ТЕМА 7: ТРЕПТЕНИЯ И ВЪЛНИ

1. Хармонични трептения

1.1. Понятие за равновесие и трептене

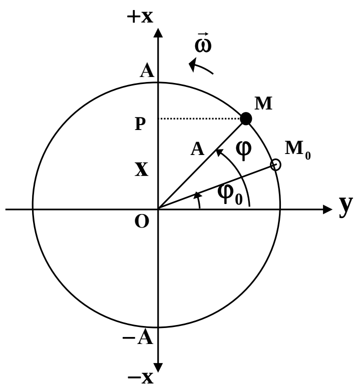
Когато векторната сума от всички сили, които действат на една материална точка е нула и същевременно материалната точка е в покой, казваме, че материалната точка се намира в състояние (положение, точка) на механично равновесие.

Състоянието на механично равновесие може да е *устойчиво*, *неустойчиво* или *безразлично*. Ако малко отклонение от положението на равновесие води до възникване на сили, които още повече отклоняват материалната точка от равновесното положение, равновесието е неустойчиво. Когато при малко отклонение от равновесното положение възникват сили, които връщат материалната точка в равновесното положение, равновесното положение се нарича устойчиво. Ако при произволно отклонение от положението на равновесие сумата от силите остава нула, равновесието се нарича безразлично.

Ако материална точка, намираща се в състояние на устойчиво равновесие се отклони малко от това състояние и после се пусне да се движи само под действие на силите, които обуславят състоянието на равновесие, материалната точка започва да извършва периодично движение, което се състои в редуване на връщане и отклонение в противоположни посоки от точката на равновесие. *Периодично движение на материална точка около точка на устойчиво равновесие се нарича трептене*. Примери за трептене са: движението на тежест, окачена на пружина, люлеенето на махало и много други.

1.2. Кинематика на хармоничните трептения

Да разгледаме един пример за движение, което представлява трептене. Ако материална точка **M** се движи равномерно по окръжност с радиус **A**, то нейната ортогонална проекция **P** върху някой от диаметрите на окръжността извършва трептене – фиг. 1. Ако използваме декартова координатна система с начало **O** в центъра на окръжността и разгледаме проекцията **P** на материалната точка **M** върху оста **x**, ординатата на тази проекция в даден момент е:



Фиг. 1

(1) $\mathbf{x(t)=A\sin\varphi(t)}$,

където $\boldsymbol{\varphi(t)}$ е полярния ъгъл между радиус вектора на материалната точка и оста **y**. Този ъгъл се променя с времето по закона:

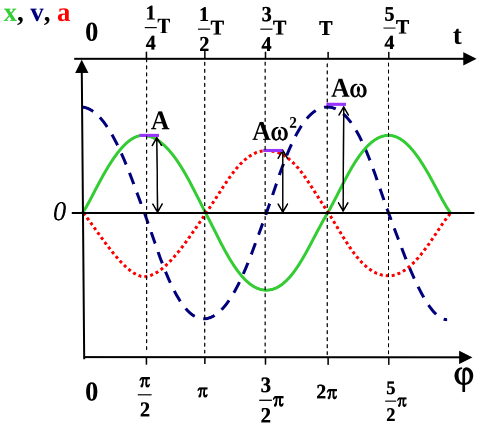
(2) $\boldsymbol{\varphi(t)=\omega_0 t+\varphi_0}$,

където $\boldsymbol{\varphi_0}$ е полярния ъгъл в началния момент време $\mathbf{t=0}$, а $\boldsymbol{\omega_0}$ – ъгловата скорост. Следователно координата на проекцията **P** върху оста **x** се изменя с времето по закона:

(3) $\mathbf{x(t)=A\sin(\boldsymbol{\omega_0} t+\boldsymbol{\varphi_0})}$

Движение, което се извършва по синусов закон, изразяващ се с формула (3) се нарича *хармонично трептене*. Величините, които участват във формулата се наричат: **x** – *отклонение от равновесното положение* или *елонгация*; **A** – амплитуда и представлява максималната абсолютна стойност на отклонението от положението на равновесие; $\boldsymbol{\varphi(t)=\omega_0 t+\varphi_0}$ – величината, която стои под знака на синуса се нарича *фаза* на трептенето в момента **t**; $\boldsymbol{\varphi_0}$ *– начална фаза* и $\boldsymbol{\omega_0}$ *– собствена кръгова честота*.

Хармоничното трептене е периодично движение и се характеризира с период **T** и честота **ν**, които са свързани с кръговата честота по познатите от въпроса за равномерно движение по окръжност формули: $\mathbf{T=\frac{2\pi}{\omega_0}}$; $\mathbf{\nu=\frac{1}{T}}$, $\mathbf{\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu}$.



Фиг. 2

Скоростта и ускорението при хармоничното трептене се получават от закона за движението чрез последователно диференциране:

(4) $$\mathbf{v=\frac{dx}{dt}=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\omega_0\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}$$

(5) $$\mathbf{a=\frac{dv}{dt}=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0+\pi)}$$

Формула (4) показва, че скоростта на точката, както и отместването, се изменя с времето по хармоничен закон, но фазата ú се различава с $\mathbf{\frac{\pi}{2}}$ от тази на отместването. В момента, когато отместването е равно на нула, скоростта на точката е максимална. Ускорението също се изменя по хармоничен закон. Неговата фаза се отличава от тази на отместването с $\boldsymbol{\pi}$. Зависимостите на отклонението, скоростта и ускорението на хармоничното трептене от времето и фазата са представени на фиг. 2.

1.3.Динамика на хармоничното трептене

Да сравним закона за движението при хармонично трептене (3) и закона за ускорението (5). Вижда се, че ускорението **a** е свързано с отклонението **x** по формулата:

(6) $$\mathbf{a=-\omega_0^2 x}$$

Сега да заместим ускорението във втория принцип да динамиката:

(7) $$\mathbf{F=ma=-m\omega_0^2 x=-kx}$$

При последното преобразование въвеждаме ново означение $\mathbf{m\omega_0^2=k}$ за произведението от масата и квадрата на ъгловата скорост, което произведение играе роля на положителен коефициент на пропорционалност между силата и отклонението.

Така виждаме, че силата, която действа върху материална точка, извършваща хармонично трептене, е пропорционална на отклонението от равновесното положение и има посока противоположна (поради знака минус) на това отклонение:

(8) $$\mathbf{F=-kx}$$

Сила, действаща по този начин се нарича *квазиеластична сила*. Това е сила, която при всяко отклонение от равновесното положение действа така, че да върне материалната точка в положението на равновесие. Следователно, имаме положение на устойчиво равновесие и хармоничното трептене е движение около положение на *устойчиво равновесие, т.е. представлява трептене***.**

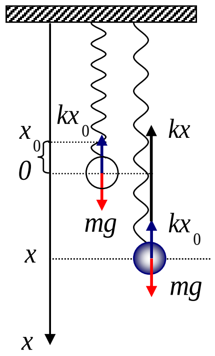
От формула (7) е ясно, че кръговата честота може да се представи във вида:

(9) $$\mathbf{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Следователно останалите характеристики на трептенето – период и честота са свързани с динамичните параметри чрез равенствата:

(10) $$\mathbf{T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\ ; \qquad \mathbf{\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Ще разгледаме пример на хармонично трептене, което се извършва от пружинно махало. Пружинното махало представлява топче с маса **m**, което е окачено на пружина (фиг. 3).



Фиг. 3

В равновесното положение на пружинното махало силата на тежестта $\vec{\mathbf{G}}$ се уравновесява от силата $\vec{\mathbf{F}}=\mathbf{k}\vec{\mathbf{x}}_0$, възникваща при деформация на пружината. Ако външна сила изведе топчето от равновесното положение ($\mathbf{x=0}$) и го отмести на някакво разстояние ($\mathbf{x\neq 0}$), махалото започва да извършва хармонични трептения под действие на равнодействащата сила на $\vec{\mathbf{G}}$ и $\vec{\mathbf{F}}=-\mathbf{k}(\vec{\mathbf{x}}_0+\vec{\mathbf{x}})$, която се стреми да го върне отново в равновесното положение. Тази сила е $\vec{\mathbf{F}}=-\mathbf{k}\vec{\mathbf{x}}$. Тя е квазиеластична и поражда хармонично трептене. Кинематичните характеристики на трептенето се изразяват чрез формули (9) и (10).

В разгледания пример хармоничните трептения възникват в резултат на еднократно отклонение на трептящото тяло от началното състояние на равновесие и в отсъствие на външни сили. Такива трептения се наричат *свободни*. Свободните хармонични трептения се съпътстват от периодични превръщания на кинетичната енергия на трептящите тела в потенциална енергия на взаимодействие и обратно. Да разгледаме тези превръщания при пружинното махало. Допускаме, че топчето и пружината се една затворена система, в която действа еластична сила с големина $\mathbf{F}$. От дефиниционното равенство на еластичната сила следва, че тя е консервативна сила (нейната работа по затворен контур е равна на нула). Потенциалната енергия на пружинното махало е:

$$\mathbf{E_p=\frac{kx^2}{2}}$$

Заместваме израза (3) за $\mathbf{x}$ и получаваме:

(11) $$\mathbf{E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)}.$$

Кинетичната енергия на махалото в произволен момент от време ще получим ще получим като заместим израза за скоростта (4) във формулата

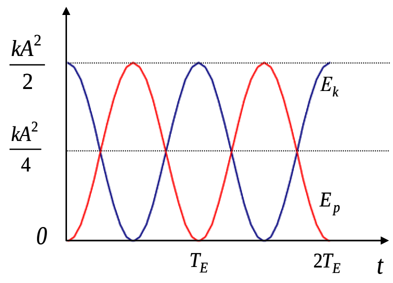
(12) $$\mathbf{E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)}.$$

Пълната енергия на махалото е сума от неговата кинетична и потенциална енергия

(13) $$\mathbf{E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=const}$$

Получената формула показва, че пълната енергия е пропорционална на квадрата на амплитудата на трептенията.

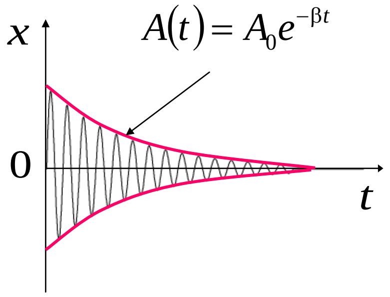
Превръщането на енергията се извършва в съответствие със закона за запазване на механичната енергия в консервативна система. При движението на махалото надолу или нагоре неговата потенциална енергия се увеличава, а кинетичната намалява. В точката с максимално отместване потенциалната му енергия има максимална стойност и е равна на пълната енергия, а кинетичната енергия е равна на нула. Когато махалото преминава през равновесното положение, неговата потенциална енергия става равна на нула, а кинетичната придобива максимална стойност, равна на пълната енергия. Измененията на потенциалната и кинетичната енергия с течение на времето са показани на фиг. 4.



Фиг. 4

1.4. Затихващи трептения

Когато разглеждахме трептенията на пружинното махало казахме, че превръщанията на енергията се извършват в съответствие със закона за запазване на механичната енергия. Това е възможно само при предположение, че системата е затворена и консервативна. Свободните трептения в този случай се наричат *незатихващи трептения*. Такива трептения са възможни само в системи, където се пренебрегват силите на триене и съпротивление. Следователно незатихващите трептения са идеализирани. Те се характеризират с амплитуда, която се запазва постоянна с времето, и могат да продължават неограничено дълго време. Свободните трептения, които се извършват в реалните системи, се наричат *затихващи трептения*. Поради действащите сили на триене амплитудата на тези трептения с течение на времето намалява и те постепенно затихват (фиг. 5).



Фиг. 5

Да допуснем, че върху тялото, извършващо хармонични трептения, действат две сили: квазиеластична сила $\vec{\mathbf{F}}_1$, пропорционална на отместването му от равновесното положение, и сила на триене $\vec{\mathbf{F}}_2$, пропорционална на неговата скорост $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F_1=-kx=-k\frac{d^2x}{dt^2}}\,; \qquad \mathbf{F_2=-rv=-r\frac{dx}{dt}}$$

Знакът „-„ в силата на триене показва, че нейната посока е винаги противоположна на посоката на скоростта на движение. Коефициентът $\mathbf{r}$ е постоянна величина, характеризираща съпротивлението на средата, и се нарича *коефициент на триене*. Тогава прилагайки втория принцип на механиката, получаваме

(14) $$\mathbf{m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\,v}\,; \qquad \mathbf{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0}$$

Изразът (14) представлява диференциално уравнение на затихващо трептене. Заместваме $\mathbf{\frac{k}{m}=\omega_0^2}$, където $\boldsymbol{\omega_0}$ е собствената честота на трептящото тяло, т.е. тази честота, което то би имало в отсъствие на сили на съпротивление. Отношението $\mathbf{\frac{r}{m}}$ заместваме с $\mathbf{2\beta}$, където величината $\boldsymbol{\beta}$ се нарича *коефициент на затихване* и характеризира бързината за затихване на трептенията в разглежданата система. В такъв случай уравнението (14) добива вида:

(15) $$\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

Решението на уравнение (15) е от вида:

(16) $$\boxed{\mathbf{x(t)=A_0e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_0)}},$$

където

(17) $$\mathbf{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

се нарича *честота на затихващите трептения*.

Когато на трептящото тяло освен квазиеластична сила действа и сила на триене, неговото движение е трепетливо, но не и хармонично. Величините, характеризиращи затихващите трептения, се изменят непрекъснато – те не се повтарят през равни интервали, както при незатихващите трептения. Затихващите трептения не са периодични движения. Честотата на трептене $\boldsymbol{\omega}$ в този случай зависи не само от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{m}$, а и от коефициента на затихване $\boldsymbol{\beta}$. От формула (17) следва, че честотата на затихващите трептения $\boldsymbol{\omega}$ е по-малка от собствената честота на незатихващите. Това е напълно логично, тъй като наличието на сили на съпротивление с системата намалява скоростта на движение на трептящото тяло. Вследствие на това периода се увеличава и предизвиква намаляване на кръговата честота.

Характерна особеност на затихващите трептения е постепенното намаляване на амплитудата с времето:

(18) $$\mathbf{A=A_0e^{-\beta t}}$$

Отношението на две съседни амплитуди е постоянна величина

$$\mathbf{\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}=...=e^{\beta T}}$$

Натуралният логаритъм на горното отношение се нарича *логаритмичен декремент на затихването* и се означава с δ:

(19) $$\mathbf{\delta=\ln e^{\beta T}=\beta T}$$

1.5. Принудени трептения

От всичко казано до тук е ясно, че когато в една трептяща система действат силите на триене, трептенията, които се извършват в нея, след известно време се преустановяват. По тази причина те се наричат затихващи. Ако в системата се внесе енергия отвън, която да компенсира загубите, дължащи се на силите на триене, съпротивление и др., трептенията могат да се превърнат от затихващи в незатихващи, наречени *принудени трептения*. Принудените трептения се предизвикват от действието на външни периодичнопроменливи сили върху системата и се наричат още *несвободни трептения*. Нека да разгледаме една система, в която действа външна сила, изменяща се с времето по периодичен закон:

$$\mathbf{F(t)=F_0\sin(\omega t)}$$

Силата $\mathbf{F(t)}$ се нарича *принуждаваща сила*. Съгласно втория принцип на Нютон получаваме

(20) $$\mathbf{m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\frac{dx}{dt}+F_0\sin(\omega t)}; \qquad \mathbf{\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x-\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)}$$

Изразът (20) представлява *диференциалното уравнение на принудените трептения*. Ако заместим отношенията $\mathbf{\frac{k}{m}}$ и $\mathbf{\frac{r}{m}}$ с равните им и положим $\mathbf{\frac{F_0}{m}=f_0}$, то ще придобие вида:

(21) $$\boxed{\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\sin(\omega t)}},$$

където $\mathbf{\omega_0}$ в честотата на собствените трептения на тялото (когато в системата не действат сили на съпротивление), а β – коефициентът на затихване (при наличие на съпротивителни сили в системата). Честотата ω е кръговата честота на периодичната сила $\mathbf{F(t)}$, която извършва някаква работа върху тялото. Ако посоката на тази сила е противоположна на посоката на движение на тялото, тя ще извършва отрицателна работа, или ще затруднява движението на тялото; ако посоката ú съвпада с посоката на движение на тялото, тя ще извършва положителна работа, следователно ще ускорява неговото движение. Това предизвиква трептения на тялото, които се извършват със същата честота ω, с която се изменя и външната сила. Тази честота се нарича *честота на принудените трептения* на тялото. Допускаме, че разликата между фазите на силата и отместването на трептящото тяло е равна на φ. В такъв случай

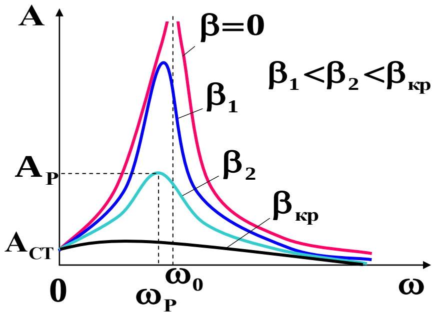
(22) $$\mathbf{x=A\sin(\omega t+\varphi)}$$

След преобразования за амплитудата $\mathbf{A}$ и фазата φ на принудените трептения се получават изразите:

(23) $$\boxed{\mathbf{A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}},\ tg\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}}}$$

Амплитудата на принудените трептения зависи от амплитудата и честотата на външната сила, от коефициента на затихване, собствената честота $\mathbf{\omega_0}$ на трептенето и от масата на трептящото тяло ($\frac{F_0}{m}=f_0$). При постоянни F_0, m и β амплитудата A зависи от съотношението между кръговата честота ω на външната сила и собствената честота ω_0 на свободните незатихващи трептения.

Зависимостта на амплитудата от ω при различни коефициенти на затихване е показана на фиг. 6.



Фиг. 6

Ще разгледаме някои частни случаи на формула (23):

а) Кръговата честота е $\omega=0$

$$A=A_0=\frac{F_0}{m\omega_0^2}=const$$

Върху тялото действа постоянна сила $F=F_0$, която го отмества от равновесното му положение на разстояние A_0. Постоянните сили не предизвикват трептения. Ако в новото си равновесно положение тялото получи еднократен тласък, то ще започне да извършва хармонични трептения със собствена честота ω_0.

б) При пренебрежимо малък коефициент на затихване ($\beta\approx 0$) амплитудата на принудените трептения расте с увеличаването на ω. Когато $\omega=\omega_0$, $A\to\infty$. При по-нататъшно увеличаване на $\beta\approx 0$ амплитудата започва да намалява и при $\omega\to\infty$ се стреми към нула. Явлението, при което амплитудата нараства силно при честота на принудените трептения $\omega\to\omega_0$, се нарича *резонанс*.

в) При коефициент на затихване $\beta\neq 0$ амплитудата на принудените трептения зависи и от β. За да се определи условието за резонанс в този случай, трябва да се намери минимума на знаменателя във формулата (23). За целта е необходимо изразът под корена да се диференцира по ω и да се приравни на нула. По този начин се получава стойността на честотата ω, при която настъпва резонанс:

(24) $$\omega=\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Тази честота се нарича *резонансна честота*, а стойността на амплитудата при резонансната честота – *резонансна амплитуда*.

(25) $$A_{рез}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Резонансните явления се проявяват при всички принудени трептения, които намират широко приложение в различни области на техниката. В акустиката резонансът се използва за анализ и усилване на звукови трептения. В радиотехниката той намира приложение във всички радиопредаватели и радиоприемници. С явлението резонанс се обясняват и много процеси от ядрената физика.

2. Вълнови процеси

2.1. Характеристики на вълните

Вълнообразното движение е движение, което се извършва в непрекъсната среда (твърдо тяло, течност или газ) или система, състояща се от много на брой свързани елементи (например, опъната струна или пружина, които може да се разглеждат като множество от свързани материални точки). Вълнообразно движение се създава, когато някоя точка от средата (или отделен елемент от системата) започне да извършва трептене. Тогава, поради взаимодействието със съседните точки, трептенето се предава на тези точки и те също започват да трептят. *Вълнообразното движение* се състои в предаване на трептения от една частица на средата на другите частици и се нарича още *механична вълна*. Ако трептенето, което извършват отделните частици на средата е хармонично, то и механичната вълна се нарича *хармонична вълна*.

Тъй като всяка частица на средата, в която се извършва вълнообразно движение извършва трептене, то при описание на вълнообразното движение се използват всички понятия, които се използват и при описание на трептенията – елонгация, амплитуда, период, честота, кръгова честота, фаза, начална фаза, скорост и ускорение на трептенето и т.н. С такива понятия се описва трептенето, което извършват отделните частици на средата, но наред с тези понятия, за описание на вълнообразното движение се въвеждат и други понятия.

Тяло, което извършва принудено трептене и увлича със себе си в това трептене и съседните с него частици на средата се нарича *източник на вълната*. Ако преди да започне източника да трепти всички точки на средата са неподвижни, след като източникът започва да трепти трептенето обхваща останалите точки на средата постепенно. Най-скоро започват да трептят разположените близо до източника точки на средата, а по-отдалечените точки, започват да трептят по-късно. Във всеки момент време съществува граница между частта от средата, която вече извършва вълнообразно движение и частта от средата, която е неподвижна, защото вълнообразното движение още не е достигнало до нея. Тази граница се нарича *фронт на вълната*. Фронтът на вълната се движи с определена скорост $\mathbf{c}$, която се нарича *скорост на разпространение* на вълната или само *скорост* на вълната. Фронтът на вълната може да има различна форма – сферична, плоска, или друга. Когато фронтът има сферична форма, казваме, че и вълната е *сферична* вълна. Ако фронта има форма на равнина, говорим за *плоска* вълна.

Когато трептенията се разпространяват от източника във всички посоки на пространство, говорим за *тримерна* или *пространствена* вълна. (Пример, звуковите вълни.) Ако трептенията се разпространяват от източника само в посоки разположени върху двумерна повърхност, говорим за *двумерна* или *повърхностна* вълна (например, вълните върху водна повърхност), а ако трептенията се разпространяват само в посока на дадена линия - за *едномерна* или *линейна* вълна (например, разпространение на трептения по направление на опъната струна).

Когато посоката, в която трептят точките на средата съвпада с посоката, в която те се предават, казваме, че вълната е *надлъжна* вълна. Когато посоката, в която трептят частиците на средата е перпендикулярна на посоката, в която се предават трептенията от частица на частица, казваме, че вълната е *напречна* вълна. Надлъжни вълни са, например, звуковите вълни, а напречни – вълните върху водна повърхност или вълните върху трептяща струна.

При вълнообразно движение частиците на средата трептят с различна фаза. Близо разположени една да друга точки трептят почти еднакво, но разположените далеч една от друга точки могат да имат силно различаващи се фази на трептене. Например, ако в един момент време дадена точка преминава през началното си положение, то други точки в същото време вече са стигнали до една от крайните точки на отклонението си, трети – вече се връщат към началното положение и т.н. Точките от средата, които трептят с еднаква фаза образуват непресичащи се повърхнини, които се наричат *фазови* повърхнини. Фазовите повърхнини, както и фронта на вълната се движат със една и съща скорост $\mathbf{u}$ – скоростта на разпространение на вълната. Разстоянието $\boldsymbol{\lambda}$, на което се преместват фазовите повърхнини (а също и фронта на вълната) за един период на трептене $\mathbf{T}$ се нарича *дължина на вълната*. От даденото определение следва, че:

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{uT}=\frac{\mathbf{u}}{\boldsymbol{\nu}}, \qquad \mathbf{u}=\boldsymbol{\lambda\nu} \tag{26}$$

където, $\boldsymbol{\nu}$ е честотата на трептенията.

Скоростта, с която се разпространява механичната вълна в различните материални среди, зависи от техните еластични свойства. В твърдите тела и течностите механичните вълни се разпространяват по-бързо в сравнение с газовете. Това е естествено, тъй като частиците при тях са разположени по-близо една до друга и трептенията се предават по-бързо. За газове и течности скоростта се определя от следните изрази:

(27) $\mathbf{u}_{\text{газ}} = \sqrt{\dfrac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\rho}}$; $\mathbf{u}_{\text{течност}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{K}}{\rho}}$,

където $\Delta\mathbf{P}$ и $\Delta\rho$ са измененията на налягането и плътността в газовата среда, а **К** – модулът на обемна деформация на течностите. В твърдите тела се разпространяват както надлъжни, така и напречни механични вълни, чиято скорост се определя от аналогични изрази:

(28) $\mathbf{u}_{\text{твърдо тяло}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{E}}{\rho}}$; $\mathbf{u}_{\text{твърдо тяло}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{G}}{\rho}}$,

където E и G са съответно модулите на еластичност при надлъжна и напречна деформация.

При преход на механичната среда от една среда в друга нейната честота се запазва постоянна, а дължината на вълната се изменя пропорционално на скоростта на разпространение:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_2}$$

2.2. Уравнение на плоска вълна

Допускаме, че вълнов процес се разпространява в еднородна среда в положителна посока на оста Ох. Означаваме с y отместването на частиците на средата от равновесното им положение. Предполагаме, че разпространяващата се вълна се изменя по синусов закон, а в точката О, с координата x=0, в началния момент ($\mathbf{t=0}$) е изпълнено $\mathbf{y=0}$, т.е. началната фаза $\varphi_0=\mathbf{0}$. Тогава

(29) $\mathbf{y(0,t)=A\sin(\omega t)}$,

където $\omega=\dfrac{2\pi}{\mathbf{T}}$ е кръговата честота, **T** – периодът, **A** – амплитудата, $\omega\mathbf{t}=\Phi(\mathbf{t})$ – фазата на трептенията. Да определим фазата на трептенията на произволна точка **P**, отстояща от **O** на разстояние **x**. Времето, за което трептенето ще се предаде на точката **P**, е $\tau=\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{u}}$.

Трептенето в точка P ще изостава по фаза спрямо **O** с време $\Delta\mathbf{t}=\tau$, следователно

(30) $\mathbf{y(x,t)=A\sin}[\omega(\mathbf{t}-\tau)]=\mathbf{A\sin}\left[\omega\left(\mathbf{t}-\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{u}}\right)\right]$

Последният израз се нарича *уравнение на плоска хармонична вълна*. Според него отместването $\mathbf{y(x,t)}$ е периодична функция не само на времето, но и на разстоянието. За време $\mathbf{t=T}$ фронтът на вълната се разпространява на разстояние λ, а стойността на фазата се изменя с 2π (λ е разстоянието между съседни частици, които трептят с еднакви фази). Следователно при всяко изменение на **x** с λ фазата се изменя с 2π:

$$\omega\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{u}}\right)-\omega\left(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{x}+\lambda}{\mathbf{u}}\right)=2\pi$$

(31) $\dfrac{\omega\lambda}{\mathbf{u}} = 2\pi \Rightarrow \mathbf{k} = \dfrac{\omega}{\mathbf{u}} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,

където **k** е нова величина, характеризираща вълновите процеси, която се нарича *вълново число*. Вълновото число определя броя дължини на вълната, които се нанасят на разстоянието 2π метра. В такъв случай уравнението (28) може да се запищи по следния начин:

(32) $$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Ако изразим кръговата честота от израза $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ще получим друг вид на уравнението:

(33) $$y(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Източникът на трептения в една хомогенна еластична среда притежава определена енергия. В процеса на разпространение на вълната тази енергия се пренася от една частица в пространството до друга. При еластичните вълни (тези, които се разпространяват в еластична среда) тя може да се определи просто. Ако в разглежданата среда няма загуба на енергия, амплитудите на трептящите частици са еднакви. Извършвайки хармонично трептене около равновесното си положение, всяка частица от средата притежава пълна механична енергия в съответствие с формулата (13)

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

В единица обем от средата броят на трептящите частици се определя от концентрацията **n,** а пълната механична енергия ще бъде:

(34) $$w = \frac{1}{2}nm\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2,$$

където $\rho = nm$ е плътността на средата. Горният израз определя пълната енергия на единица обем от средата и се нарича още *плътност на енергията на вълната*.