

ТЕМА 10. МЕХАНИКА НА ТВЪРДО ТЯЛО

1. Идеално твърдо тяло. Видове движения.

Идеално твърдо тяло се нарича съвкупността от материални точки, разстоянията между които не се изменят с течение на времето.

От определението следва, че при действие на външни сили идеално твърдото тяло запазва формата и обема си. т.е. не се деформира. Идеално твърдото тяло е абстрактно понятие, което се въвежда в механиката за опростяване решаването на определени физични проблеми. В действителност формата и обемът на реалните тела се изменят под действието на сили – те се деформират и в тях се разпространяват механични вълни.

Очевидно е, че няма смисъл да се проследява движението на всяка точка от тялото, след като разстоянията между точките се запазват постоянни с времето. Достатъчно е да се избере една точка от него, която да описва движението му просто и нагледно. Тази точка се нарича **център на масите (център на инерцията)**.

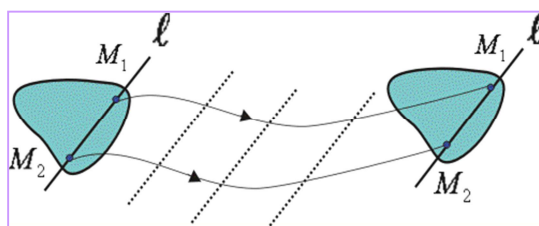
Центърът на масите на едно твърдо тяло е такава въображаема точка С, положението на която характеризира разпределението на масите в една система и чийто радиус-вектор се определя от уравнението:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad 10.1$$

където m_i и $\vec{r}_i$ са съответно масата и радиус-вектора на i -тата точка, а n – броят на материалните точки в системата; $M = \sum m_i$ – масата на системата.

Движенията на твърдите тела са сложни, но винаги едно сложно движение може да се сведе до по-прости. Най-простите движения за твърдите тела са две – постъпателно и въртливо.

При **постъпателно движение** (нарича се още **транслационно**) всички точки от тялото се движат с еднакви скорости и описват еднакви траектории, успоредни една на друга (фиг. 10.1).

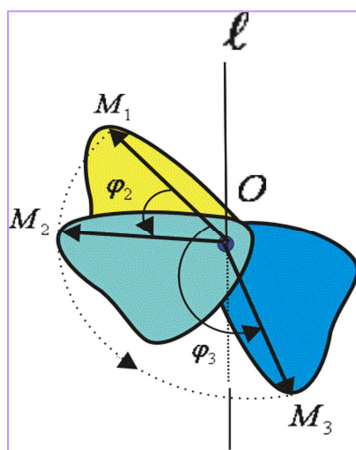


Фиг. 10.1

Ето защо за описването на постъпателното движение на едно твърдо тяло е достатъчно да се познава законът за движение на неговия център на масите:

$$M\vec{a} = \vec{F}; \quad M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F} \quad 10.2$$

където M е масата на твърдото тяло, $\vec{F}$ – резултантната сила, а $\vec{r}_C$ и $\vec{v}_C$ – радиус-векторът и скоростта на центъра на масите му.



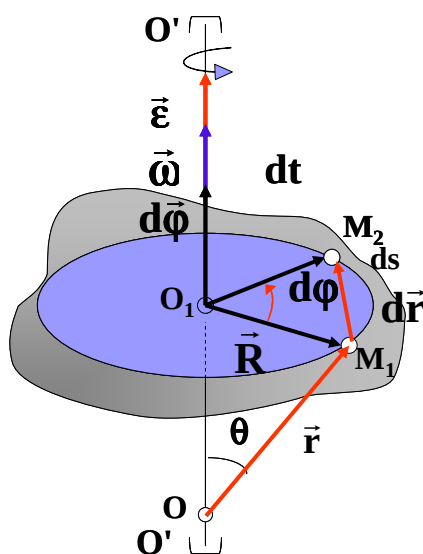
Фиг. 10.2

Въртеливите движения са много разнообразни, но ние ще се спрем на най-простото от тях – **въртене на твърдо тяло около постоянна ос** (нарича се още **двумерно въртене**), фиг. 10.2. При това въртене всички точки от тялото описват окръжности, чиито центрове лежат върху една права, наречена **ос на въртене** (ℓ). Равнините на окръжностите, по които се извършва движението, са успоредни по между си и са перпендикулярни на оста ℓ на въртенето. Оста на въртене може да минава през центъра на тежестта на тялото, но може и да лежи на някакво разстояние от нея.

2. Основни кинематични величини при въртене на твърдо тяло около постоянна ос

Най-напред ще разгледаме по-подробно въртенето на твърдо тяло около ос, минаваща през центъра на тежестта му. Основните кинематични величини, които характеризират това движение, са **ъгъл на завъртане** $d\vec{\varphi}$, **ъглова скорост** $\vec{\omega}$ **ъглово ускорение** $\vec{\epsilon}$.

Нека разгледаме произволна точка от тялото, която в началния момент от време t се намира в положение M_1 (фиг. 10.3).



Фиг. 10.3

За интервал от време dt тя се завърта на ъгъл $d\phi$ и заема новото положение M_2 . При това завъртане точката извършва постъпателно движение по окръжност с радиус R с линейна скорост $\vec{v}$. За разглеждания интервал от време изминатия път е равен на дъгата M_1M_2 , като е изпълнено равенството $ds = R d\phi$. Заедно с точката M се завъртат и всички точки от тялото, намиращи се на различни разстояния от оста на въртене. Ъгълът на завъртане е един и същ за всички точки, но изминатите от тях пътища са различни. **Следователно ъгловата скорост и ъгловото ускорение, които представляват производни на ъгъла на завъртане, са еднакви за всички точки от тялото.** Не може да се каже същото за линейните скорости на различни точки от тялото. Точките, които са по-близо до оста на въртене, ще се движат по-бавно, а тези, които са по-далеч – по-бързо.

Ще изразим връзките, които съществуват между ъгловите и линейните кинематични величини. Да въведем отправна система с начало точка O (лежаща на оста на въртене $O'O'$ и нека $\vec{r}$ е радиус-векторът на точката M_1 . Да означим ъгълът между $\vec{r}$ и оста на въртене с θ . Големината на елементарното преместване $d\vec{r}$ е равна на изминатия от точката път:

$$|d\vec{r}| = ds; \quad ds = R d\phi \Rightarrow dr = r \sin\theta d\phi \quad 10.3$$

Следователно от определението за векторно произведение на два вектора елементарното преместване $d\vec{r}$ може да се представи като векторното произведение на елементарния ъгъл на завъртане $d\vec{\phi}$ и радиус-векторът на точката:

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{R} \quad 10.4$$

Линейната скорост на материалната точка се дефинира като първата производна на преместването. Следователно:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad 10.5$$

Аналогично за връзката между линейното и ъгловото ускорение получаваме:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad 10.6$$

Първото събираемо представлява тангенциалното ускорение $\vec{a}_t$ на точката, а второто – нормалното ускорение $\vec{a}_n$:

$$\vec{\epsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_t \quad \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n \quad 10.7$$

3. Кинетична енергия при двумерно въртене

Всяка точка, която се движи, притежава кинетична енергия. Твърдото тяло, като съвкупност от материални точки, свързани здраво по между си, при въртене също ще притежава някаква кинетична енергия. Да допуснем, че тялото, което се върти, се състои от n на брой материални точки. Всички те се въртят с еднаква

ъглова скорост и имат различни линейни скорости. Означаваме с m_i и v_i съответно масата и линейната скорост на i -тата точка. Тогава нейната кинетична енергия може да се запише по следния начин:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i R^2 \omega^2}{2} = \frac{I_i \omega^2}{2} \quad 10.8$$

където с I_i е означена една нова величина, характеризираща двумерното въртене. Тази величина се нарича **инерчен момент на материална точка спрямо дадена ос на въртене** и се определя от следния израз:

$$I_i = m_i R_i^2 \quad 10.9$$

За да се определи инерчният момент на тялото, трябва да се извърши сумиране по броя n на точките:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \quad 10.10$$

В такъв случай пълната кинетична енергия на тялото е:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n I_i = \frac{\omega^2 I}{2} \quad 10.11$$

Изразът за кинетичната енергия на въртящо се тяло има подобен вид на този за кинетична енергия при постъпателното движение. Кинетичната енергия се определя от произведението на инерчният момент на тялото и квадрата на неговата ъглова скорост, разделено на две.

4. Инерчен момент

Инерчният момент е физична величина, която характеризира разпределението на масите в едно твърдо тяло спрямо неговата ос на въртене.

Числено тази величина се определя от сумата на произведенията от масите на отделните частици на тялото, разглеждани като материални точки, и квадратите на разстоянията на тези частици до оста на въртене. Аналогично на масата, **инерчният момент характеризира количествено свойството инертност при въртелите движения**. Всяко тяло, независимо дали се върти или не, притежава определен инерчен момент по отношение на произволно избрана ос на въртене, както и всяко тяло, независимо дали се движи или е в покой, притежава маса. Мерната единица за инерчен момент е **килограм по квадратен метър** [$kg \cdot m^2$].

Инерчният момент зависи от формата, размерите на тялото и от избраните оси на въртене. При непрекъснато разпределение на масите в едно тяло сумата в (10.10) се заменя с интеграл. В такъв случай получаваме:

$$I = \int_V R^2 dm \quad 10.12$$

където dm е масата на една безкрайно малка частица от тялото, а r – разстоянието между тази частица и оста на въртене. Интегрирането се извършва по целия обем V на тялото.

Инерчният момент на всяко тяло при въртене около ос, минаваща през неговия център на масите, се нарича **собствен инерчен момент**. Ако собственият инерчен момент на тялото е известен, инерчният му момент спрямо друга ос, която е успоредна на тази през центъра на масите му, се определя от теоремата на Щайнер:

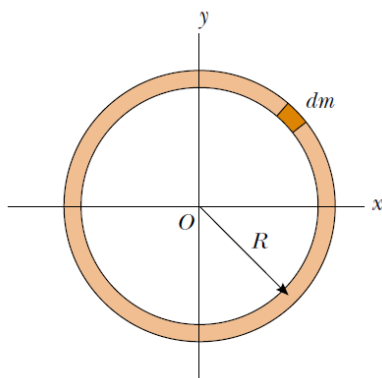
“Инерчният момент на тяло спрямо произволна ос е равен на инерчният момент спрямо ос, минаваща през центъра на тежестта (наречен център на инерция) и успоредна на дадената, плюс произведението от масата на тялото и квадрата на разстоянието между двете оси”

$$I = I_G + ma^2$$

10.13

4.1. Инерчен момент на тънък пръстен

Ще пресметнем инерчния момент на тънък еднороден пръстен с маса m и радиус R спрямо ос z , минаваща през центъра на масите му и перпендикулярна на равнината на пръстена – фиг. 10.4.



Фиг. 10.4

Оста z е ос на аксиална (ротационна) симетрия – при завъртане на пръстена около тази ос на произволен ъгъл ϕ пръстенът съвпада сам със себе си. Тъй като всички точки от пръстена са на еднакво разстояние от оста z , инерчният му момент спрямо нея е:

$$I_z = mR^2$$

10.14

4.2. Инерчен момент на диск

Ще направим аналогични пресмятания за тънък диск с маса m и радиус R спрямо ос z , минаваща през центъра на масите му и перпендикулярна на равнината на пръстена – фиг. 10.5. За разлика от пръстена, отделните малки елементи (материални точки), от които е съставен диска, се намират на различни разстояние

от оста z . Затова ще разделим мислено диска на голям брой тънки пръстени. Масата на всеки един такъв пръстен е:

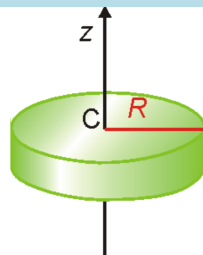
$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

където $\frac{m}{\pi R^2}$ е масата на единица площ от диска, а $2\pi r dr$ - площта на разглеждания пръстен. Съгласно (10.14) инерчният момент на пръстена е:

$$dI_z = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

Инерчният момент на диска е сума от инерчните моменти на всички пръстени:

$$I_z = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2 \quad 10.15$$



Фиг. 10.5

5. Момент на сила. Работа при двумерно въртене. Основно динамично уравнение при двумерно въртене

Всяко движение на дадено тяло е свързано с действието на сили върху него. На материалните точки, които изграждат твърдото тяло, могат да действат две групи сили – вътрешни и външни. Вътрешните сили свързват системата от материални точки и я превръщат в едно цяло. Външните сили възникват поради взаимодействието между това тяло и кое да е друго. Следователно в сила е изразът:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad 10.16$$

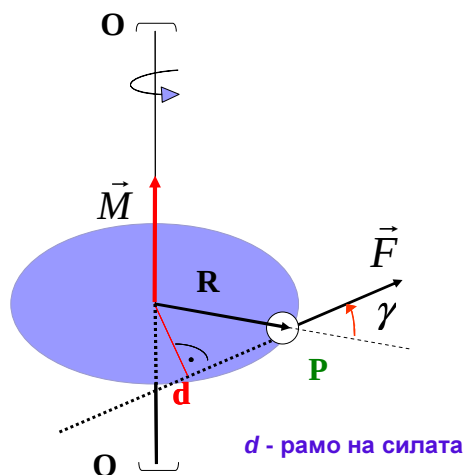
където с $\vec{f}_i$ са означени вътрешните сили, действащи на i -тата частица от тялото, а с $\vec{F}_i$ – външните сили, действащи на същата частица. Съгласно третия принцип на механиката сумата от всички вътрешни сили трябва да бъде равна на нула. Ето защо окончателно получаваме

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad 10.17$$

Силата $\vec{F}$ е резултантната на всички външни сили, действащи върху тялото.

Тъй като твърдите тела извършват най-общо два вида движения – постъпателни и въртеливи, ще се опитаме да разграничим и силите, пораждащи тези движения. Външните сили, чието направление на действие минава през центъра на масите, предизвикват постъпателното движение. **Въртеливите движения възникват като резултат от действието на външни сили, чието направление не пресича оста на въртене и не е успоредно на нея.**

Нека силата $\vec{F}$ е такава сила, приложена в точка P , която се намира на разстояние R от оста на въртене на дадено тяло и нека посоката на силата $\vec{F}$ сключва ъгъл γ с посоката на вектора $\vec{R}$ (фиг. 10.6).



Фиг. 10.6

Величината

$$d = R \sin \gamma \quad 10.18$$

се нарича **рамо на силата $\vec{F}$** . Това е най-малкото разстояние между правата, на която лежи силата, и оста на въртене.

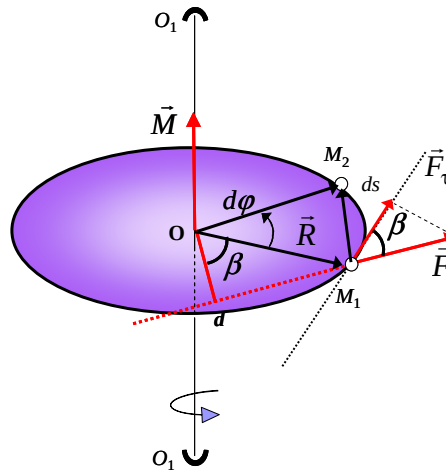
Векторното произведение

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \quad 10.19$$

се дефинира като **момент на силата $\vec{F}$** . Измерва се в [N.m]. **Моментът на силата е вектор, насочен по направление на оста на въртене.**

Тъй като частиците в твърдите тела са здраво свързани по между си, действието на приложената сила $\vec{F}$ се предава и на останалите частици, вследствие на което цялото тяло извършва въртене около оста OO , минава през центъра на масите му. За малък интервал от време dt точката P се завърта на малък ъгъл $d\varphi$, при което извършва елементарно преместване $d\vec{r}$, като изминава път ds . Работата на силата $\vec{F}$ е (фиг. 10.7):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \beta R d\varphi \quad 10.20$$



Фиг. 10.7

Отчитайки, че $R \cos \beta = d$ и $M = Fd$, израз (10.20) може да се запише във вида:

$$dA = F d d\varphi = M d\varphi \quad 10.21$$

Тъй като векторите $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$ са успоредни, за елементарната работа при въртливо движение може да се получи израз, аналогичен на този, за работата, извършвана от сила при постъпателно движение:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \quad 10.22$$

Работата за краен интервал от време Δt е:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{t_1}^{t_2} M \omega dt \quad 10.23$$

Вече знаем, че работата на една сила върху дадено тяло се изразходва за привеждане на съответното тяло в движение, т.е.

$$dA = dE_k \quad 10.24$$

Заместваме (10.22) и (10.11) в (10.24)

$$M d\varphi = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = \frac{2 I \omega d\omega}{2} \quad 10.25$$

Разделяме двете страни на равенството на dt :

$$M \frac{d\varphi}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt}; \quad \vec{M} = I \vec{\epsilon} \quad 10.26$$

Последната зависимост между момента на силата, инерциония момент на тялото и неговото ъглово ускорение е аналогично на уравнението на постъпателно движение $\vec{F} = m\vec{a}$ на материална точка и се нарича **основно динамично уравнение при двумерно въртене**.

6. Момент на импулса на тяло при въртене. Закони за изменение и за запазване момента на импулса

Нека диференцираме формулата $E_{ki} = \frac{I_i \omega^2}{2}$, определяща кинетичната енергия на една точка от въртящото се твърдо тяло, по ъгловата скорост ω :

$$\frac{dE_{ki}}{d\omega} = \frac{2I_i \omega}{2} = I_i \omega = L_i \quad 10.27$$

Получаваме една нова величина която характеризира въртенето на отделна точка около постоянна ос и се нарича **момент на импулса на точката**. Тя е аналогична на импулса $\vec{p}_i$ на точката при постъпателното движение. Израз (10.27) може да се преобразува по следния начин:

$$L_i = \frac{m_i R_i^2 v_i}{R_i} = m_i R_i v_i = p_i R_i \quad 10.28$$

Формула (10.28) показва връзката между момента на импулса на една точка при въртене и импулса на същата точка при постъпателно движение. Тъй като при всяко движение по окръжност е изпълнено условието $\vec{r}_i \perp \vec{p}_i$, моментът на импулса може да се представи като векторно произведение на двата вектора:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad 10.29$$

Мерната единица за момента на импулса е $[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$. Пълният момент на импулса на тялото се получава, като се сумират като се сумират моментите на всички точки, които го изграждат:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = I \vec{\omega} \quad 10.30$$

Нека диференцираме (10.30) по времето:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\epsilon} = \vec{M} \quad 10.31$$

Получихме нова зависимост, която е аналогична на втория принцип на механиката. На импулса $\vec{p}$ на точката при постъпателно движение съответства моментът на импулса $\vec{L}$ при въртене, а на равнодействащата сила $\vec{F}$ съответства пълният момент на силите $\vec{M}$. Зависимостта (10.31) показва, че **пълният въртящ момент на силите, действащи на твърдото тяло, е равен на изменението на неговия пълнен момент на импулса за единица време**. Ако на тялото не действат външни сили, тогава $\vec{M} = 0$ и изменението на момента на импулса също ще бъде равно на нула. Следователно моментът на импулса на тялото ще се запазва постоянен с времето:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = \text{const} \quad 10.32$$

Изразите (10.31) и (10.32) изразяват законите за изменение и за запазване момента на импулса на твърдо тяло при въртене около постоянна ос.

7. Аналогия между величините, описващи постъпателното и въртеливото движение

Между величините, характеризиращи постъпателното движение на материална точка, и тези, характеризиращи двумерното въртене на твърдо тяло, съществува аналогия. В таблицата са показани еквивалентните величини при двата вида движения.

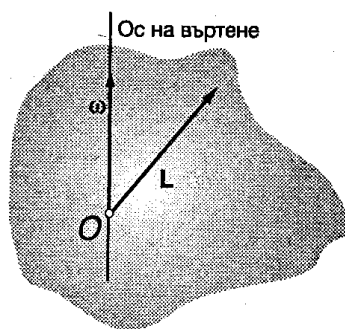
Постъпателно движение	Въртеливо движение
Преместване $\vec{r}$	Ъгъл на завъртане $\vec{\phi}$
Скорост $\vec{v}$	Ъглова скорост $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a}$	Ъглово ускорение $\vec{\epsilon}$
Сила $\vec{F}$	Момент на сила $\vec{M}$
Маса m	Инерчен момент I
Импулс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент на импулса $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Уравнение на движение	Уравнение на движение
$\vec{F} = m\vec{a}; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\vec{M} = I\vec{\epsilon}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
Закон за запазване на импулса	Закон за запазване момента на импулса
$\vec{p} = \text{const}$	$\vec{L} = \text{const}$
Кинетична енергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетична енергия $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Работа $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Работа $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\phi}$

8. Въртене около неподвижна точка и свободно движение на твърдо тяло

8.1. Главни инерчни оси

Нека началото **O** на неинерциална отправна система, свързана с твърдо тяло, е неподвижно. Тялото се върти около моментна ос, минаваща през точка **O**. В общия случай вектора на момента на импулса на твърдото тяло не е насочен по оста на въртене, т.е. векторите $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не са успоредни (фиг. 10.8). Доказва се, че

*При произволен избор на началото **O** през него могат да се прекарат три взаимно перпендикулярни оси **x**, **y** и **z**, при въртене около които моментът на импулса $\vec{L}$ е насочен по оста на въртене. Те се наричат главни инерчни оси на тялото за точка **O**.*



Фиг. 10.8

Удобно е главните инерчни оси да се изберат за координатни оси на отправната система, свързана с тялото.

Инерчните моменти на тялото спрямо главните инерчни оси се наричат главни инерчни моменти (I_x , I_y , и I_z).

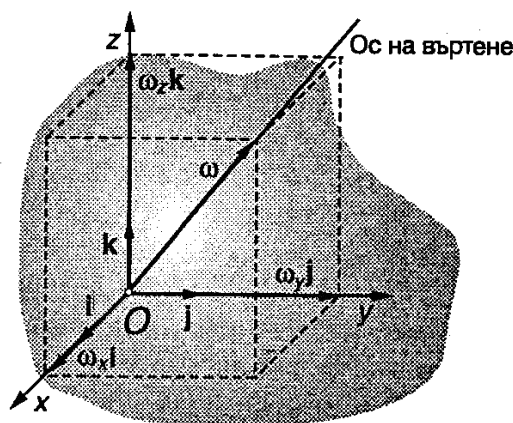
Когато тялото се върти около главна инерчна ос, моментът на импулса и ъгловата скорост са свързани с уравнението:

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}; \quad \vec{L} = I_y \vec{\omega}; \quad \vec{L} = I_z \vec{\omega} \quad 10.33$$

При въртене около произволна моментна ос, минаваща през началото O, моментът на импулса е:

$$\vec{L} = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k} \quad 10.34$$

където ω_x , ω_y и ω_z са проекциите на ъгловата скорост върху главните инерчни оси избрани за координатни оси на неинерциалната отправна система – фиг. 10.9.



Фиг. 10.9

Доказва се, че когато началото O е неподвижно, кинетичната енергия на твърдото тяло при произволно въртене е:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad 10.35$$

Главните инерчни оси, прекарани през центъра на масите C на твърдо тяло, се наричат главни централни инерчни оси, а съответните инерчни моменти – главни централни инерчни моменти.

Кинетичната енергия при произволно движение на твърдо тяло е:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) \quad 10.36$$

където m е масата на тялото, v_C - скоростта на центъра на масите на тялото, а I_x , I_y , и I_z са главните централни инерчни моменти.

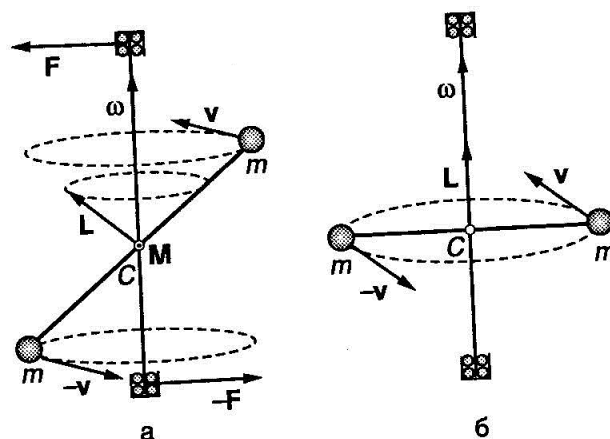
Най-лесно се намират главните централни инерчни оси на еднородни и симетрични тела. Например, ако тялото има равнина на симетрия, центърът на масите лежи върху нея. Една от главните централни инерчни оси е перпендикулярна на равнината на симетрия, а другите две лежат върху нея. Всички оси на симетрия са и главни централни инерчни оси.

Всяка ос, минаваща през центъра на еднородно кълбо или на еднородна сферична обвивка, е главна централна инерчна ос. За ротационните тела (диск, цилиндър, конус и др.) една от главните централни инерчни оси съвпада с оста на симетрия (избира се за оста z на неинерциалната отправна система, свързана с тялото). Всяка ос, която преминава през центъра на масите и е перпендикулярна на оста на симетрия, също е главна инерчна ос. Затова при ротационните тела за координатни оси x и y на неинерциалната отправна система могат да се вземат две произволни взаимно перпендикулярни оси, които минават през центъра на масите и са перпендикулярни на оста на симетрия – те винаги са главни оси. Инерчните моменти на ротационните тела спрямо всички главни централни инерчни оси, перпендикулярни на оста на симетрия, са равни: $I_x = I_y$.

8.2. Свободни оси

На фиг. 10.10 е показана гира, която се върти с постоянна ъглова скорост ω около метална ос, минаваща през центъра на масите на грата. Оста е закрепена между лагери, които не позволяват тя да променя направлението си. Моментът на импулса $\vec{L}$ на гирата, определен спрямо неподвижния център на масите C на гирата, остава постоянен по големина, но непрекъснато променя посоката си, описвайки кръгов конус около оста на въртене. Туй като моментът на импулса може да се изменя само под действието на външни сили, следва изводът, че промяната на посоката на $\vec{L}$ се дължи на силите, с които лагерите действат на системата. Те създават двойка сили, лежаща в една равнина с оста на въртене. Въртящият момент $\vec{M}$ на двойката сили е перпендикулярен на $\vec{L}$ и води единствено до изменение на посоката на момента на импулса. Съгласно с третия принцип на механиката оста действа на лагерите с равни по големина и противоположни по посока сили. Казва се, че системата е **динамически небалансирана**. Динамичният дисбаланс при автомобилните колела, при въртящите се части на машини и др. води до тяхното бързо износване, поради което се вземат мерки за неговото отстраняване.

Дисбаланс няма, когато оста на въртене съвпада с главна централна инерчна ос. Тогава моментът на импулса $\vec{L}$ е насочен по оста на въртене (фиг. 10.10б) и по време на въртенето не се изменя нито по големина, нито по посока. Следователно в този случай за запазване неизменно направлението на оста на въртене не е необходимо към нея да се прилагат външни сили.

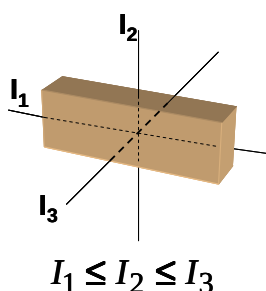


Фиг. 10.10

Ос, чието положение в пространството в отсъствие на външни сили не се променя, когато тялото се върти с постоянна ъглова скорост около нея, се нарича свободна ос на тялото.

От казаното е ясно, че главните централни инерчни оси са и свободни оси.

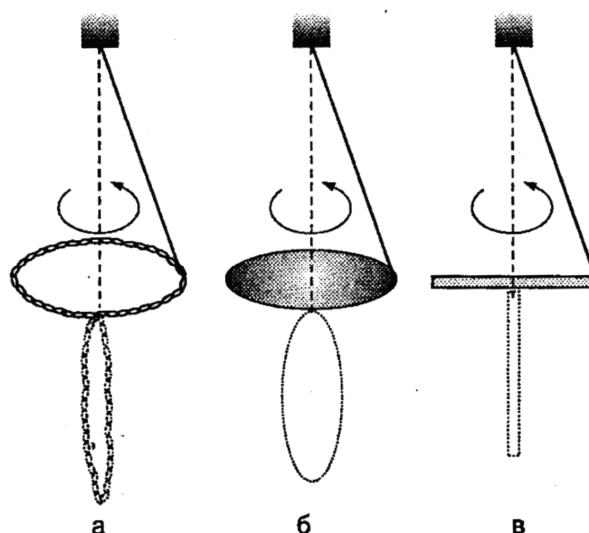
Опитно и теоретично се доказва, че в отсъствие на външни сили устойчиво е само въртенето около главни централни оси (свободни оси), спрямо които инерчният момент на тялото има екстремална (максимална или минимална) стойност. Например ако подхвърлим кибритена кутия (фиг. 10.11) и едновременно с това я завъртим, ще установим, че най-устойчиво е въртенето около оста 1. В този случай ако външна сила отклони паралелепипеда от това положение, в него се пораждат центробежни сили, които го връщат обратно в изходното положение (това е свързано с максималния инерчен момент, който е мярка за инертността на въртящите се тела). При въртене на тялото около оста 3 то е устойчиво само при отсъствие на външно въздействие.



Фиг. 10.11

При наличие на външна сила, например силата на опъване на нишката, към която е закачено въртящото се тяло, устойчиво е само въртенето около главната централна ос, спрямо която инерчният момент на тялото има максимална стойност. Това се потвърждава от демонстрационни опити, представени на фиг. 10.12.

Верижка (а), диск (б) и тънка пръчка (в) се завързват с нишка за оста на центробежна машина. На фигурата е показано положението на телата, когато машината се върти с голяма ъглова скорост. Всяко от телата се върти около свободната си ос, спрямо която инерчният му момент е максимален.

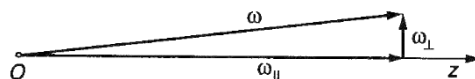


Фиг. 10.12

8.3. Жироскоп

Симетричен жироскоп се нарича ротационно тяло, което се върти около неподвижна точка O (в общия случай точка O може да не съвпада с центъра на масите C на тялото).

Оста на симетрия на тялото се нарича **ос на жироскопа**. Моментната стойност на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ може да се разложи на две компоненти: едната успоредна, а другата – перпендикулярна на оста на жироскопа z (фиг. 10.13)



Фиг. 10.13

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp} \quad 10.37$$

Ако $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$, можем да пренебрегнем перпендикулярната компонента $\omega_{\perp}$ на ъгловата скорост и да смятаме, че векторът $\vec{\omega}$ винаги е насочен по оста z (за жироскопите, които се използват в техниката, $\omega_{\parallel}$ е стотици хиляди пъти по-голяма от $\omega_{\perp}$). Тогава съгласно с уравнение (10.34) моментът на импулса

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}_{\parallel} + I_x \vec{\omega}_{\perp} \approx I_z \vec{\omega}_{\parallel} \approx I_z \vec{\omega} \quad 10.38$$

също е насочен по оста z . Следователно, в рамките на направеното приближение, за да изследваме как се изменя направлението на оста на жироскопа, е достатъчно да определим изменението на посоката на вектора $\vec{L}$ под действие на въртящите моменти на приложените към жироскопа сили. Когато на жироскопа не действат сили (свободен жироскоп), неговият момент на импулса $\vec{L}$ не се променя и оста на жироскопа запазва неизменна ориентацията си спрямо инерциална отправна система (например отправна

система, свързана с неподвижните звезди). На това свойство на жирокопите се основават различни техни приложения: навигационни прибори като жирокомпаси и жирохоризонти, устройства за автоматично управление и стабилизация на движението на самолети (автопилот), ракети, морски съдове и др.

Да въздействаме върху оста на жирокопа за кратко време със сила $\vec{F}$, която създава въртящ момент $\vec{M}$ спрямо неподвижната точка O – фиг. 10.14. Записваме уравнението за моментите:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad 10.39$$

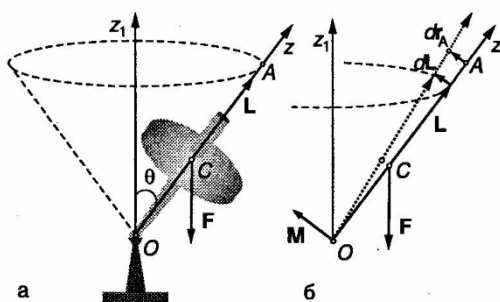
Векторът $\vec{M}$ е насочен перпендикулярно на оста на жирокопа. Да разгледаме произволна точка A от оста на жирокопа, с радиус-вектор $\vec{r}_A$ – фиг. 10.14. Съгласно с направеното приближение моментът на импулса $\vec{L}$ винаги е насочен по оста на жирокопа, т.е. векторите $\vec{r}_A$ и $\vec{L}$ са успоредни: $\vec{r}_A = c\vec{L}$, където c е константа. Скоростта на точка A е:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = c \frac{d\vec{L}}{dt} = c\vec{M} \quad 10.40$$

Следователно точка A и заедно с нея оста на жирокопа се отклоняват в направление на вектора $\vec{M}$. И така,

Ако върху оста на бързо въртящ се жирокоп действа постоянна сила, оста не се завърта по посока на силата, както би станало ако жирокопът беше неподвижен, а се отклонява по посока на въртящия момент $\vec{M}$, т.е. в перпендикулярно на силата направление.

Нека сега върху жирокопа действа постоянна сила, която по време на движението на жирокопа остава в равнината, определена от неподвижната ос z_1 , минаваща през неподвижната точка O , и от оста на жирокопа z . Такава сила е например силата на тежестта – фиг. 10.14.



Фиг. 10.14

Тъй като, както вече установихме, оста z на жирокопа не се отклонява по посока на действащата сила, ъгълът θ между осите z_1 и z остава постоянен, а скоростта на произволна точка A от оста z е перпендикулярна на равнината z_1z . Следователно оста z ще се върти около неподвижната ос z_1 с някаква ъглова скорост Ω , наречена **ъглова скорост на прецесия**. Самото движение на оста z се нарича

прецесия на жирокопа. Точка A от оста z се движи по окръжност със същата ъглова скорост Ω . Линейната и ъгловата скорост на точка A са свързани със зависимостта:

$$\vec{v}_A = \vec{\Omega} \times \vec{r}_A = \vec{\Omega} \times (c\vec{L})$$

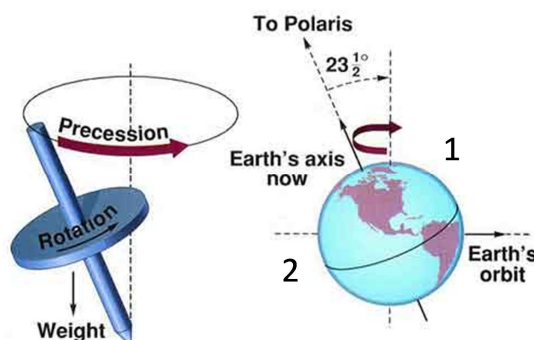
Заместваме $\vec{v}_A$ в уравнение 10.40 и след като съкратим коефициента c , получаваме:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M} \quad 10.41$$

Това е основното уравнение на елементарната прецизионна теория на жирокопа. От него може да се определи ъгловата скорост на прецесия в различни конкретни случаи.

8.4. Прецесия на Земята

Земята, която се върти около оста си с период 24 часа, може да се разглежда като жирокоп, чиято ос е наклонена спрямо равнината на земната орбита (фиг. 10.15).

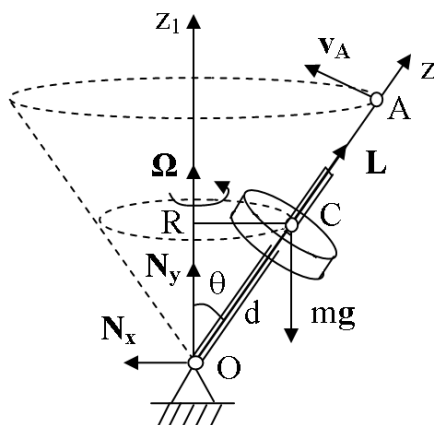


Фиг. 10.15

Ако Земята беше еднородно кълбо, резултантната гравитационна сила, с която ѝ действат Луната и Слънцето, щеше да минава през центъра на масите C на Земята и нямаше да създава въртящ момент спрямо точка C . В действителност обаче Земята е сплесната – повече маса е натрупана в екваториалната област. Затова на частта 2 (фиг. 10.15), която е по-близо до Слънцето, действа по-голяма сила, отколкото на по-отдалечената част 1. Резултантната от двете сили не минава през центъра на масите на Земята и създава въртящ момент, чиято посока е показана на фиг. 10.15. Под негово действие Земята извършва бавна прецесия с период около 25800 години. Луната, която е по-близо до Земята, оказва по-силно влияние върху прецесията, отколкото Слънцето. В резултат на прецесията се изменя времето от годината, когато определена звезда се вижда на дадено място на небосклона. За 2000 години това време се отмества с един месец. Например след 12900 години зимата ще се смени с лятото.

8.5. Нутация

Ако наблюдаваме внимателно движението на жирокоп, ще установим, че освен описване на кръгов конус с ъгъл θ (прецесия), оста на жирокопа извършва още едно движение – периодично отклонение във вертикално направление, при което ъгълът на наклона θ на оста се изменя в определени граници. Такова движение се нарича **нутация**. Нутацията се обяснява от точната теория на жирокопа. Ще се ограничим с качествено разглеждане на това явление. Нека в началния момент жирокопът е завъртян около оста си, която се придържа неподвижно под ъгъл θ_0 спрямо вертикалата. Освобождаваме оста. Моментът на салта на тежестта е насочен хоризонтално. Следователно вертикалната компонента на момента на импулса на жирокопа не може да се изменя ($L \cos \theta_0 = \text{const}$). Когато жирокопът започне прецесия, центърът на масите му се движи с ъглова скорост Ω по окръжност с радиус R . На това движение на центъра на масите съответства момент на импулса $L_C = \Omega I_C = \Omega m R^2$, който е насочен вертикално нагоре. За да не се измени вертикалната компонента на пълния импулс на системата, т.е. за да се изпълнява равенството $L \cos \theta + \Omega m R^2 = L \cos \theta_0 = \text{const}$, трябва оста на жирокопа, а заедно с нея и център на масите, да се спускат надолу (ъгълът θ нараства). Това означава, че в началния момент силата на нормална реакция N_y в опорната точка O (фиг. 10.16) е по-малка от силата на тежестта mg .



Фиг. 10.16

Когато ъгълът θ нараства, силата N_y също нараства и става по-голяма от mg . Центърът на масите достига някакво най-ниско положение, след което започва да се издига нагоре, при което издигане силата N_y намалява, т.е. центърът на масите и оста на жирокопа извършват трептене във вертикално направление (нутация). Едновременно с това оста на жирокопа описва кръгов конус около вертикалната ос, минаваща през неподвижната точка на жирокопа (прецесия). Траекторията на центъра на масите при нутация зависи от началните условия. Нутацията може да се избегне, ако на жирокопа се даде начален тласък, така че той да получи допълнителен момент на импулса, равен на момента на импулса на кръговото движение на центъра на масите при прецесия. Такава прецесия (без нутация) се нарича **регулярна прецесия**.