ТЕМА 2: КИНЕМАТИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

1. Механика. Механично движение. Отправна система.

Под механично движение на едно тяло се разбира изменението на положението му спрямо други тела или изменението на взаимното положение на частите му с течение на времето.

Когато две тела са неподвижни едно спрямо друго, казваме, че те са в покой едно спрямо друго.

Делът от физиката, който изучава механичните движения, се нарича ***механика***.

Движения, които се извършват със скорости, много по-малки от скоростта на светлината във вакуум, се изучават от ***класическата механика***. Движения на тела, които се извършват със скорости, сравними със скоростта на светлината във вакуум, се изучават от ***теорията на относителността*** (***релативистката механика***).

Разделът от механиката, който изучава движенията, величините, които ги характеризират, и зависимостите между тях, но без да се отчитат причините, които променят движенията, се нарича ***кинематика***. ***Динамиката*** е разделът от механиката, който изучава движенията на телата във връзка с причините, които ги променят. Делът от механиката, който изучава условията, при които телата остават в покой, се нарича ***статика***.

Голямото разнообразие на свойствата и движенията на телата налага деленето на механиката на механика на твърдите тела, механика на деформируемите тела, механика на флуидите и др.

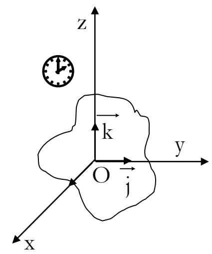
Да се познава движението на дадено тяло означава да се знае какво е положението му във всеки момент от определен временен интервал. Тогава ще знаем и как се изменя положението на тялото с течение на времето.

Определянето на положението на едно движещо се тяло във всеки момент от даден временен интервал е ***основна задача на механиката***.

Положението на дадено тяло и движението му се определят винаги спрямо друго тяло, което се нарича ***отправно тяло*** – фиг.2.1. Отправното тяло се избира произволно. Обикновено се предпочита то да се избере така, че спрямо него наблюдаваното движение да изглежда колкото се може по-просто.

Отправно тяло, свързана с него координатна система и устройства за измерване на времето (часовници), които са в покой спрямо отправното тяло, образуват отправна система.

Движението на дадено тяло изглежда различно спрямо различните отправни системи. Поради това е безсмислено да се питаме движи ли се изобщо дадено тяло и как се движи, ако не е посочено отправното тяло, спрямо което се определя движението му. Това означава, че ***механичното движение и покоят са относителни***.



Фиг. 2.1

2. Закон за движение на материална точка

2.1. Материална точка.

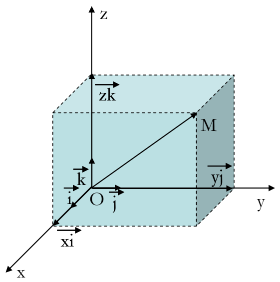
В много случаи при изучаване движението на телата можем да се абстрахираме от техните размери, форма и вътрешна структура и да ги разглеждаме като точки.

Материална точка (МТ) се нарича тяло, чийто размери, форма и вътрешна структура са несъществени за дадената задача.

Ще подчертаем, че разглеждането на едно тяло като материална точка няма нищо общо с неговите действителни размери.

2.2. Закон за движение на МТ

Положението на точка спрямо дадена отправна система се определя чрез нейния радиус-вектор $\vec{r}$. Радиус-векторът може да се представи като сума от три вектора, които са успоредни на координатните оси – фиг. 2.2.



Фиг. 2.2

(2.1) $\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Векторите $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ и $z\vec{k}$ се наричат компоненти на радиус-вектора $\vec{r}$.

Поради това и положението на една движеща се МТ точка **M** се определя чрез нейния радиус-вектор $\vec{r}$, който в този случай е функция на времето:

(2.2) $\quad \vec{r}=\vec{r}(t)$

Функцията (2.1) изразява ***закона за движение на МТ***. Ако е известен закона за движение на една МТ, е известно положението ú във всеки момент от нейното движение, т.е. решена е основната задача на механиката.

Когато е известен закона за движение (2.1) на една МТ, то са известни и зависимостите на координатите ú x, y и z от времето:

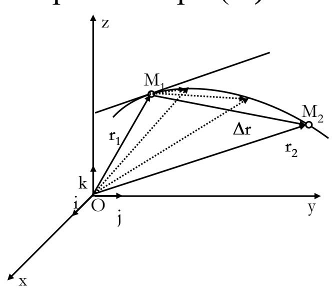
$$(2.3)\qquad \left| \begin{array}{l} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{array} \right.$$

Тези три функции също изразяват закона за движение на МТ.

2.3. Траектория на МТ. Път и преместване на МТ

При движението си МТ описва крива, която се нарича ***траектория на МТ***. Ако траекторията е част от права, то движението на МТ се нарича праволинейно. Ако траекторията не е част от права, а е дъга от друга крива, то движението на МТ се нарича криволинейно.

Да разгледаме произволно движение на една МТ **M** – фиг. 2.3. Нека L е траекторията на точката и нека за интервал от време Δt тя описва дъгата M_1M_2. Ще предполагаме, че в интервала Δt тя се намира във всяка точка от дъгата M_1M_2 само веднъж. Тогава дължината на тази дъга се нарича ***изминат път*** от материалната точка за интервала време Δt. Ще го означаваме с Δs. Пътят е скаларна величина, която се измерва в метри (m) и може да има само положителни стойности.



Фиг.2.3

Нека $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_2}$ и $\vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2}$ са радиус-векторите ú в моментите t_1 и t_2 (фиг. 2.2). Векторът $\overrightarrow{M_1M_2}$ се нарича ***преместване*** на МТ за интервала време $\Delta t=t_2-t_1$. Означава се с $\Delta\vec{r}$:

(2.4) $\quad \Delta\vec{r}=\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2=\vec{r}_1$

Преместването $\Delta\vec{r}$ е векторна величина. Ясно е, че то изобщо не лежи на траекторията L и че големината му не е равна на изминатия път Δs (дължината на дъгата M_1M_2 от L).

Ако постепенно намаляваме интервала от време Δt, точка M_2 се доближава до точка M_1 и разликата между големината на преместването Δr и изминатия път Δs намалява. В граничния случай, когато точките M_1 и M_2 са безкрайно близо една до друга, дължините на хордата M_1M_2 и на дъгата M_1M_2 са равни. Преместването $d\vec{r}$, което МТ извършва за безкрайно малък интервал от време dt, се нарича ***елементарно***

преместване. Големината на елементарното преместване $\mathbf{dr}$ е равна на изминатия за същото време път $\mathbf{ds}$

(2.5) $$\mathbf{dr=ds}$$

Векторът на елементарното преместване $\mathbf{d\vec{r}}$ е насочен по допирателната към траекторията по посока на движението.

3. Скорост и ускорение на МТ

3.1. Средна скорост

По определение средната скорост е

(2.6) $$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{average}}=\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}}$$

Тя е векторна величина и има същата посока както преместването. Така въведената средна скорост не зависи от изминатия път, тъй като е пропорционална на преместването и се определя само от началната и крайна точка на движението.

В редица случаи от всекидневието се използва понятието средна скорост. При това трябва да се има предвид, че става въпрос за скаларна величина, равна на пътя $\mathbf{\Delta s}$, разделен на интервала от време $\mathbf{\Delta t}$, за което той е изминат:

(2.7) $$\mathbf{v}_{\mathbf{average}}=\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta\mathbf{t}}$$

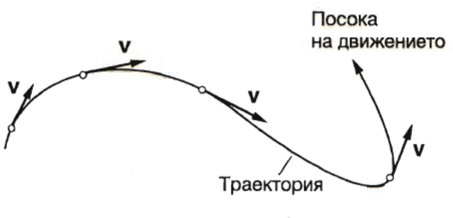
3.2. Моментна скорост

Ясно е, че средната скорост зависи от избора на интервала от време, за който се пресмята, поради което дава малко информация за характера на движение. Ето защо се въвежда величината ***моментна скорост***:

(2.8) $$\vec{\mathbf{v}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}}=\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt}}$$

Както е известно от математиката, границата на отношението $\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta\mathbf{t}}$, когато $\mathbf{\Delta t}$ клони към нула, е производната на функцията $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$. И така, моментната скорост е равна на първата производна на преместването по времето $\mathbf{t}$. Тя характеризира колко бързо тялото променя положението си в пространството.

Моментната скорост е векторна величина, която има същата посока както елементарното преместване $\mathbf{d\vec{r}}$ – насочена е по допирателната към траекторията по посока на движението – фиг. 2.4.



Фиг. 2.4

Големината на скоростта е

(2.9) $$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{dt}}=\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}$$

Заместваме радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ от уравнение (2.1) в уравнение (2.8) и получаваме

(2.10) $$\vec{\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{i}}+\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{j}}+\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{k}}=\mathbf{v_x}\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{v_y}\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{v_z}\vec{\mathbf{k}},$$

където $\mathbf{v_x}=\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$, $\mathbf{v_y}=\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}$ и $\mathbf{v_z}=\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}}$ са съответно x-, y- и z-проекциите на вектора на скоростта. Големината на скоростта се изразява с формулата

(2.11) $$\mathbf{v}=\sqrt{\mathbf{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

3.3. Ускорение

Скоростта на една материална точка може да се изменя с течение на времето както по големина, така и по посока. Ако $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ е изменението на скоростта за интервал от време $\Delta\mathbf{t}$, то векторът

(2.12) $$\vec{\mathbf{a}}=\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta\mathbf{t}}$$

се нарича ***средно ускорение*** на МТ. Ясно е, че ускорението е физична величина, която характеризира изменението на скоростта с течение на времето.

В граничния случай, когато изучаваме изменението на скоростта в безкрайно малък интервал от време

(2.13) $$\vec{\mathbf{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta\mathbf{t}}=\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{dt}},$$

т. е. ускорението е първата производна на скоростта по времето.

Тъй като от друга страна скоростта е първа производна на радиус-вектора $\vec{\mathbf{r}}$ по времето $\mathbf{t}$, ускорението може да се представи като втора производна на $\vec{\mathbf{r}}$ по времето

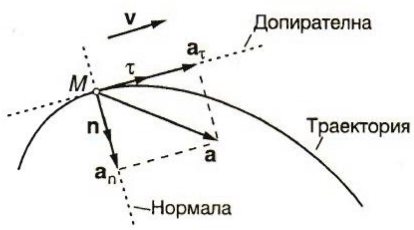
(2.14) $$\vec{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{d^2}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt^2}}=\frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}\vec{\mathbf{i}}+\frac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dt^2}}\vec{\mathbf{j}}+\frac{\mathbf{d^2z}}{\mathbf{dt^2}}\vec{\mathbf{k}}$$

(2.15) $$\vec{\mathbf{a}}=\mathbf{a_x}\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{a_y}\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{a_z}\vec{\mathbf{k}},$$

където $\mathbf{a_x}=\dfrac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}}$, $\mathbf{a_y}=\dfrac{\mathbf{d^2y}}{\mathbf{dt^2}}$ и $\mathbf{a_z}=\dfrac{\mathbf{d^2z}}{\mathbf{dt^2}}$ са съответно x-, y- и z-проекциите на вектора на ускорението.

3.4. Тангенциално и нормално ускорение

По-нататък ще се ограничим в разглеждането само на такива движения, които се извършват в една равнина. На фиг. 2.5. е показана част от траекторията на МТ, която се движи само в равнината на чертежа.



Фиг. 2.5

В момент $\mathbf{t}$ тя се намира в точка М от траекторията. Нека $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ и $\vec{\mathbf{n}}$ са два взаимно перпендикулярни единични вектора, успоредни съответно на допирателната и на нормалата към траекторията в точка М. Векторът $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ е насочен по посока на движението, т.е. по посока на скоростта $\vec{\mathbf{v}}$, а векторът $\vec{\mathbf{n}}$ е насочен към вдлъбнатата страна на траекторията. Векторът на ускорението $\vec{\mathbf{a}}$ също лежи в равнината, в която се извършва движението и може да се разложи на две компоненти, насочени съответно в направление на допирателната (тангентата) и на нормалата към траекторията

(2.16) $$\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{a}}_\tau+\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{n}=\mathbf{a}_\tau\vec{\boldsymbol{\tau}}+\mathbf{a_n}\vec{\mathbf{n}}$$

Компонентата $\vec{\mathbf{a}}_\tau=\mathbf{a}_\tau\vec{\boldsymbol{\tau}}$, която е успоредна на допирателната към траекторията, се нарича ***тангенциално ускорение*** на материалната точка. Другата компонента $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{n}=\mathbf{a_n}\vec{\mathbf{n}}$, която е насочена по нормалата към траекторията, се нарича ***нормално ускорение*** на материалната точка.

Тангенциалното ускорение

(2.17) $$\vec{\mathbf{a}}_\tau=\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\vec{\boldsymbol{\tau}}$$

се определя от първата производна $\dfrac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}$ на големината на скоростта $\mathbf{v}$ по времето $\mathbf{t}$, т.е. ***то характеризира бързината, с която се изменя големината на скоростта***. Когато скоростта нараства, тангенциалното ускорение е насочено по посока на единичния вектор $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, т.е. по посока на скоростта. Ако скоростта намалява, векторите $\vec{\mathbf{a}}_{\tau}$ и $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ имат противоположни посоки – тангенциалното ускорение е насочено обратно на вектора на скоростта.

Нормалното ускорение

(2.18) $$\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{r}}\vec{\mathbf{n}}$$

винаги е насочено по посока на единичния вектор $\vec{\mathbf{n}}$, т.е. по нормалата към вдлъбнатата страна на траекторията. Нормалното ускорение не променя големината, а само посоката на скоростта – ***показва големината, с която се променя посоката на скоростта***.

4. Някои частни случаи на движение на МТ

4.1. Праволинейно равнопроменливо движение на МТ

Движения, при които нормалното ускорение е равно на нула, се наричат праволинейни – $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{0}}$. При тях скоростта се променя по големина, но не и по посока. Големината на преместването е равна на изминатия от материалната точка път.

Ще разгледаме два частни случая на праволинейно движение:

4.1.1. $\vec{\mathbf{a}}_{\tau}=\vec{\mathbf{0}}$. ***Движения, при които тангенциалното ускорение е нула, се наричат равномерни движения***. При равномерните движения не се променя големината на скоростта – $\mathbf{v=const}$. При праволинейното равномерно движение скоростта не се променя нито по големина, нито по посока. Големината на изминатия път можем да запишем:

(2.19) $$s = \Delta r = v\Delta t$$

4.1.2. $\vec{\mathbf{a}}_{\tau}=\overrightarrow{\mathbf{const}}$. Праволинейно движение на едно тяло, чието ускорение е постоянно, се нарича ***праволинейно равнопроменливо движение***. Да разгледаме тяло **М**, което извършва праволинейно равнопроменливо движение с ускорение $\vec{\mathbf{a}}$. Нека $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ и $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}$ са съответно радиус-вектора и скоростта на тялото в началния момент $\mathbf{t=0}$. Тогава

(2.20) $$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Равенството изразява закона за скоростта при праволинейно равнопроменливо движение.

Радиус-векторът $\vec{\mathbf{r}}$ на тялото в произволен момент от време $\mathbf{t}$ е:

(2.21) $$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Често пъти при приложенията на законите (2.25) и (2.26) се избира координатна ос $\mathbf{Ox}$ така, че траекторията на тялото М да лежи на нея, а посоката на оста $\mathbf{Ox}$ да съвпада с посоката на скоростта му. Тогава равенствата (2.25) и (2.26) се записват във вида:

(2.22) $$\left|\begin{array}{l}\mathbf{v_x=v_{0x}+a_x t}\\ \mathbf{x=x_0+v_x t+\frac{1}{2}a_x t^2}\end{array}\right.,$$

където $\mathbf{v_x}$, $\mathbf{v_{0x}}$ и $\mathbf{a_x}$ са проекциите върху оста $\mathbf{Ox}$ съответно на векторите $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}$ и $\vec{\mathbf{a}}$.

Праволинейно равнопроменливо движение на тяло, при което скоростта и ускорението му имат постоянно една и съща посока, се нарича ***равноускорително.*** При него законът за скоростта и законът на движение имат съответно вида:

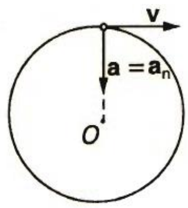
(2.23) $$\left|\begin{array}{l}\mathbf{v=v_0+at}\\ \mathbf{x=x_0+v_0 t+\frac{1}{2}at^2}\end{array}\right.$$

Праволинейно равнопроменливо движение на тяло, при което скоростта и ускорението му имат постоянно противоположни посоки, се нарича ***равнозакъснително движение***. За него

(2.24) $$\left|\begin{array}{l} \mathbf{v=v_0-at} \\ \mathbf{x=x_0+v_0t-\frac{1}{2}at^2} \end{array}\right.$$

4.2. Движение по окръжност

4.2.1. **<u>Ускорение.</u>** Както за всяко криволинейно движение, при движение по окръжност ускорението на МТ може да се представи като сума от тангенциално и нормално ускорение. Нормалното ускорение е насочено към центъра на окръжността и се нарича центростремително ускорение. При равномерно движение по окръжността $\mathbf{a_\tau=0}$, $\mathbf{v=const}$ и центростремителното ускорение също е константа – $\mathbf{a_n=\frac{v^2}{r}}$.



Фиг. 2.6

4.2.2. ***Следователно равномерното движение по окръжност се извършва с постоянно по големина ускорение, което е насочено към центъра на окръжността*** – фиг2.6.

4.2.3. **<u>Периодично движение</u>**. Движения, които се извършват по един и същ начин, повтаряйки се през равни интервали от време, се наричат ***периодични движения***. Най-малкият интервал от време, след който се повтарят стойностите на всички величини, характеризиращи движението, се нарича период $\mathbf{T}$. Честотата $\boldsymbol{\nu}$ показва колко пъти за единица време се повтаря едно периодично движение. По определение двете величини са свързани със съотношението:

(2.25) $$\mathbf{T=\frac{1}{\nu}}$$

Равномерното движение по окръжност е пример за периодично движение. Лесно се установява връзката между скоростта $\mathbf{v}$, периода $\mathbf{T}$ и честотата $\boldsymbol{\nu}$. За време $\mathbf{t=T}$ МТ извършва едно пълно завъртане и изминава път, равен на дължината $\mathbf{2\pi r}$ на окръжността. Тогава

(2.26) $$\mathbf{v=\frac{2\pi r}{T}=2\pi r\nu}$$