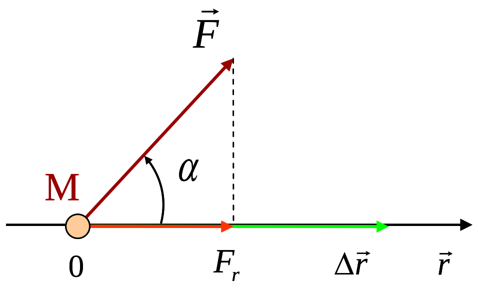
ТЕМА 4. РАБОТА И МЕХАНИЧНА ЕНЕРГИЯ. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА МЕХАНИЧНАТА ЕНЕРГИЯ

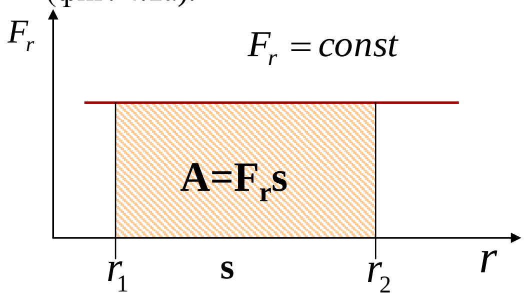
1. Работа и кинетична енергия

1.1. Работа на постоянна сила при праволинейно движение

Нека материална точка се движи праволинейно. На тялото действа постоянна по големина и посока сила $\vec{F}$, сключваща ъгъл $\boldsymbol{\alpha}$ с посоката на движение. За определен период от време тялото извършва преместване $\Delta\vec{r}$ (фиг. 4.1а).



Фиг. 4.1а



Фиг. 4.1б

Величината

(4.1) $$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right| cos\,\alpha\,,$$

равна на скаларното произведение на силата по преместването, се нарича ***работа на силата***. Тя се представя също във вида:

(4.2) $$A = F_r s\,,$$

където $F_r = \left|\vec{F}\right| cos\,\alpha$ е проекцията на вектора $\vec{F}$ върху посоката на преместването. При праволинейно движение в една посока големината на преместването е равна на изминатия път: $s = \left|\Delta\vec{r}\right|$. Работата е скаларна алгебрична величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Работата е положителна, когато посоката на силата сключва остър ъгъл с посоката на преместването ***(α<90°)***. При ***α<90° cosα<0*** и работата е отрицателна. Когато силата е перпендикулярна на преместването (***α=90°***), тя не извършва работа.

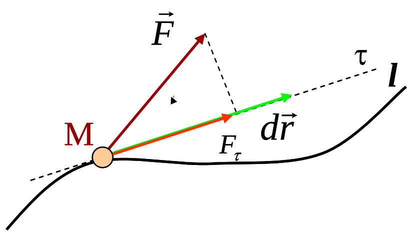
Единицата за работа се нарича ***джаул***. Съгласно (1) 1 джаул (1J) е работата, която извършва постоянна сила с големина 1 нютон (1N), насочена успоредно на преместването при преместване на тялото с един метър (1m):

1J=1N.1m

На фиг. 1б е показана графиката на успоредната на преместването компонента F_τ на силата като функция от изминатия път ***s***. Площта на защрихования правоъгълник е $F_\tau s = A$.

1.2. Работа на променлива сила

Да разгледаме общия случай, когато материална точка се движи по криволинейна траектория. Елементарното преместване $d\vec{r}$, което точката извършва за безкрайно малък интервал от време dt, е насочено по допирателната към траекторията. На материалната точка действа сила $\vec{F}$ – фиг. 4.2.



Фиг. 4.2

Величината

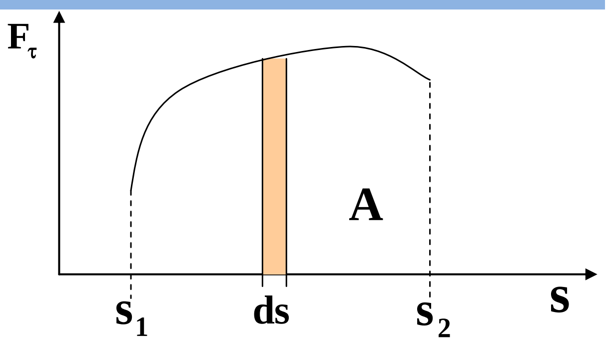
(4.3) $$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

се нарича ***елементарна работа*** на силата $\vec{F}$, извършена при елементарното преместване $d\vec{r}$. Да разложим силата $\vec{F}$ на две компоненти, насочени съответно към тангентата и нормалата към траекторията: $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$. Компонентата $\vec{F}_n$, която е перпендикулярна на елементарното преместване $d\vec{r}$, не извършва работа. Следователно елементарната работа е:

(4.4) $$dA = \vec{F}_\tau \cdot d\vec{r} = F_\tau |d\vec{r}| = F_\tau ds\,,$$

На фиг. 4.3 е представена графично тангенциалната компонента F_τ на силата като функция на пътя $\mathbf{s}$. Работата, извършена при изминаването на път между точките 1 и 2 се задава с определения интеграл

(4.5) $$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds$$



Фиг. 4.3

Когато на материалната точка действат едновременно няколко сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$, общата работа е сума от работата на всяка една от силите: $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Работата е положителна в тези участъци на траекторията, където векторът на елементарното преместване $d\vec{r}$ и компонентата $\vec{F}_\tau$ на силата имат еднакви посоки. Когато векторите $d\vec{r}$ и $\vec{F}_\tau$ са с противоположни посоки, работата е отрицателна.

1.3. Мощност

Величината

(4.6) $$P = \frac{dA}{dt}\,,$$

т.е. работата, извършена за единица време, се нарича ***мощност***.

Единицата за мощност в *ват* (W). Съгласно с уравнение (6) мощността е 1 ват (1 W), когато за време 1 секунда (1 s) се извършва работа 1 джаул (1 J), т.е. 1 W=1 J/s. Заместваме елементарната работа от уравнение (3) в уравнение (6) и получаваме:

(4.7) $$P = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Следователно мощността е равна на скаларното произведение на действащата сила по скоростта на материалната точка.

1.4. Кинетична енергия

Нека материална точка с маса ***m*** извършва криволинейно движение под действие на сила $\vec{F}$. Разлагаме силата $\vec{F}$ на две (тангенциална и нормална) компоненти – фиг. 4.2. Съгласно с втория принцип на механиката $\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau$, където $\vec{a}_\tau$ е тангенциалното ускорение на материалната точка. В уравнение (4.5) заместваме $F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$ и пресмятаме работата на силата $\vec{F}$, когато материалната точка се придвижва по траекторията от положение 1 до положение 2

(4.8) $$A = \int_1^2 \left(m\frac{dv}{dt}\right) ds = \int_{v_0}^{v} mvdv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\,,$$

където $\frac{ds}{dt} = v$ е големината на моментната скорост, а v_0 и v са съответно големините на скоростта в началната точка 1 и в крайната точка 2.

Величината

(4.9) $$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

се нарича ***кинетична енергия*** на материалната точка. Измерва се в същите мерни единици, както и работата – в джаули (J). ***Тя е скаларна величина, която има винаги положителни стойности или е равна на нула, ако тялото е в покой.***

Уравнението (8.8) може да се запиши във вида:

(4.10) $$A = E_k - E_{k0}$$

Полученото уравнение изразява закона за изменение на кинетичната енергия, който гласи:

Изменението на кинетичната енергия на едно тяло (материална точка) е равно на работата на равнодействащата на всички сили, приложени към тялото.

Уравнение (8.10) се записва също така във вида

(4.11) $$E_k = E_{k0} + A$$

Следователно крайната кинетична енергия е равна на началната кинетична енергия плюс работата, извършена върху тялото. Ако в началния момент тялото е в покой, а в крайния момент се движи със скорост v и има кинетична енергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$, уравнение (8.11) получава вида

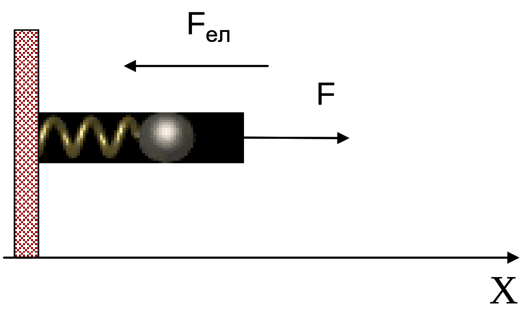
(4.12) $$E_k = \frac{mv^2}{2} = A$$

Следователно кинетичната енергия е равна на работата, която трябва да се извърши от външна сила, за да се ускори едно тяло от покой до скорост $\mathbf{v}$.

1.5. Предаване и преобразуване на енергията

С помощта на уравнение (4.11) ще проследим как се изменя кинетичната енергия на едно тяло в резултат на взаимодействието му с други тела. Когато силите, приложени към тялото, извършват положителна работа, кинетичната енергия на тялото нараства и то започва да се движи с по-голяма скорост.

Когато извършената върху тялото работа е отрицателна, кинетичната му енергия намалява и то забавя движението си. Да разгледаме следния пример: на топче, закачено за свободния край на пружина е придадена начална скорост $\mathbf{v_0}$ и то притежава кинетична енергия $E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}$ – фиг. 4.4.



Фиг. 4.4

То започва да се движи и да разтяга пружината, към която е закрепено. Еластичната сила $\vec{F}_e$, с която пружината действа на топчето, е насочена обратно на посоката на неговото преместване $\vec{x}$ и пружината извършва отрицателна работа. В резултат на тази работа топчето се забавя. Силата $\vec{F}$, с която топчето действа на пружината, е насочена по посока на преместването на края на пружината, поради което работата на топчето върху пружината е положителна. По модул отрицателната работа на пружината е равна на положителната работа на топчето.

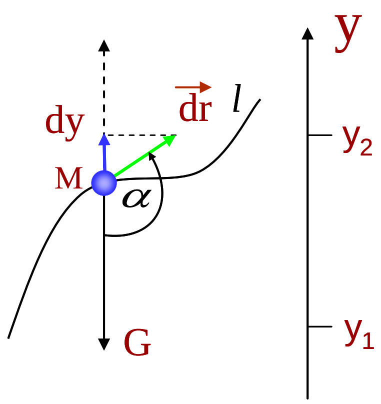
Тялото, което извършва положителна работа, отдава енергия, а тялото, което извършва отрицателна работа, получава енергия. В случая топчето извършва положителна работа за сметка на кинетичната си енергия: топчето отдава кинетичната си енергия, която в резултат на извършената от него положителна работа за разтягане на пружината се преобразува в енергия на деформираната пружина.

2. Потенциална енергия

2.1. Работа на силата на тежестта

Да разгледаме материална точка с маса $\boldsymbol{m}$, която се движи близо до земната повърхност – фиг. 4.5. Ще изчислим работата, която извършва силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$ при преместване на материалната точка от началното положение 1 с координати $(x_1, \boldsymbol{y_1})$ в положение 2 с координати $(x_2, \boldsymbol{y_2})$. Представяме вектора на силата на тежестта и вектора на елементарното преместване $d\vec{r}$ чрез техните компоненти спрямо координатна система Oxy:

$\vec{G} = -mg\vec{j}$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.



Фиг. 4.5

Елементарната работа е

$$dA = \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mg\vec{j} + \left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = -mgdy$$

Интегрираме в граници и определяме работата на силата на тежестта

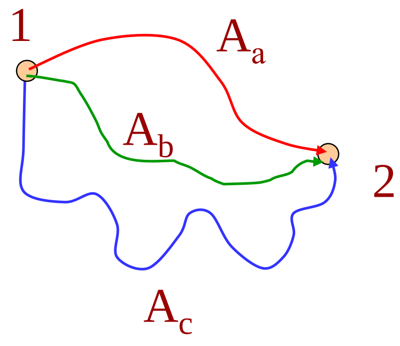
$$A = -\int_{y_1}^{y_2} mgy = -mg\left(y_2 - y_1\right) = -mgh\,, \tag{4.13}$$

където $h = (y_2 - y_1)$ е изменението на височината на материалната точка над земната повърхност. От получения резултат следва, че *работата на силата на тежестта не зависи от траекторията, по която се извършва преместването, а се определя единствено от разликата във височините на началното и крайното положение*. Силата на тежестта върши отрицателна работа при издигане на материалната точка и положителна при спускане.

2.2. Консервативни сили

Сили, чиято работа не зависи от траекторията, по която се движи материалната точка, а само от началното и крайното положение, се наричат консервативни сили. На фиг. 4.6 са показани три произволно избрани траектории, по които материална точка, на която действа сила $\vec{F}$, се премества от положение 1 в положение 2. Да означим с A_a, A_b и A_c работата на силата $\vec{F}$ в трите случая. Силата $\vec{F}$ е консервативна ако $A_a = A_b = A_c = A_{12} = const$.

От определението за консервативна сила следва, че нейната работа по затворен контур е равна на нула. Действително, ако материалната точка отначало премине от положение 1 в положение 2 по траекторията $\boldsymbol{a}$, консервативната сила $\vec{F}$ извършва работа $A_a = A_{12}$. След това материалната точка се връща отново в положение 1 например по траектория $\boldsymbol{c}$, при което силата $\vec{F}$ извършва работа $A_c' = -A_c = -A_{12}$. Общата работа по затворената траектория е



Фиг. 4.6

$A = A_a + A'_c = 0$

Понеже началното и крайното положение и траекториите са избрани произволно, полученият резултат е в сила за работата на консервативна сила по произволен затворен контур ***L***. Математически той се изразява с уравнението:

(4.14) $$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Не всички сили са консервативни. Например работата на силите на триене и съпротивление $\vec{f}_k$ по затворен контур винаги е отрицателна: $\oint_L \vec{f}_k \cdot d\vec{r} < 0$. Такива сили се наричат *дисипативни сили*. В резултат на тяхната работа механичната енергия се превръща във вътрешна енергия (отделя се количество топлина).

Сили, които са насочени винаги перпендикулярно на скоростта на материалната точка, се наричат *жироскопични сили*. Примери за жироскопични сили са кориолисовата сила , магнитната сила, действаща на заредена частица, движеща се в магнитно поле. Тъй като са перпендикулярни на преместването, работата на жироскопичните сили винаги е нула.

2.3. Потенциална енергия

Материална точка, на която действа консервативна сила $\vec{F}$, се премества от положение **1** с радиус вектор $\vec{r}_1$ в положение **2** с радиус-вектор $\vec{r}_2$. Тъй като работата $\mathbf{A_{12}}$ на консервативната сила зависи единствено от началното и от крайното положение, тя може да се представи като изменение на една функция на положението на материалната точка $W(\vec{r})$

(4.15) $$A_{12} = W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_2) = -\Delta W$$

(4.16) $$\Delta W = -A_{12}$$

Величината W, която е функция единствено на координатите на материалната точка и не зависи от нейната скорост, се *нарича потенциална енергия на материалната точка в полето на консервативната сила* $\vec{F}$. По определение изменението на потенциалната енергия е равно на взетата със знак „–„ работа на консервативната сила. Когато точките 1 и 2 са безкрайно близо една до друга, уравнение (4.16) приема вида:

(4.17) $$dW = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r}\,,$$

където dA е елементарната работа на консервативната сила $\vec{F}$ при преместване $d\vec{r}$. Според уравнение (4.5) изменението на потенциалната енергия между положение 1 и положение 2 е

(4.18) $$\Delta W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

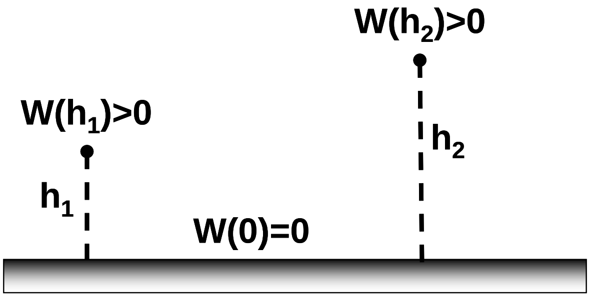
От уравнения (8.16) и (8.17) следва, че потенциалната енергия може да се определи с точност до константа. За еднозначното ú определяне трябва да се приеме, че в дадено положение на материалната точка потенциалната ú енергия е равна на нула. Изборът на точката (или точките), в която потенциалната енергия е нула, може да стане по различен начин. Например потенциалната енергия на материална точка в полето на силата на тежестта е

$$A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = W(y_1) - W(y_2)$$

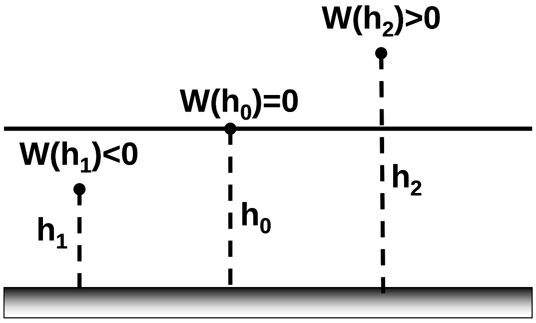
Ако приемем, че потенциалната енергия е нула, когато материалната точка се намира на земната повърхност, т.е. при $y_1 = 0$, тогава потенциалната енергия на височина $h = y_2 - 0 = y_2$ е

(4.19) $$W(y_2) = mgy_2$$

(4.20) $W = mgh$

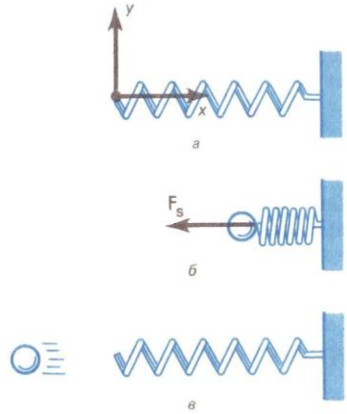


Фиг. 4.7а



Фиг. 4.7б

При такъв избор на нулевото равнище всички тела, които са издигнати нас земната повърхност, имат положителна потенциална енергия – фиг. 8.7а. Нулевото равнище можем да изберем и по друг начин. Например да приемем, че потенциалната енергия е нула на някаква височина h_0 над земната повърхност. Тогава телата, които се намират на по-голяма височина от h_0 имат положителна потенциална енергия, а тези, за които $h < h_0$, потенциалната енергия е отрицателна (фиг. 4.7б).



Фиг. 4.8

Ще разгледаме още един вид потенциална енергия, характерен за еластичните тела, и имащ много практически приложения. Да разгледаме пружина, единият край на който е неподвижно закрепен (фиг. 4.8). В свито или в разтегнато състояние пружината притежава потенциална енергия, тъй като когато се освободи, тя може да извърши работа над топка, както е показано на фиг. 4.8. Тази потенциална енергия се дължи на еластичната сила, която според закона на Хук е $\vec{F}_e = -k\vec{r}$. Тогава според (4.18) изменението на потенциалната енергия е

(4.21) $$\Delta W = -\int_1^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_1^2 k\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}k\left(r_2^2 - r_1^2\right) = W(\vec{r}_2) - W(\vec{r}_1)$$

Удобно е да положим че когато пружината не е деформирана ($r_1 = 0$), нейната потенциална енергия е нула. Тогава потенциалната енергия при деформация $\vec{r}_2 = \vec{r}$ е

(4.22) $$W = \frac{1}{2}kr^2$$

2.4. Механична енергия

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на материална точка се нарича *механична енергия* ***E*** *на тялото*:

(4.23) $E = E_k + W$

Нека на материалната точка действат както консервативни, така и неконсервативни сили. Тогава съгласно със закона за изменение на кинетичната енергия $A_{конс.} + A_{неконс.} = \Delta E_k$, където $A_{конс.}$ е работата на консервативните сили, а $\mathbf{A}_{\mathbf{неконс.}}$ – на неконсервативните сили. Тъй като по определение $A_{конс.} = -\Delta W$, горното уравнение може да се запиши във вида:

(4.24) $A_{неконс.} = \Delta E_k + \Delta W = \Delta E$

Уравнение (8.24) изразява закона за изменение на механичната енергия на една материална точка: *изменението на механичната енергия* ΔE *е равно на работата на неконсервативните сили, които действат на материалната точка*.

С въвеждането на потенциалната енергия отпада необходимостта да се пресмята непосредствено работата на консервативните сили – това става чрез отчитане на изменението на потенциалната енергия.

3. Закон за запазване на енергията

3.1. Енергия на система.

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на всички материални точки от една механична система се нарича механична енергия на системата.

(4.25) $$E = E_k + W \,,$$

където $E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{ki}$ е кинетичната енергия, а $W = \sum_{i=1}^{N} W_i$ – потенциалната енергия на системата (E_{ki} е кинетичната енергия на ***i***-тата частица, а W_i е потенциалната ú енергия с всички останали частици от системата). Законът за изменение на механичната енергия на една материална точка се обобщава за механична система:

Изменението на механичната енергия ΔE *на система от материални точки е равно на работата* $A_{неконс.}$ *на неконсервативните сили, действащи на системата.*

(4.26) $$A_{неконс.} = \Delta E$$

3.2. Закон за запазване на механичната енергия

Да разгледаме затворена механична система, в която частиците си взаимодействат само с консервативни сили. Тогава $A_{неконс.} = 0$ и от уравнение (8.26) следва, че $\Delta E = 0$, или

(4.27) $$E = E_k + W = const$$

Уравнение (8.27) изразява закона за запазване на механичната енергия, който гласи:

Механичната енергия на затворена система, в която действат само консервативни вътрешни сили, не се изменя с течение на времето.

В резултат на работата на вътрешните консервативни сили става само непрекъснато превръщане на кинетичната енергия в потенциална и обратно, докато пълната енергия се запазва.

3.3. Превръщане на енергията

Във всички реални макроскопични механични системи освен консервативни сили, действат и неконсервативни сили – например дисипативни сили на триене и съпротивление. Дисипативните сили извършват отрицателна работа и съгласно с уравнение (26) механичната енергия на системата намалява. В резултат на работата на силите на триене става превръщане на механичната енергия в топлинна енергия – триещите се тела се загряват.

Класическата механика разглежда движението на макроскопичните тела, т.е. на телата, които са изградени от огромен брой микрочастици (молекули и атоми). Атомите и молекулите са в състояние на непрекъснато вътрешно движение и взаимодействие, което обаче не се отчита от класическата механика. Затова енергията на една система от макроскопични тела може условно да се раздели на механична и немеханична енергия. Последната не зависи от скоростите и взаимното положение на телата от системата, а се определя от вътрешното движение и взаимодействие между градивните им частици. Съществуват различни видове немеханична енергия – топлинна енергия, химична енергия, ядрена енергия, енергия на топлинното излъчване и др. От гледна точка на съвременната наука всички форми на немеханична енергия се свеждат до кинетична и потенциална енергия на микрочастици от различни структурни равнища на материята. Например топлинната енергия на идеален газ е сума от кинетичните енергии на хаотичното топлинно движение на молекулите на газа. Химичната енергия се определя от кинетичната енергия на градивните частици на атомите и молекулите (ядра и електронни обвивки) и потенциалната енергия на тяхното електрично взаимодействие. Ядрената енергия е сума от кинетичната и потенциалната енергия на градивните частици на атомните ядра (протони и неутрони), които взаимодействат с ядрени и електрични сили.

Процесите в неживата и живата природа са свързани с непрекъснато преобразуване на енергията от един вид в друг.