2 x'^0 \cdot x'^0] \rightarrow \\ &\rightarrow \gamma^2 [\Phi'^{11} + \beta \Phi'^{10} + \beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}] = \gamma^2 [\Phi'^{11} + 2\beta \Phi'^{01} + \beta^2 \Phi'^{00}]. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{12} \rightarrow x^1 x^2 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^2 = \gamma[x'^1 \cdot x'^2 + \beta x'^0 \cdot x'^2] \rightarrow \gamma[\Phi'^{12} + \beta \Phi'^{02}].$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{13} \rightarrow x^1 x^3 = [\gamma(x'^1 + \beta x'^0)] \cdot x'^3 = \gamma[x'^1 \cdot x'^3 + \beta x'^0 \cdot x'^3] \rightarrow \gamma[\Phi'^{13} + \beta \Phi'^{03}].$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{22} \rightarrow x^2 x^2 = x'^2 \cdot x'^2 \rightarrow \Phi'^{22}$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{23} \rightarrow x^2 x^3 = x'^2 \cdot x'^3 \rightarrow \Phi'^{23}.$$

$$\Leftrightarrow \Phi^{33} \rightarrow x^3 x^3 = x'^3 \cdot x'^3 \rightarrow \Phi'^{33}.$$

★ **Задача** Да се определят трансформационните закони за скаларния  $\varphi$  и векторния  $\vec{A}$  потенциали.

**Решение:** нека за целта приложим законите за лоренцовите трансформации на 4-вектор

$$\begin{aligned} (1) \quad A^0 &= \gamma(A'^0 + \beta A'^1); \\ A^1 &= \gamma(A'^1 + \beta A'^0); \\ A^2 &= A'^2; \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-потенциала  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ , където

$$\Leftrightarrow A^0 = \frac{\varphi}{c}, \quad \text{където } \varphi \text{ - скаларен потенциал на ЕМ поле;}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} \text{ - магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.}$$

Така получаваме последователно:

$$(2.a) \quad \frac{\varphi}{c} = \gamma \left( \frac{\varphi'}{c} + \frac{V}{c} A'_x \right), \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \frac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(2.б) \quad A_x = \gamma \left( A'_x + \frac{V}{c} \frac{\varphi'}{c} \right), \quad \text{т.е.} \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c^2} \varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(2.в) \quad A_y = A'_y, \text{ и}$$

$$(2.г) \quad A_z = A'_z.$$

Чрез формална замяна на „примовани“ с „непримовани“ величини, както и на  $V$  със  $-V$  се получават и „обратните“ преобразования за потенциалите.

★ **Задача:** да се определят трансформационните закони за 4-вектора на плътността на тока.

**Решение:** по определение този 4-вектор се изразява посредством обемната плътност на електричните заряди  $\rho$  и 4-радиус-вектора  $X^\mu$  с равенството

$$(1) \quad j^\mu = \rho \frac{dX^\mu}{dt},$$

или още в следния явен вид

$$(2) \quad j^\mu = (\rho.c, \vec{j}),$$

където  $\vec{j} = \rho \vec{V}$  е класическият (*тримерен*) вектор на плътността на тока, имащ компоненти  $\vec{j}(\rho.V_x, \rho.V_y, \rho.V_z)$ .

Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

$$\begin{aligned} A^0 &= \gamma(A'^0 + \beta A'^1); \\ (2) \quad A^1 &= \gamma(A'^1 + \beta A'^0); \\ A^2 &= A'^2; \\ A^3 &= A'^3. \end{aligned}$$

спрямо компонентите на 4-вектора на плътността на тока  $j^\mu = (\rho.c, \vec{j})$ . Така получаваме последователно:

$$(3.a) \quad \rho.c = \gamma\left(\rho'.c + \frac{V}{c} j'_x\right), \quad \text{т.е.} \quad \rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(3.б) \quad j_x = \gamma\left(j'_x + \frac{V}{c}(\rho'.c)\right), \quad \text{т.е.} \quad j_x = \frac{j'_x + V \cdot \rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(3.в) \quad j_y = j'_y, \quad \text{и}$$

$$(3.г) \quad j_z = j'_z.$$

Чрез формална замяна на „примовани“ с „непримовани“ величини, както и на  $V$  със  $-V$  се получават и „обратните“ преобразования за този 4-вектор.

★ **Задача:** да се определят трансформационните закони при преобразование на Лоренц за векторите на полето  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

**Решение:** както вече бе споменато, трансформационните закони за векторите на полето  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  могат да бъдат получени с помощта на трансформационни закони на 4-тензори. Тъй като компонентите на векторите  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  участват в 4-тензора на електромагнитното поле, логично е да се опитае да получим трансформациите на Лоренц за векторите на полето с помощта на трансформационните закони за антисиметричния 4-тензор на електромагнитното поле  $F_{\mu\nu}$ .

Ще използваме получените вече (*в предишна задача*) трансформационни закони за 6-те независими компоненти на антисиметричен 4-тензор  $F^{\mu\nu}$  в контравариантен запис:

$$(1) \begin{cases} F^{01} = F'^{01} \\ F^{02} = \gamma[F'^{02} + \beta.F'^{12}] \\ F^{03} = \gamma[F'^{03} + \beta.F'^{13}] \\ F^{12} = \gamma[F'^{12} + \beta.F'^{02}] \\ F^{13} = \gamma[F'^{13} + \beta.F'^{03}] \\ F^{23} = F'^{23} \end{cases} \quad \text{където } F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix},$$

като първият индекс е индекс на реда, а вторият – на стълба.

Ако вземем под внимание, че

$$(2) F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y/c & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z/c & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix},$$

то от 6-те трансформационни закона (1) се получават следните 6 равенства

$$\textcircled{1} \quad F^{01} = F'^{01} \Rightarrow E_x/c = E'_x/c, \text{ т.е.}$$

$$(3) \quad \boxed{E_x = E'_x}.$$

$$\textcircled{2} \quad F^{02} = \gamma[F'^{02} + \beta.F'^{12}] \Rightarrow -\frac{E_y}{c} = \gamma \left\{ \left[ -\frac{E'_y}{c} \right] + \frac{V}{c} \cdot [-B'_z] \right\} \quad | \cdot (-c), \text{ т.е.}$$

$$(4) \quad \boxed{E_y = \gamma (E'_y + V \cdot B'_z)}.$$

$$\textcircled{3} \quad F^{03} = \gamma[F'^{03} + \beta.F'^{13}] \Rightarrow -\frac{E_z}{c} = \gamma \left\{ \left[ -\frac{E'_z}{c} \right] + \frac{V}{c} \cdot B'_y \right\} \quad | \cdot (-c), \text{ т.е.}$$

$$(5) \quad \boxed{E_z = \gamma (E'_z - V \cdot B'_y)}.$$

$$\textcircled{4} \quad F^{12} = \gamma[F'^{12} + \beta.F'^{02}] \Rightarrow -B_z = \gamma \left\{ -B'_z + \frac{V}{c} \cdot \left[ -\frac{E'_y}{c} \right] \right\} \quad | \cdot (-1), \text{ т.е.}$$

$$(6) \quad \boxed{B_z = \gamma \left\{ B'_z + \frac{V}{c^2} \cdot E'_y \right\}}.$$

$$\textcircled{5} \quad F^{13} = \gamma[F'^{13} + \beta.F'^{03}] \Rightarrow B_y = \gamma \left\{ B'_y + \frac{V}{c} \cdot \left[ -\frac{E'_z}{c} \right] \right\}, \text{ т.е.}$$

$$(7) \quad \boxed{B_y = \gamma \left\{ B'_y - \frac{V}{c^2} \cdot E'_z \right\}}.$$

$$\textcircled{6} \quad F^{23} = F'^{23} \Rightarrow -B_x = -B'_x, \text{ т.е.}$$

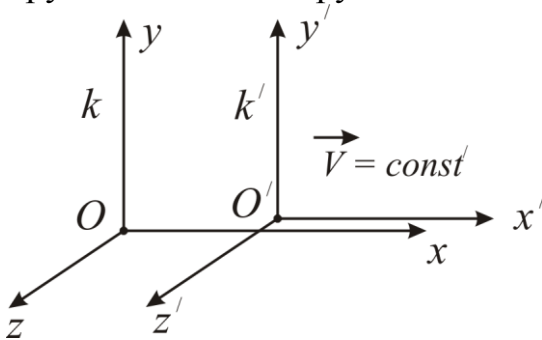
$$(8) \quad \boxed{B_x = B'_x}.$$

И така, трансформациите на Лоренц за векторите на електромагнитното поле имат вида:



$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x, \\ E_y = \gamma (E'_y + V \cdot B'_z) \equiv \frac{E'_y + V \cdot B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ E_z = \gamma (E'_z - V \cdot B'_y) \equiv \frac{E'_z - V \cdot B'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = B'_x, \\ B_y = \gamma \left\{ B'_y - \frac{V}{c^2} \cdot E'_z \right\} \equiv \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} \cdot E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ B_z = \gamma \left\{ B'_z + \frac{V}{c^2} \cdot E'_y \right\} \equiv \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} \cdot E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{array} \right.$$

\***Допълнение:** Трансформациите на Лоренц (9) показват **единната природа на електромагнитното поле**, но разкриват и една негова важна **особеност** - **ЕМ поле е относително**, т.е. то има една стойност за един наблюдател (*една ИОС*) и друга стойност за друг наблюдател (*друга ИОС*).



Тъй като формули (9) са изведени за случая на т.нар. **специални трансформации** на Лоренц, за които скоростта на системата  $K'$  спрямо системата  $K$  е  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ , то очевидно могат да се въведат **успоредни** ( $\parallel$ ) и **перпендикулярни** ( $\perp$ ) на  $\vec{V}$  „компоненти” на полевите вектори  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а именно

$$\vec{E}_{\parallel} = (E_x, 0, 0) \text{ и } \vec{E}_{\perp} = (0, E_y, E_z), \text{ като } \boxed{\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}};$$

$$\vec{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0) \text{ и } \vec{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z), \text{ като } \boxed{\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}}.$$

Очевидно същото представяне по ( $\parallel$ ) и ( $\perp$ ) спрямо  $\vec{V}$  „компоненти” може да се приложи и в ИОС  $K'$ , т.е. за „*примованите*” координати.

$$\vec{E}'_{\parallel} = (E'_x, 0, 0) \text{ и } \vec{E}'_{\perp} = (0, E'_y, E'_z), \text{ като } \vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp};$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = (B'_x, 0, 0) \text{ и } \vec{B}'_{\perp} = (0, B'_y, B'_z), \text{ като } \vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}.$$

Лесно може да се установи, че компонентите на векторното произведение  $\vec{V} \times \vec{E}$  и  $\vec{V} \times \vec{B}$  са

$$(*) \quad \vec{V} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + (-VE_z) \vec{j} + (VE_y) \vec{k}, \text{ и}$$

$$(**) \quad \vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + (-VB_z) \vec{j} + (VB_y) \vec{k}.$$

С отчитането на (\*) и (\*\*) трансформационните закони (9) могат да се представят още във вида

$$(9') \quad \begin{cases} E_x = E'_x, \\ E_y = \gamma (E'_y - (\vec{V} \times \vec{B}')_z) \\ E_z = \gamma (E'_z - (\vec{V} \times \vec{B}')_y); \quad u \\ B_x = B'_x, \\ B_y = \gamma \left\{ B'_y + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \times \vec{E}')_z \right\}, \\ B_z = \gamma \left\{ B'_z + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \times \vec{E}')_y \right\}. \end{cases}$$

Ако запишем трансформациите на Лоренц (9') с помощта на така въведените ( $\parallel$ ) и ( $\perp$ ) „компоненти“, то те ще имат вида на следните векторни равенства

$$(10) \quad \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma [\vec{E}'_{\perp} - \vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] \right). \end{cases}$$

Вижда се, че при смяна на ИОС „компонентите“  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{B}_{\parallel}$ , които са насочени по посока на скоростта  $\vec{V}$ , **не се изменят**.

**\* Задача:** да се докаже следното (неочевидно) **свойство** на ЕМ поле: ако напр. спрямо „подвижна“ система  $K'$  полето е само (т.е. „чисто“) електрично ( $\vec{B}' = 0$ ), или само (т.е. „чисто“) магнитно ( $\vec{E}' = 0$ ), то и в двата случая относно някаква „неподвижна“ координатна система  $K$  електричното и магнитното полета са взаимно перпендикулярни, т.е.  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

**Доказателство:**

1.) Допускаме, че полето в  $K'$  е **само електрично**, т.е. че  $\vec{B}' = 0$ . Това ще означава, че  $\vec{B}'_{\parallel} = 0$  и  $\vec{B}'_{\perp} = 0$ . Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp} \end{cases} \quad \text{и} \quad (2) \quad \begin{cases} \vec{B}_{\parallel} = 0 \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}]. \end{cases}$$

Ако изразим  $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}$  и заместим в израза (2) за  $\vec{B}_{\perp}$ , ще получим

$$(3) \quad \vec{B}_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}'_{\perp}] = \gamma \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma}] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че  $\vec{B}_{\parallel} = 0$ , ще имаме

$$(4) \quad \vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] + 0 = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times (\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel})] = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \times \vec{E}],$$

понеже  $\vec{V} \times \vec{E}_{\parallel} = 0$ , откъдето следва, че действително  $\vec{B} \perp \vec{E}$ .

2.) Аналогично, допускаме, че полето в  $K'$  е **само магнитно**, т.е. че  $\vec{E}' = 0$ . Това ще означава, че  $\vec{E}'_{\parallel} = 0$  и  $\vec{E}'_{\perp} = 0$ . Тогава от формули (10) от допълнението към предната задача ще имаме

$$(5) \quad \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = 0 \\ \vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] \end{cases} \quad \text{и} \quad (6) \quad \begin{cases} \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp} \end{cases}.$$

Ако изразим  $\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}$  и заместим в израза (5) за  $\vec{E}_{\perp}$ , ще получим

$$(7) \quad \vec{E}_{\perp} = -\gamma[\vec{V} \times \vec{B}'_{\perp}] = -\gamma[\vec{V} \times \frac{\vec{B}_{\perp}}{\gamma}] = -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}].$$

Тогава, отчитайки че  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ , ще имаме

$$(8) \quad \vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = 0 - [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] \equiv -[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] = -[\vec{V} \times (\vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel})] = -[\vec{V} \times \vec{B}],$$

понеже  $\vec{V} \times \vec{B}_{\parallel} = 0$ , откъдето отново следва, че действително  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

В сила е и твърдение, обратно на току-що доказаното, а именно: ако относно някаква система  $K$  полевите вектори  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  са взаимно перпендикулярни ( $\vec{E} \perp \vec{B}$ ), **но не равни по големина**, то съществува такава система  $K'$ , спрямо която полето е **само електрично** ( $\vec{B}' = 0$ ), или **само магнитно** ( $\vec{E}' = 0$ ).

★ **Задача** (зад. 343/стр.54) Да се определят потенциалите  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  и векторите на полето  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  на **равномерно праволинейно движещ се заряд**  $q$ .

**Решение:**

В КС ( $K'$ ), свързана със заряда, потенциалите са известни, и те са потенциали на неподвижен (спрямо  $K'$ ) точков заряд:

$$(1) \quad \varphi'(r') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'};$$

$$(2) \quad \vec{A}'(r') = 0, \text{ където}$$

$$(3) \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \text{радиус-вектор в } K'.$$

Сега ще „прехвърлим“ разглежданията в КС ( $K$ ), спрямо която зарядът се движи със скорост  $\vec{V}$  по направление на оста  $O\vec{x}$ . Нека за целта приложим законите за лоренцови трансформации на 4-вектор

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \beta A'^1);$$

$$(4) \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \beta A'^0);$$

$$A^2 = A'^2;$$

$$A^3 = A'^3.$$

спрямо компонентите на 4-потенциала  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ , където

$$\Leftrightarrow A^0 = \frac{\varphi}{c}, \text{ където } \varphi - \text{скаларен потенциал на ЕМ поле;}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A} - \text{магнитен векторен потенциал на ЕМ поле.}$$

Така получаваме:

$$\frac{\varphi}{c} = \gamma \left( \frac{\varphi'}{c} + \frac{V}{c} A'_x \right), \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \frac{\varphi' + V A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(5) \quad A_x = \gamma \left( A'_x + \frac{V}{c} \frac{\varphi'}{c} \right), \quad \text{т.е.} \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c^2} \varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$A_y = A'_y,$$

$$A_z = A'_z.$$

Тъй като  $A'_x = A'_y = A'_z = 0$ , то четирите равенства (5) добиват вида:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' \sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$(6) \quad A_x = \frac{\frac{V}{c^2} \varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' \sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0.$$

Остава (чрез **обратно** преобразование на Лоренц) да изразим  $x', y', z'$  чрез  $x, y, z$ . Използвайки трансформационния закон за 4-радиус-вектор

$$(7) \quad x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1); \quad x'^1 = \gamma(x^1 + \beta x^0); \quad x'^2 = x^2; \quad x'^3 = x^3, \quad \text{т.е.}$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{получаваме}$$

$$(8) \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\left( \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}.$$

Заместваме с така намереното представяне (8) за  $r'$  в (6), и получаваме

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)},$$

$$A_x = \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)},$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0,$$

или още:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}},$$

$$(9) \quad A_x = \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2)}} \equiv \frac{V}{c^2} \varphi,$$

$$A_y = 0, \quad A_z = 0, \quad \text{т.е.} \quad \vec{A} = \left( \frac{V}{c^2} \varphi, 0, 0 \right).$$

Сега можем, при намерени вече потенциали, да определим и компонентите на електричния и магнитния вектори на полето на движещ се заряд:

$$(10) \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad \text{и} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

или по компоненти

$$(11) \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

$$(12) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

**А) Намиране компонентите на електричното поле:**

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V}{c^2} \varphi \right) = -\frac{\partial}{\partial x} [\varphi] - \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} - \\ &= -\frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} - \\ &= -\frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2 \cdot (x-V.t)}{\left( (x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2) \right)^{3/2}} - \\ &= -\frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2 \cdot (x-V.t)(-V)}{\left( (x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2) \right)^{3/2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-V.t)}{\left( (x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2) \right)^{3/2}} - \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{V}{c^2} (x-V.t)V}{\left( (x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2) \right)^{3/2}} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-V.t) \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{\left( (x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2) \right)^{3/2}}. \quad \text{И така} \end{aligned}$$

$$(14) \quad E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x-V.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.$$

Аналогично, отчитайки, че  $A_y = 0$ , получаваме

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}}, \text{ т.е.}$$

$$(15) \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}};$$

и (по пълна аналогия, понеже  $A_z = 0$ ) ще следва, че

$$(16) \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}}.$$

Понеже  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ , то  $\vec{r} - \vec{V}.t = (x-V.t, y, z)$ , и следователно покомпонентните скаларни представяния (14), (15) и (16) могат да се обобщят в следното векторно представяне

$$(17) \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{V}.t)(1-V^2/c^2)}{\left((x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)\right)^{3/2}}.$$

Б) Остана да определим и компонентите на магнитния вектор от равенства

(13), отчитайки, че  $A_x = \frac{V}{c^2}\varphi$ ,  $A_y = 0$  и  $A_z = 0$ :

$$(18) \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \equiv 0.$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V}{c^2} \varphi \right) = \frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2} E_z.$$

И така

$$(19) \quad B_y = -\frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z.(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} = -\frac{V}{c^2} E_z.$$

Накрая определяме и  $B_z$ :

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \equiv -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V}{c^2} \varphi \right) = -\frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} =$$

$$= -\frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-V.t)^2 + (y^2 + z^2)(1-V^2/c^2)}}$$

$$(20) \quad B_z = \frac{V}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y(1-V^2/c^2)}{\sqrt{(x-Vt)^2 + (y^2+z^2)(1-V^2/c^2)}} = \frac{V}{c^2} E_y.$$

Ако и тук обобщим представянето във векторен вид, ще имаме

$$(21) \quad \vec{B} = \left( 0, -\frac{V}{c^2} E_z, \frac{V}{c^2} E_y \right) \equiv \frac{1}{c^2} (0, -VE_z, VE_y).$$

Забелязваме, че понеже  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ , то

$$(22) \quad \vec{V} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0\vec{i} + (-VE_z)\vec{j} + (VE_y)\vec{k} = (0, -VE_z, VE_y),$$

т.е. същото, както (21), но без множителя  $\frac{1}{c^2}$ , и тогава очевидно ще бъде в сила релацията

$$(23) \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} (\vec{V} \times \vec{E}) \equiv \frac{\vec{V} \times \vec{E}}{c^2}.$$

## Тема: Електростатика

### ❖ Теоретичен минимум

#### 📖 Потенциал и интензитет на електростатично поле:

$$\checkmark \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dV', \text{ и}$$

$$\checkmark \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r') \cdot (r-r')}{|r-r'|^3} dV',$$

понеже:  $\text{grad} \frac{1}{|r-r'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|r-r'|^3}.$

#### 📖 Уравнение на Поасон:

$$\checkmark \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

#### 📖 Уравнение на Лаплас:

$$\checkmark \quad \Delta \varphi = 0.$$

Тези уравнения се решават, като на границата между всеки две среди се прилагат изискванията (*идващи от граничните условия за  $\vec{E}$* ) за непрекъснатост на потенциала и на неговата първа производна, т.е. ако  $r = r_0$  е гранична точка, то

$$\checkmark \quad \varphi_i(r) \Big|_{r=r_0} = \varphi_j(r) \Big|_{r=r_0} \quad \text{и} \quad \checkmark \quad \frac{\partial \varphi_i(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial \varphi_j(r)}{\partial r} \Big|_{r=r_0}.$$

#### 📖 Разложение на кулоновия потенциал:

$$\checkmark \quad \frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos\theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \frac{r^l}{R^{l+1}},$$

като за полиномите на Лежандър е в сила условието за ортогоналност

$$\checkmark \int_{-1}^{+1} P_l(x) \cdot P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

**📖 Функции на Грийн**

**а) за оператора на Лаплас:**

$$\checkmark \Delta G(r) = -\delta(r), \quad G(r) = \frac{1}{4\pi r}$$

**б) за оператора на Хелмхолц:**

$$\checkmark (\Delta + k^2)G(r) = -\delta(r), \quad G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

**в) за оператора на Д'Аламбер:**

$$\checkmark \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(r,t) = -\delta(r)\delta(t), \quad G(r) = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}$$

**📖 Гранична задача на Дирихле за уравнението на Поасон:**

При нея се търси потенциалът  $\varphi(r)$ , явяващ се решение на задачата

$$\checkmark \Delta \varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \text{ при условие (гранично)} \quad \checkmark \varphi(r) \Big|_{r \in S_V} = \varphi(r_S)$$

За намиране решението на тази **гранична задача** се използва **функцията на Грийн**  $G(r, r')$ , явяваща се решение на следната гранична задача

$$\checkmark \Delta G(r, r') = -\delta(r - r') \quad \text{при условие} \quad \checkmark G(r, r') \Big|_{r \in S_V} = 0$$

Понеже  $\Delta \frac{1}{4\pi|r-r'|} = -\delta(r-r')$ , то очевидно

$$\checkmark G(r, r') = \frac{1}{4\pi|r-r'|} - \text{това е функция на Грийн при област на}$$

решимост – цялото пространство.

Ако обаче областта на решимост  $V$  на задачата на Дирихле за уравнението на Поасон е **крайна област**, то функцията на Грийн се търси във вида

$$\checkmark G(r, r') = \frac{1}{4\pi|r-r'|} + F(r, r'),$$

където функцията  $F(r, r')$  удовлетворява следните две условия:

$$\textcircled{1} \Delta F(r, r') = 0, \quad \text{и} \quad \textcircled{2} \text{ избира се така, че } G(r, r') \Big|_{r \in S_V} = 0$$

При известна функция на Грийн потенциалът  $\varphi(r)$  може да се изрази чрез интегралното представяне

$$\checkmark \varphi(r) = \int_V \frac{\rho(r')}{\varepsilon_0} G(r, r') dv - \oint_{S_V} \varphi(r_S) \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} \Big|_{d\vec{S}}$$



**📖 Електрични мултиполни моменти:**

☞  $\int_V \rho(r') dV' = q$  - пълнен заряд на системата;

☞  $\int_V \rho(r') \cdot \vec{r}' dV' = \vec{p}$  - електричен диполен момент на системата;

☞  $\int_V \rho(r') \left[ 3\{\vec{r}' \cdot \vec{r}'\} - r'^2 \delta \right] dV' = d$  - квадруполен момент на системата (тензор).

✓  $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\vec{r}_0 \cdot d \cdot \vec{r}_0}{8\pi\epsilon_0 r^3} + \dots = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \dots$

Това представяне се нарича **мултиполно разложение на потенциала**.

✓  $\vec{E}(r) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  - интензитет на полето на дипол.

**Тема: Магнитостатика**

**❖ Теоретичен минимум**

**📖 Магнитен векторен потенциал**

✓  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  - векторен „аналог“ на скаларното уравнение на

Поасон за скаларния електричен потенциал  $\varphi$ , имащо вида  $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  и

притежаващо решение  $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(r') dV'}{|r-r'|}$ .

Следвайки аналогията между скаларното и векторното уравнения на Поасон, можем да запишем, че решението на  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  се представя във вида

✓  $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{j}(r')}{|r-r'|} dV'$ .

**Магнитен вектор:**

✓  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \int_{V_\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(r') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$  - закон на Био-Савар.

**📖 Магнитни мултиполни моменти:**

☞  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(r')] dV'$  - магнитен диполен момент.

**Мултиполно разложение на магнитния векторен потенциал:**

✓  $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \vec{r}_0 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_0}{r^2}$

Формулата изразява магнитния векторен потенциал на **голямо разстояние** от ограничена система от стационарни токове и се нарича още **формула за полето на магнитен дипол**.

**Индукция на полето на магнитен дипол:**

$$\checkmark \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{r^3} (\vec{m} \times \vec{r}) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{m}}{r^3}.$$

## Тема: Плоска монохроматична електромагнитна вълна

### ❖ Теоретичен минимум

#### 📖 Вълнови уравнения на ЕМ поле:

$$\checkmark \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{и} \quad \checkmark \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Уравнения от вида  $\Delta \psi(r, t) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = -f(r, t)$  се наричат

**нехомогенни вълнови уравнения.**

#### 📖 Уравнение за 4-потенциала

$$-\square A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} \right) = \mu_0 j^\nu,$$

където

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{- оператор на Д'Аламбер.}$$

Понеже потенциалите не са еднозначно определени, можем спрямо тях да прилагаме т.нар. **калибровъчни условия**. Ако приложим следното калибровъчно условие за 4-потенциала

$$\checkmark \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0,$$

То ще даде (в тримерна форма)

$$\checkmark \quad \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{- калибровка на Лоренц.}$$

При тази калибровка се получава вълново уравнение за 4-потенциала във вида

$$\square A^\nu = -\mu_0 j^\nu, \text{ или още}$$

$$\checkmark \quad \Delta A^\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} = -\mu_0 j^\nu, \quad \text{за } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

**Извод:** 4-потенциалът  $A = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right)$  удовлетворява **нехомогенни вълнови**

**уравнения.** В тримерна форма тези уравнения имат вида:

$$\checkmark \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{- вълново у-е за скаларния потенциал } \varphi;$$

✓  $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$  - вълново у-е за магнитния векторен потенциал  $\vec{A}$ .

📖 **Плоска монохроматична електромагнитна вълна**

✓  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}\right)}$ ; и ✓  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}\right)}$ ,

където  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  са **комплексни постоянни вектори** (*постоянни вектори с комплексни компоненти*). Тези уравнения са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максвел при **отсъствие на източници** ( $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ ):

✓ 
$$\left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

✓  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0,$       ✓  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0,$       ✓  $\vec{B} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{c}.$



★ **Задача:** Да се докаже, че полевите вектори  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  на плоска електромагнитна вълна

(1)  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}\right)}$ ; и (2)  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}\right)}$ ,

където  $\vec{E}_0$  и  $\vec{B}_0$  са **комплексни постоянни вектори**, удовлетворяват съотношенията

(3.1)  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0,$  (3.2)  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0,$  (3.3)  $\vec{B} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{c}.$

**Доказателство:**

Уравненията (1) и (2) са решения на **хомогенните вълнови уравнения**, явяващи се следствия от уравненията на Максвел при **отсъствие на източници** ( $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ ):

(4) 
$$\left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Ако се заместят (1) и (2) в (4), се получават връзки, даващи много полезна информация относно пространствената структура на ЕМ поле.

**А) Доказателство на (3.1):**

Ако заместим (1) в първото от уравнения (4), получаваме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \operatorname{div} \left( \vec{E}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \right) = (\operatorname{div} \vec{E}_0) e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} + \vec{E}_0 \cdot \operatorname{grad} e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \equiv \\ &\equiv \vec{E}_0 \cdot \operatorname{grad} e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} = \vec{E}_0 \cdot \operatorname{grad} \left( e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \right) = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \cdot \operatorname{grad} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} = \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \cdot \operatorname{grad} \left( -i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right) = -\frac{i\omega}{c} \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \cdot \operatorname{grad} (\vec{n} \cdot \vec{r}) = \\ &= -\frac{i\omega}{c} \vec{E} \cdot \operatorname{grad} (\vec{n} \cdot \vec{r}). \end{aligned}$$

Ако използваме формулата от векторния анализ  $\operatorname{grad} (\vec{n} \cdot \vec{r}) = \vec{n}$ , получаваме

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{i\omega}{c} \vec{E} \cdot \vec{n}.$$

Но съгласно (4)  $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ , откъдето следва

$$-\frac{i\omega}{c} \vec{E} \cdot \vec{n} = 0, \text{ т.е. } \vec{E} \cdot \vec{n} = 0, \text{ к.т.д.}$$

**Б) Доказателство на (3.2):** напълно аналогично на това за (3.1), като в този случай замества (2) във третото от уравнения (4).

**В) Доказателство на (3.3):**

Замества (1) и (2) във **второто** от уравнения (4) и получаваме:

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{B}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \right).$$

Ако приложим формулата от векторния анализ

$$\operatorname{rot}(uU) = u \operatorname{rot} U - U \times \operatorname{grad} u,$$

ще получим

$$e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \operatorname{rot}(\vec{E}_0) - \vec{E}_0 \times \operatorname{grad} \left( e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \right) = -\vec{B}_0 e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\omega t}).$$

Отчитайки, че  $\operatorname{rot}(\vec{E}_0) = 0$ , получаваме

$$\begin{aligned} -\vec{E}_0 \times e^{i\omega t} \operatorname{grad} \left( e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \right) &= -\vec{B}_0 e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} (i\omega e^{i\omega t}) \\ -\vec{E}_0 \times e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \operatorname{grad} \left( -i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right) &= -i\omega \vec{B}_0 e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \\ -\left( \frac{-i\omega}{c} \right) \vec{E}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \times \operatorname{grad} (\vec{n} \cdot \vec{r}) &= -i\omega \vec{B}_0 e^{i\omega \left( t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right)} \quad | : (-i\omega) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{n} = \vec{B}, \text{ т.е. } \vec{B} = -\frac{\vec{E} \times \vec{n}}{c} \equiv \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{c}, \text{ к.т.д.}$$

★ **Задача:** да се аргументират представянията на електричния и магнитния вектори  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$  и  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  с помощта на уравненията на Максвел по чисто теоретичен (аналитичен) начин, използвайки единствено съображения от векторния анализ.

**Решение:**

Съгласно уравненията на Максвел:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0, \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

От третото от тях следва, че щом  $\text{div } \vec{B} = 0$  тъждествено, то векторът  $\vec{B}$  трябва да има представянето

$$(2) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

защото тогава  $\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla \cdot \vec{A} \equiv 0$ .

Щом  $\vec{B}$  има представянето (2), то тогава второто от уравнения (1) ще добие вида

$$(3) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \text{ т.е. } \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = 0, \text{ или още}$$

$$(4) \quad \text{rot } \vec{E} + \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \text{ т.е. } \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Но от векторния анализ е известно, че НДУ  $\text{rot } \vec{V} = 0$  е  $\vec{V} = \pm \text{grad } \varphi$ . С отчитане на този факт можем да запишем, че

$$(5) \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad (\text{взема се знак „-“, по исторически съображения}).$$

Така от (5) можем да заключим, че

$$(6) \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \text{к.т.д.}$$

★ **Задача:** да се получат вълновите уравнения за потенциалите  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , като се изходи от уравненията на Максвел.

**Решение:** при решаването на този проблем ще бъде наложително да се използват калибровъчни условия за потенциалите. Те са 2 основни типа:

**А) калибровъчно условие на Лоренц:**

$$(1) \quad 4 - \operatorname{div} A = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Ако 4-мерната дивергенция от 4-потенциала  $A^\mu = \left( \frac{\varphi}{c}, \vec{A} \right)$  по компонентите на 4-радиус-вектора  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  се „разпише“ по компоненти, ще имаме

$$(2) \quad \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial(\varphi/c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0,$$

откъдето получаваме тримерна форма на запис на калибровъчното условие на Лоренц

$$(3) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \text{или още} \quad \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

**Б) калибровъчно условие на Кулон:**

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

След тези уточнения можем да пристъпим към намирането на вълновите уравнения.

**А.) вълново уравнение за  $\varphi$ :**

Заместваме  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$  в първото от уравненията на Максвел

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \operatorname{div} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{т.е.}$$

$$(6) \quad -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

\*Забележка: Ако приложим спрямо (6) калибровъчното условие на Кулон  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  и отчетем, че  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi$ , то (6) добива вида

$$(7) \quad -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{което е уравнението на Поасон.}$$

Нека спрямо (6) обаче приложим калибровъчното условие (3) на Лоренц, т.е.

$$(8) \quad \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тогав (6) добива вида

$$(7) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{или още}$$

$$(8) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

С помощта на оператора на Д'Аламбер

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

получаваме следното уравнение, удовлетворявано от потенциала

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

**Б.) вълново уравнение за  $\vec{A}$ :**

Заместваме  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$  и  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  в четвъртото от уравненията на

Максуел:

$$(9) \quad \text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right).$$

Но  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$ , следователно

$$(10) \quad \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi), \quad \text{т.е.}$$

$$(11) \quad -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad div } \vec{A} - \text{grad} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \text{т.е.}$$

$$(12) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Лявата страна на (12) се представя посредством оператора на д'Аламбер, а в дясната страна прилагаме калибровката на Лоренц, т.е.  $\left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0$ . Така

(12) добива вида

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

**★ Задача:** да се получат вълновите уравнения за векторите на ЕМ поле  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , като се изходи от уравненията на Максвел.

**Решение:**

Уравненията на Максвел са:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.1) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ (1.2) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ (1.3) \quad \text{div } \vec{B} = 0, \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

### А.) вълново уравнение за $\vec{E}$ :

Прилагаме операцията  $\operatorname{rot}$  спрямо уравнение (1.2)

$$(2) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}).$$

В дясната страна на (2) заместваме  $\operatorname{rot} \vec{B}$  от (1.4), а в лявата страна използваме, че  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$ . Така уравнение (2) добива вида

$$(3) \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Сега заместваме  $\operatorname{div} \vec{E}$  от (1.1)

$$(4) \quad \operatorname{grad} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Ако зарядите са разпределени хомогенно ( $\rho = \text{const}$ ) или пък заряди липсват ( $\rho = 0$ ), то  $\operatorname{grad} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$ .

Ако токовете са стационарни ( $\vec{j} = \text{const}$ ) или пък токове липсват ( $\vec{j} = 0$ ), то  $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{j}) = 0$ . Ако приемем, че е налице някой от горните два случая, то (4) добива вида

$$(5) \quad -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ или още}$$

$$(6) \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ т.е.} \quad \square \vec{E} = 0.$$

### Б.) вълново уравнение за $\vec{B}$ :

Прилагаме отново операцията  $\operatorname{rot}$ , но спрямо уравнение (1.4)

$$(7) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \left( \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ т.е.}$$

$$(8) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ където } \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}).$$

В дясната страна на (8) заместваме  $\operatorname{rot} \vec{E}$  от (1.2), а в лявата страна използваме, че  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}$ . Но съгласно (1.3)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , следователно  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = -\Delta \vec{B}$ . Така уравнение (8) добива вида

$$(9) \quad -\Delta \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$



Ако токовете са стационарни ( $\vec{j} = const$ ) или пък токове липсват ( $\vec{j} = 0$ ), то  $rot \vec{j} = 0$ , следователно

$$(10) \quad -\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \text{ т.е.}$$

$$(11) \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \text{ или още } \square \vec{B} = 0.$$

★ **Задача:** Да се докаже, че за плоска ЕМ вълна  $\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$ .

**Доказателство:** за плоска ЕМ вълна бяха доказани вече съотношенията

$$(1.1) \quad \vec{E} \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.2) \quad \vec{B} \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.3) \quad \vec{B} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{c}.$$

Ако отчетем, че

$$(2) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \text{ и} \quad (3) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

то (1.3) добива вида

$$(4) \quad \vec{H} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{\mu_0} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n} \times \vec{E}).$$

Нека повдигнем двете страни на (4) в квадрат, като отчетем, че

$$(5) \quad (\vec{n} \times \vec{E})^2 = (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{n}^2 E^2 - (\vec{n} \cdot \vec{E})^2.$$

Но съгласно (1.1)  $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ , а  $\vec{n}^2 = 1$ , следователно

$$(6) \quad (\vec{n} \times \vec{E})^2 = E^2.$$

С отчитането на (6) получаваме

$$(7) \quad \vec{H}^2 = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E^2, \text{ откъдето следва } \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2, \text{ к.т.д.}$$

★ **Задача:** Да се изведе уравнението на непрекъснатостта (в тримерна форма) от уравненията на Максвел в материална среда.

**Решение:**

Уравненията на Максвел са:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1.1) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ (1.2) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ (1.3) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ (1.4) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Изразяваме  $\rho$  от (1.1) и го диференцираме по времето:

$$(1) \quad \rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}, \text{ следователно}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \equiv \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Изразяваме  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  от (1.4):  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 (\operatorname{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j})$ , и заместяваме в (2)

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div} (c^2 (\operatorname{rot} \vec{B} - \mu_0 \vec{j})) = \varepsilon_0 c^2 (\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}) - \varepsilon_0 \mu_0 c^2 \operatorname{div} \vec{j}.$$

Но  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} \equiv 0$ , а  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , понеже  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ . По този начин

(3) добива вида

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}, \text{ т.е.}$$

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

което представлява точно уравнението за непрекъснатостта в тримерна форма.

**\*Забележка:** Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. xxx, Зад. ууу) визират „Сборник задачи по теоретична физика”, с автори **Кръстю Иванов**, **Вълчо Великов**, **Стефка Казакова**, Пловдивско университетско издание, 2002 г.

Декември 2009 г.

Гл. ас. Петко Митев