ТЕМА 13. Механични трептения

1. Хармонично трептене. Основни характеристики на хармоничното трептене

1.1. Понятие за равновесие и трептене

Когато векторната сума от всички сили, които действат на една материална точка, е нула и същевременно материалната точка е в покой, казваме, че материалната точка се намира в състояние (положение, точка) на механично равновесие.

Състоянието на механично равновесие може да е ***устойчиво***, ***неустойчиво*** или ***безразлично***.

Ако малко отклонение от положението на равновесие води до възникване на сили, които още повече отклоняват материалната точка от равновесното положение, равновесието е неустойчиво.

Когато при малко отклонение от равновесното положение възникват сили, които връщат материалната точка в равновесното положение, равновесното положение се нарича устойчиво.

Ако при произволно отклонение от положението на равновесие сумата от силите остава нула, равновесието се нарича безразлично.

Ако материална точка, намираща се в състояние на устойчиво равновесие, се отклони малко от това състояние и после се пусне да се движи само под действие на силите, които обуславят състоянието на равновесие, материалната точка започва да извършва периодично движение, което се състои в редуване на връщане и отклонение в противоположни посоки от точката на равновесие.

Периодично движение на материална точка около точка на устойчиво равновесие се нарича трептене.

Примери за трептене са: движението на тежест, окачена на пружина, люлеенето на махало и много други.

Във физиката понятието трептене има по-широк смисъл. Трептене представляват не само посочените механични движения около равновесно положение, а също така всички процеси, които се характеризират с периодично изменящи се във времето физични величини (например електромагнитните трептения).

1.2. Видове трептения

Трептенията, които се срещат в природата, се класифицират по различен начин.

1) В зависимост от природата им различаваме ***механични***, ***електромагнитни***, ***електромеханични*** трептения и др.

При механичните трептения се изменя положението на тялото в пространството. При електромагнитните трептения се изменя интензитетът на електричното и на магнитното поле.

2) Според характера на въздействието съществуват:

А) Собствени (или свободни) трептения

Трептения, които се извършват без непрекъснато добавяне на енергия в системата от вън, се наричат собствени трептения.

Б) Принудени трептения

Трептения, които се извършват при наличието на външно, периодично изменящо се с времето въздействие, се наричат принудени трептения.

В) Автотрептения

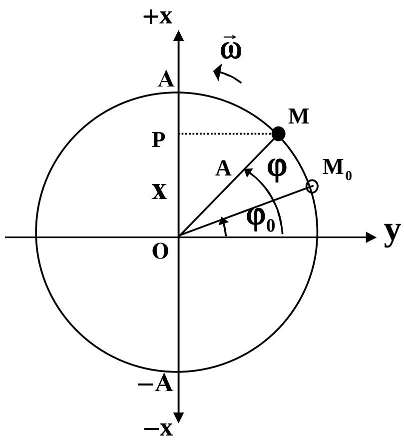
Собствени трептения, които не затихват в система с дисипативни сили поради това, че в системата постъпва допълнително енергия, се наричат автотрептения.

Г) Параметрични трептения

Трептения, при които външното въздействие не предизвиква трептене на цялата система, а само периодична промяна на някакъв неин параметър, се наричат параметрични трептения.

1.3. Кинематика на хармоничните трептения

Да разгледаме един пример за движение, което представлява трептене. Ако материална точка ***M*** се движи равномерно по окръжност с радиус ***A***, то нейната ортогонална проекция ***P*** върху някой от диаметрите на окръжността извършва трептене – фиг. 13. 1.



Фиг. 13. 1

Ако използваме декартова координатна система с начало ***O***, в центъра на окръжността и разгледаме проекцията ***P*** на материалната точка ***M*** върху оста ***x***, ординатата на тази проекция в даден момент е:

$$x(t) = A\sin\varphi(t) \qquad (13.1)$$

където $\varphi(t)$ е полярния ъгъл между радиус вектора на материалната точка и оста ***y***. Този ъгъл се променя с времето по закона:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \qquad (13.2)$$

където φ_0 е полярния ъгъл в началния момент време $t = 0$, а ω_0 – ъгловата скорост. Следователно координатата на проекцията ***P*** върху оста ***x*** се изменя с времето по закона:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (13.3)$$

Движение, което се извършва по синусов закон, изразяващ се със закона $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ се нарича хармонично трептене.

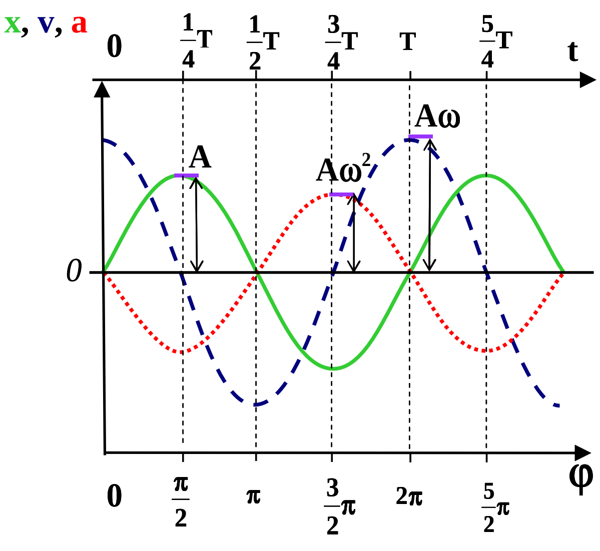
Величините, които участват във формулата се наричат: ***x – отклонение от равновесното положение*** или ***елонгация***; ***A – амплитуда*** и представлява максималната абсолютна стойност на отклонението от положението на равновесие; $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ – величината, която стои под знака на синуса се нарича ***фаза*** на трептенето в момента ***t***; φ_0 ***– начална фаза*** и ω_0 ***– собствена кръгова честота***.

Хармоничното трептене е периодично движение и се характеризира с ***период T*** и ***честота ν***, които са свързани с кръговата честота по познатите от въпроса за равномерно движение по окръжност формули: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $\nu = \frac{1}{T}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

Скоростта и ускорението при хармоничното трептене се получават от закона за движението чрез последователно диференциране:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \boldsymbol{cos}(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \boldsymbol{sin}\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (13.4)$$

$$a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -A\omega_0^2 \boldsymbol{sin}(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \boldsymbol{sin}(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \qquad (13.5)$$



Фиг. 13.2

Формула (13.4) показва, че скоростта на точката, както и елонгацията, се изменя с времето по хармоничен закон, но фазата ú се различава с $\frac{\pi}{2}$ от тази на елонгацията. В момента, когато отместването е равно на нула, скоростта на точката е максимална. Ускорението също се изменя по хармоничен закон. Неговата фаза се отличава от тази на отместването с π. Зависимостите на отклонението, скоростта и ускорението на хармоничното трептене от времето и фазата са представени на фиг. 13.2.

1.4.Динамика на хармоничното трептене

Да сравним закона за движението при хармонично трептене (13.3) и закона за ускорението (13.5). Вижда се, че ускорението ***a*** е свързано с отклонението ***x*** по формулата:

$$a = -\omega_0^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad 13.6$$

Сега да заместим ускорението във втория принцип да динамиката:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx \qquad 13.7$$

При последното преобразование въвеждаме ново означение $m\omega_0^2 = k$ за произведението от масата и квадрата на ъгловата скорост, което произведение играе роля на положителен коефициент на пропорционалност между силата и отклонението.

Така виждаме, че силата, която действа върху материална точка, извършваща хармонично трептене, е пропорционална на отклонението от равновесното положение и има посока противоположна (поради знака минус) на това отклонение:

$$F = -kx \qquad 13.8$$

Сила, действаща по този начин се нарича ***квазиеластична сила***. Това е сила, която при всяко отклонение от равновесното положение действа така, че да върне материалната точка в положението на равновесие. Следователно, имаме положение на устойчиво равновесие и хармоничното трептене е движение около положение на ***устойчиво равновесие, т.е. представлява трептене.***

От формула (13.7) е ясно, че кръговата честота може да се представи във вида:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 13.9$$

Следователно останалите характеристики на трептенето – период и честота са свързани с динамичните параметри чрез равенствата:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 13.9$$

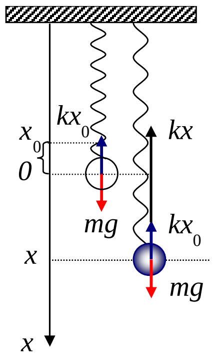
2. Трептящи системи

При отклонение на редица механични системи от равновесното им положение възникват връщащи сили и те извършват трептения. В най-простите случаи движението на системата е с една степен на свобода, т.е. описва се само с една координата – например отклонението **x**. Обикновено само при малки отклонения трептенията са хармонични. При по-големи отклонения връщащите сили престават да се изменят по линеен закон и движението не се описва с уравнението (13.6) на хармоничния осцилтор Такива трептения се наричат ***анхармонични***.

2.1. Пружинно махало

Система от тяло с маса m, свързано с безтегловна пружина, се нарича пружинно махало.

Нека разгледаме вертикално пружинно махало – фиг.13.3.



Фиг. 13.3

В равновесното положение силата на тежестта $\vec{G}$ се уравновесява от силата на еластичност $\vec{F} = k\vec{x}_0$, възникваща при деформация на пружината. Ако външна сила изведе топчето от равновесното положение ($x = 0$) и го отмести на някакво разстояние ($x \neq 0$), махалото започва да извършва хармонични трептения под действие на равнодействащата сила на $\vec{G}$ и $\vec{F} = -k(\vec{x}_0 + \vec{x})$, която се стреми да го върне отново в равновесното положение. Тази сила е $\vec{F} = -k\vec{x}$. Тогава уравнението за движение на теглилката получава вида:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\text{, или } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

където сме положили $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Отклонението ***x*** на пружинното махало удовлетворява уравнението на хармоничния осцилатор (13.6), което означава че движението на махалото е хармонично трептене с кръгова честота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad 13.10$$

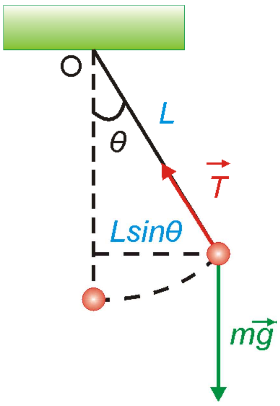
Следователно при вертикално отклонение на теглилката от равновесното ѝ положение възникват хармонични трептения, чиято кръгова честота се определя от масата

m на теглилката и коефициента на еластичност k на пружината. Връщащата сила се поражда от взаимодействието на теглилката и пружината. Тя е вътрешна сила за системата теглилка-пружина и по своята природа е сила на еластичност.

2.2. Математично махало

Малко топче с маса m, закачено на достатъчно дълга тънка неразтеглива нишка с дължина L, се нарича математично махало.

Дължината L на нишката е достатъчна, когато е много по-голяма от радиуса на топчето. Ако отклоним топчето от равновесното му положение на ъгъл θ, върху него действат силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$ и силата на опъване на нишката $\vec{T}$. Резултантната на тези две сили предизвиква въртене на топчето около точката на окачване O – фиг. 13.4.



Фиг. 13.4

Записваме уравнението за въртене на топчето около ос, минаваща през точката на окачване O и перпендикулярна на равнината на чертежа.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -M \,, \qquad (13.11)$$

където $I = mL^2$ е инерчният момент на топчето спрямо оста на въртене, а $M = mgL\sin\theta$ е въртящия момент на силата на тежестта. Силата на опъване на нишката не създава въртящ момент, защото нейното рамо е нула. Знакът „-„ в уравнение 13.11 показва, че въртящият момент се стреми да върне махалото в равновесното му положение, т.е. когато махалото е отклонено с посока, обратна на посоката на движение на часовата стрелка, въртящият момент е по посока на часовата стрелка и обратно. След заместване на ***I*** и ***M*** в уравнение (13.11) се получава:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \,, \qquad (13.12)$$

Уравнение (13.12) се различава от уравнението на хармоничния осцилатор. Ако обаче ъглите на отклонение са малки, тогава с приближение може да се запиши $\sin\theta \approx \theta$ (ъгълът θ се измерва в радиани!) и горното уравнение получава вида:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0\,, \qquad 13.13$$

което вече е уравнение на хармоничен осцилатор. Положителният коефициент $\frac{g}{L}$ пред променливата θ (ъгълът на отклонение от равновесното положение на махалото) е равен на квадрата на кръговата честота на трептене (люлеене) на махалото $\omega_0^2=\frac{g}{L}$. Периодът на трептене на махалото е:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,, \qquad 13.14$$

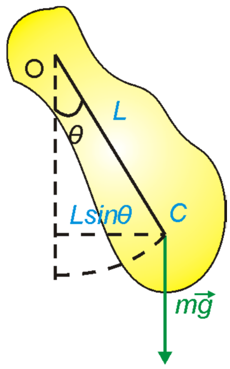
Следователно при малки отклонения от равновесното си положение математичното махало извършва хармонично трептене, като периодът на трептенията зависи само от дължината L на махалото и от земното ускорение g.

При големи амплитуди периодът на махалото е по-голям от пресметнатия по формула (13.14). Например при ъглова амплитуда от 30º нарастването на периода е около 2%. Периодът не зависи от масата ***m*** на махалото.

2.3. Физично махало

Физично махало е всяко твърдо тяло, което може да се люлее свободно (без триене) около неподвижна ос.

На фиг. 13.5 оста минава през точка ***O*** от тялото и е перпендикулярна на равнината на чертежа.



Фиг. 13.5

Да означим с ***I*** инерчния момент на махалото спрямо оста на въртене, а с ***L*** – разстоянието от оста на въртене до центъра на масите ***C*** и с ***m*** – масата на махалото. Аналогично на случая с математично махало, уравнението за въртене на тялото около оста ***O*** се записва във вида:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgLsin\theta \qquad 13.15$$

При малки ъгли на отклонение $sin\theta\approx\theta$ и се получава уравнение на хармоничен осцилатор

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\theta = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0, \tag{13.16}$$

където

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \tag{13.17}$$

е кръговата честота на трептене. Периодът на физичното махало е:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{13.18}$$

Полагаме

$$\frac{I}{mL} = L' \tag{13.19}$$

Тогава периодът на физичното махало се записва по същия начин, както при математичното махало:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} \tag{13.20}$$

Величината L' се нарича приведена дължина на физичното махало. Тя е равна на дължината на математично махало, което има същия период, както даденото физично махало.

Зависимостта на периода на махалото от дължината му играе съществена роля при движението на хората и животните. Например човек ходи почти с опънати крака, които при движението извършват люлеене. Усилието е минимално, когато скоростта приблизително съответства на свободните люлеения на краката, разглеждани като физични махала – времето за една крачка е от порядъка на полупериода на махалото. Когато искаме да увеличим скоростта, удължаваме крачката (амплитудата на люлеене), при което периодът почти не се изменя. Увеличението на честотата на крачките изисква значителни усилия. Затова при бягане краката се свиват, което води до намаляване на приведената им дължина. Намалява и периодът на свободното свободните люлеения на краката, което улеснява движението с по-голяма скорост (честотата на крачките). Същото се отнася и за ръцете, които при бягане са свити в противофаза спрямо краката.

3. Енергия на хармоничното трептене

В разгледаните примери хармоничните трептения възникват в резултат на еднократно отклонение на трептящото тяло от началното състояние на равновесие и в отсъствие на външни сили. Такива трептения се наричат ***свободни***. Свободните хармонични трептения се съпътстват от периодични превръщания на кинетичната енергия на трептящите тела в потенциална енергия на взаимодействие и обратно. Да разгледаме тези превръщания при пружинното махало. Допускаме, че топчето и пружината се една затворена система, в която действа еластична сила с големина F. От дефиниционното равенство на еластичната сила следва, че тя е консервативна сила (нейната работа по затворен контур е равна на нула). Потенциалната енергия на пружинното махало е:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \qquad 13.21$$

Заместваме израза (13.3) за $\boldsymbol{x}$ и получаваме:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\boldsymbol{sin}^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad 13.22$$

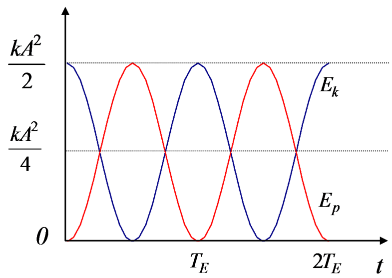
Кинетичната енергия на махалото в произволен момент от време ще получим ще получим като заместим израза за скоростта (13.4) във формулата

$$E_k = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}kA^2\boldsymbol{cos}^2(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad 13.23$$

Пълната енергия на махалото е сума от неговата кинетична и потенциална енергия

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \boldsymbol{const} \qquad 13.24$$

Получената формула показва, че пълната енергия е пропорционална на квадрата на амплитудата на трептенията.



Фиг. 13.6

Превръщането на енергията се извършва в съответствие със закона за запазване на механичната енергия в консервативна система. При движението на махалото надолу или нагоре неговата потенциална енергия се увеличава, а кинетичната намалява. В точката с максимално отместване потенциалната му енергия има максимална стойност и е равна на пълната енергия, а кинетичната енергия е равна на нула. Когато махалото преминава през равновесното положение, неговата потенциална енергия става равна на нула, а кинетичната придобива максимална стойност, равна на пълната енергия. Измененията на потенциалната и кинетичната енергия с течение на времето са показани на фиг. 13.6.

4. Събиране на хармонични трептения

4.1.Принцип на суперпозицията

Досега разглеждахме прости хармонични трептения, които се извършват под действието само на една връщаща сила. Как ще се движи материалната точка, ако при отклоняване от равновесното й положение възникват две или повече връщащи сили? Отговор на този въпрос дава принципът на суперпозицията на трептенията:

Ако на една материална точка действат няколко връщащи сили, тя извършва едновременно толкова механични трептения, колкото е броя на връщащите сили.

Всяко трептене е независимо от останалите – извършва се под действие на определена сила, така както би се извършвало, ако останалите сили не действаха.

Принципът на супепозицията е следствие от линейността на диференциалното уравнение (13.6), което описва хармоничното трептене. В него променливата $\boldsymbol{x}$ и нейната втора производна участват на първа степен. Ако трептенето е анхармонично, т.е. ако връщащите сили съдържат събираеми, пропорционални на $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{x^3}$ и т.н., уравнението, описващо това трептене, е нелинейно и принципът на суперпозицията престава да е в сила. Това означава, че две нелинейни трептения не са независими, а взаимно си влияят.

При наслагването на хармонични трептения с различни честоти, посоки, амплитуди и начални фази се получава сложно движение. Ще разгледаме само три частни случая, които най-често се срещат в различни области на физиката:

- Събиране на трептения с еднаква честота и направления;
- Събиране на две трептения с еднакво направление и близки честоти;
- Събиране на две взаимноперпендикулярни трептения с еднакви честоти.

4.2.Векторни диаграми

Нека материална точка извършва в направление на оста x едновременно две прости хармонични трептения с еднаква кръгова честота ω_0.

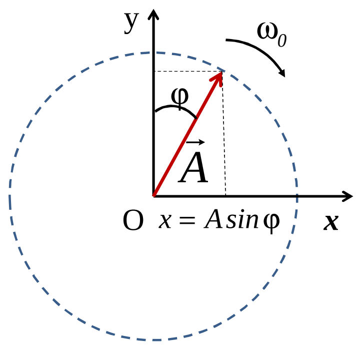
$$x_1 = A_1 sin(\omega_0 t + \varphi_{01}); \qquad x_2 = A_2 sin(\omega_0 t + \varphi_{02}) \qquad 13.25$$

В общия случай амплитудите и началните фази са различни. Съгласно с принципа на супепозицията отклонението $\boldsymbol{x}$ на материалната точка от равновесното ú положение в произволен момент от време $\boldsymbol{t}$ е:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\, sin(\omega_0 t + \varphi_{01}) + A_2\, sin(\omega_0 t + \varphi_{02}) \qquad 13.26$$

Съществува геометричен метод за нагледно представяне на хармоничните трептения чрез вектори, наречен ***метод на векторните диаграми***. Този метод е особено полезен когато се налага събиране на хармонични трептения, защото заменя събирането на тригонометрични функции с нагледното геометрично събиране на вектори.

Всяко хармонично трептене $x = A sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ се представя чрез вектор $\vec{A}$ с модул А, равен на амплитудата на трептене, който се върти около началото на координатната система с постоянна ъглова скорост ω_0, равна на кръговата честота на трептене – фиг. 13.7.



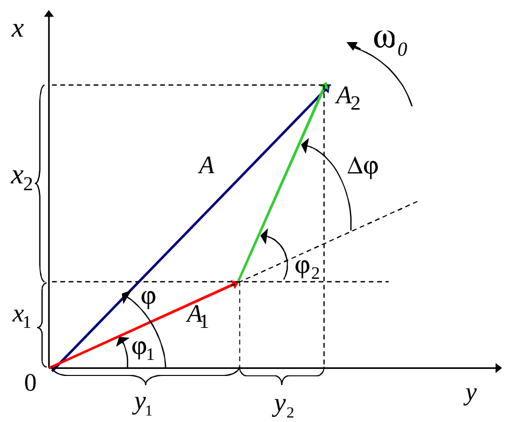
Фиг. 13.7

В даден момент $\boldsymbol{t}$ векторът $\vec{A}$ сключва с оста $\boldsymbol{y}$ ъгъл φ, равен на моментната стойност на фазата на трептене $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$. Проекцията на вектора $\vec{A}$ върху оста $\boldsymbol{x}$ е:

$$x = A\sin\varphi = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

т. е. тя се изменя с течение на времето по същия закон, както отклонението при хармоничното трептене: казваме, че проекцията на вектора $\vec{A}$ извършва хармонично трептене.

Нека материална точка извършва едновременно двете хармонични трептения, зададени аналитично с уравнение (13.26). На векторната диаграма построяваме вектор $\vec{A}_1$ с начало в началото О на координатната система, който сключва ъгъл $\varphi_1(t) = \omega_0 t + \varphi_{01}$ с оста y (фиг. 13.8).



Фиг. 13.8

От края на вектора $\vec{A}_1$ построяваме втори вектор $\vec{A}_2$, сключващ ъгъл $\varphi_2(t) = \omega_0 t + \varphi_{02}$ с оста y. Така двете трептения са представени с вектори, чиито модули $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$ са равни на амплитудите на трептене. Двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост ω_0 около началото О, която е равна на кръговата честота на трептене. Поради това ъгълът между тях $\Delta\varphi$ не се променя с течение на времето. Той е равен на разлиакта в началните фази на двете трептения:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Следователно сумата от двата вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ е вектор с постоянен модул, който се върти със същата ъглова скорост ω_0. Проекцията на вектора $\vec{A}$ върху оста $\boldsymbol{x}$ се изразява с уравнение (13.26). От тук следва изводът, че сумата от две хармонични трептения с еднакви кръгови честоти ω_0, които се извършват в едно и също направление, е хармонично трептене със същата кръгова честота ω_0. На векторната диаграма това резултатно трептене се представя с вектор $\vec{A}$, равен на геометричната сума от векторите, изразяващи отделните трептения. Фазата на резултатното трептене е равна на ъгъла φ, който векторът $\vec{A}$ сключва с оста y. Амплитудата на трептене е равна на модула на вектора $\vec{A}$ и може да се определи от триъгълника, образуван от трите вектора – например с помощта на косинусова теорема.

4.3.Биене

Ще разгледаме движението на материална точка, която извършва едновременно в едно и също направление две хармонични трептения с близки по големина кръгови честоти, съответно равни на ω и $\omega+\Delta\omega$, при което $\Delta\omega << \omega$. Резултатното движение може да се разглежда като трептене с пулсираща амплитуда, наречено ***биене***. Ще разгледаме частния случай, когато двете трептения имат еднакви амплитуди и начални фази. В този случай началният момент $t = 0$ може да се избере така, че началните фази да са равни на нула: $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$. ТогаваС

$$x = x_1 + x_2 = A sin\,\omega t + A sin(\omega + \Delta\omega)t \qquad 13.27$$

С помощта на тригонометричното тъждество

$$sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

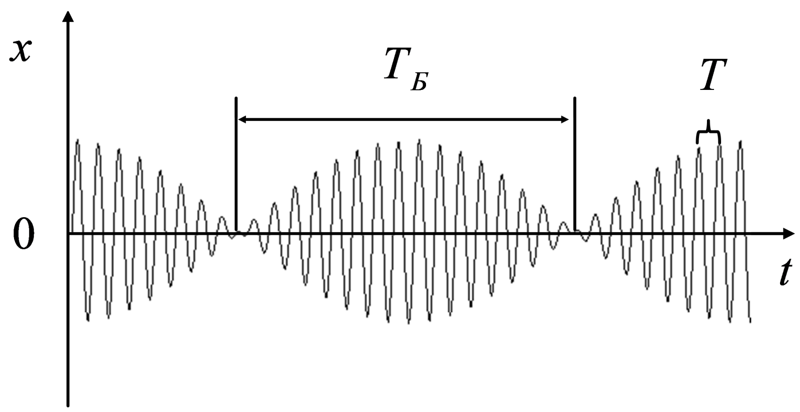
преобразуваме уравнение (13.27) и получаваме:

$$x = 2A cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) sin\,\omega t \qquad 13.27$$

където в аргумента на функцията sin сме пренебрегнали члена $\frac{\Delta\omega t}{2}$, който е много по-малък от ωt. Тъй като $\Delta\omega << \omega$, функцията $cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ се изменя много по-бавно от $sin\,\omega t$. Затова движението, което се описва от уравнение (13.27), може да се разглежда като хармонично трептене $x = A' sin\,\omega t$ с кръгова честота ω и пулсираща амплитуда

$$A' = 2A\left|cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\right| \qquad 13.28$$

която се изменя с течение на времето също по хармоничен закон, но много по-бавно: за времето на един цикъл на трептене с кръгова честота ω изменението на амплитудата е много малко. На фиг. 13.9 са показани графиките на функциите $x(t)$ и A' при биене.



Фиг. 13.9

Времето между два последователни максимума (минимума) на амплитудата A' се нарича период на биене $\boldsymbol{T_Б}$. Периодът на биене се определя от уравнението (13.28)

$$\frac{\Delta\omega T_Б}{2} = \pi, \quad T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad 13.29$$

Разликата $\Delta\omega$ ***в кръговите честоти между двете трептения се нарича кръгова честота на биене.***

4.4.Събиране на две трептения с еднакви честоти, извършващи се във взаимно перпендикулярни направления

Да разгледаме материална точка, която извършва едновременно две хармонични трептения с еднакви честоти в две взаимно перпендикулярни направления: по оста $\boldsymbol{x}$ и по оста $\boldsymbol{y}$ на правоъгълна координатна система, чието начало $\boldsymbol{O}$ съвпада с равновесното положение на материалната точка. Избираме началният момент $t = 0$ така, че началната фаза на едното трептене да е нула. Тогава

$$x = A\sin\omega t, \quad y = B\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad 13.30$$

където A и B са амплитудите на двете трептения, а φ_0 е фазовата разлика между тях. Уравнения (13.30) могат да бъдат написани във вида:

$$\frac{x}{A} = \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$\frac{y}{B} = \sin(\omega t + \varphi_0) = \sin\omega t\cos\varphi_0 + \cos\omega t\sin\varphi_0$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi_0 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\varphi_0$$

$$\frac{x}{A}\cos\varphi_0 + \frac{y}{B} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}\,\sin\varphi_0$$

Вдигаме на квадрат двете страни на горното равенство:

$$\frac{x^2}{A^2}\cos^2\varphi_0 - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)\sin^2\varphi_0$$

Така получаваме уравнението на траекторията на резултатното трептене, получено от наслагванията на двете трептения:

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0 \qquad 13.31$$

Тази траектория е елипса. Ориентацията на осите на елипсата и нейните размери зависят от амплитудите $\boldsymbol{A}$ и B на изходните трептения и разликата между фазите на изходните трептения φ_0. Казваме, че трептенето е ***елиптично поляризирано***.

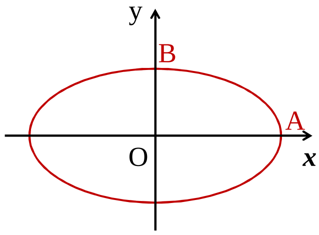
Да разгледаме следните частни случаи:

1) $\varphi_0 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2...$

Тогава

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1 \qquad 13.32$$

Уравнение (3.32) е уравнение на елипса, осите на която лежат на координатните оси (направленията на изходните трептения), а полуосите са равни на амплитудите на изходните трептения – фиг. 13.10.



Фиг. 13.10

При $A=B$ траекторията е окръжност - $x^2+y^2=A^2$ с радиус А и център в началото на координатната система и трептенето е ***кръгово поляризирано***. Следователно

Равномерното движение на материална точка по окръжност може да се разглежда като сума на две хармонични трептения с еднаква кръгова честота.

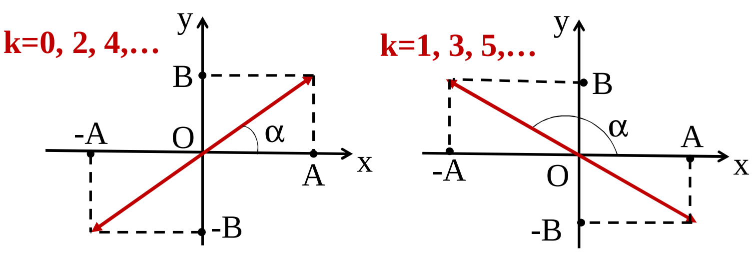
Трептенията се извършват в две взаимно перпендикулярни направления, имат еднакви амплитуди, равни на радиуса на окръжността, и фазова ралика $\frac{\pi}{2}$. При $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ точката ще се движи по посока на движението на часовниковата стрелка, а при $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$, точката ще се движи в посока обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка.

2) При $\varphi_0=k\pi, k=0,1,2...$

Тогава

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{B}{A}x \qquad 13.33$$

Траекторията на резултатното трепптене е отсечка (изродена елипса), лежаща на права, която сключва с положителната посока на оста х ъгъл $\alpha=arctg\left(\frac{B}{A}\cos k\pi\right)$ - фиг. 13.11. Честотата на трептенето е равна на честотата на изходните трептения, а амплитудата му е равна на $\sqrt{A^2+B^2}$. Такова трептене е ***линейно поляризирано***.

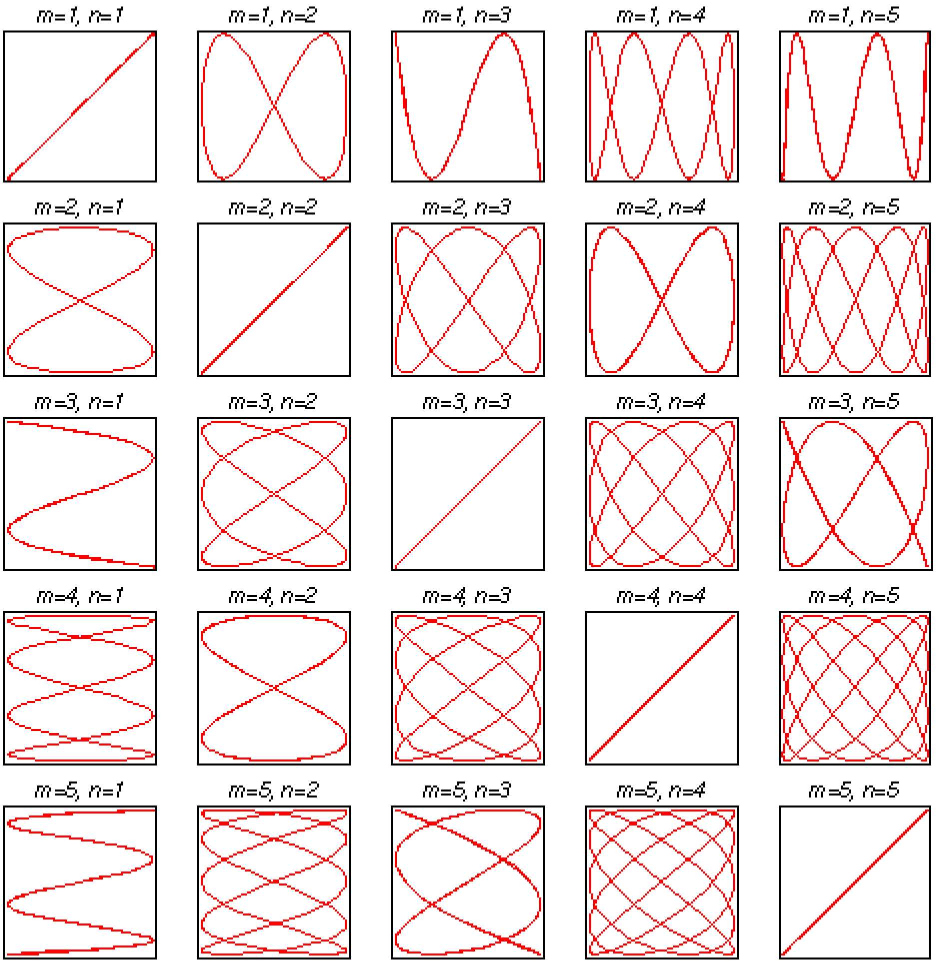


Фиг. 13.11

3) Ако двете трептения са с различни кръгови честоти, при наслагването им се получават трептения с най различни траектории, така наречените ***фигури на Лисажу*** – фиг. 13.12. Фигура на Лисажу е крива, която представлява геометричното място на резултантното преместване на точка, в която се наслагват две или повече периодични движения, най-често под прав ъгъл. Изразена формално, фигурата на Лисажу е графиката, отговаряща на системата параметрични уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x = A\sin(at+\delta) \\ y = B\sin(bt) \end{array} \right. \tag{13.34}$$

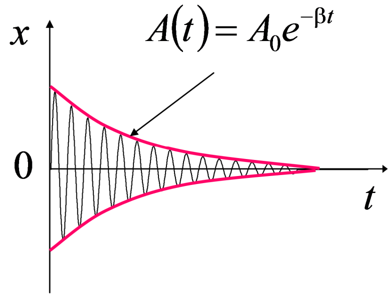
която описва наслагващи се хармонични трептения. Как ще изглежда фигурата на Лисажу зависи в много голяма степен от съотношението ***a/b*** – фиг. 13.12.



Фиг. 13.12

5. Затихващи трептения

Когато разглеждахме трептенията на пружинното махало казахме, че превръщанията на енергията се извършват в съответствие със закона за запазване на механичната енергия. Това е възможно само при предположение, че системата е затворена и консервативна. Свободните трептения в този случай се наричат ***незатихващи трептения***. Такива трептения са възможни само в системи, където се пренебрегват силите на триене и съпротивление. Следователно незатихващите трептения са идеализирани. Те се характеризират с амплитуда, която се запазва постоянна с времето, и могат да продължават неограничено дълго време. Свободните трептения, които се извършват в реалните системи, се наричат ***затихващи трептения***. Поради действащите сили на триене амплитудата на тези трептения с течение на времето намалява и те постепенно затихват (фиг. 13.13).



Фиг. 13.13

Да допуснем, че върху тялото, извършващо хармонични трептения, действат две сили: квазиеластична сила $\vec{F}_1$, пропорционална на отместването му от равновесното положение, и сила на триене $\vec{F}_2$, пропорционална на неговата скорост v

$$F_1 = -kx = -k\frac{d^2x}{dt^2} \qquad F_2 = -rv = -r\frac{dx}{dt}$$

Знакът „-„ в силата на триене показва, че нейната посока е винаги противоположна на посоката на скоростта на движение. Коефициентът r е постоянна величина, характеризираща съпротивлението на средата, и се нарича ***коефициент на триене***. Тогава прилагайки втория принцип на механиката, получаваме:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\,v \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad 13.35$$

Изразът (13.35) представлява диференциално уравнение на затихващо трептене. Заместваме $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, където ω_0 е собствената честота на трептящото тяло, т.е. тази честота, което то би имало в отсъствие на сили на съпротивление. Отношението $\frac{r}{m}$ заместваме с 2β, където величината β се нарича ***коефициент на затихване*** и характеризира бързината за затихване на трептенията в разглежданата система. В такъв случай уравнението (13.35) добива вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad 13.35$$

Решението на уравнение (13.35) е от вида:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\boldsymbol{sin}(\omega t + \varphi_0)} \qquad 13.36$$

където

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad 13.37$$

се нарича ***честота на затихващите трептения***.

Когато на трептящото тяло освен квазиеластична сила действа и сила на триене, неговото движение е трепетливо, но не и хармонично. Величините, характеризиращи затихващите трептения, се изменят непрекъснато – те не се повтарят през равни интервали, както при незатихващите трептения. Затихващите трептения не са периодични движения. Честотата на трептене ω в този случай зависи не само от k и m, а и от коефициента на затихване β.

Характерна особеност на затихващите трептения е постепенното намаляване на амплитудата с времето:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \qquad 13.38$$

Отношението на две съседни амплитуди е постоянна величина

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \ldots = e^{\beta T}$$

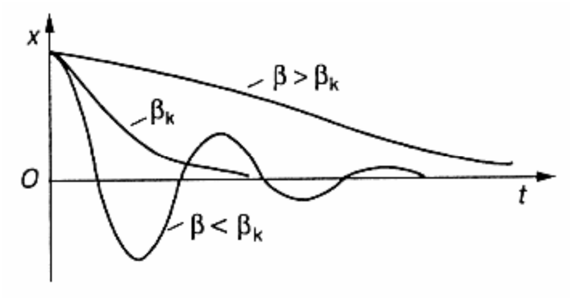
Натуралният логаритъм на горното отношение се нарича ***логаритмичен декремент на затихването*** и се означава с δ:

$$\delta = ln\, e^{\beta T} = \beta T \qquad 13.39$$

От формула 13.37 се вижда, че честотата на затихващите трептения ω е по-малка от собствената честота на незатихващите. Това е напълно логично, тъй като наличието на сили на съпротивление с системата намалява скоростта на движение на трептящото тяло. Вследствие на това периода се увеличава и предизвиква намаляване на кръговата честота. Честотата на трептенията става равна на нула при $\beta = \beta_k = \omega_0$. При големи стойности на коефициента на затихване $\beta > \beta_k$ в системата изобщо не възникват трептения – тя се връща в равновесното си положение чрез апериодично движение.

Коефициентът на затихване $\beta_k = \omega_0$, при който затихващото трептене преминава в апериодично движение, се нарича критичен коефициент на затихване.

Доказва се, че движението се прекратява най-бързо и системата се връща в равновесното си положение при критичен коефициент на затихване – фиг. 13.14.



Фиг. 13.14

За количествена характеристика на бързината, с която трептящата система губи своята енергия в резултат на действието на силите на триене, се използва величината доброкачественост Q (нарича се още Q-фактор).

Доброкачествеността е равна на отношението на енергията на трептящата система в даден момент към енергията, която тя губи за един период, умножено по 2π:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} \qquad 13.40$$

Тъй като енергията е правопропорционална на квадрата на амплитудата на трептене, уравнение (13.40) може да се запиши във вида:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} \qquad 13.41$$

Заместваме амплитудата А от уравнение (13.38) и получаваме

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \qquad 13.42$$

Когато затихването е слабо, кръговата честота на затихващите трептения е приблизително равна на собствената кръгова честота. Тогава

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \;\Rightarrow\; 2\beta T \approx \frac{4\pi\beta}{\omega_0} << 1$$

Използваме приближението $1 - e^{-2\beta T} \approx 2\beta T \approx \frac{4\pi\beta}{\omega_0}$ и определяме доброкачествеността на трептяща система с малък коефициент на затихване:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} \qquad 13.43$$

Колкото по-малък е коефициента на затихване, толкова по-малки са загубите в трептящата система и е по-голяма нейната доброкачественост.

6. Принудени трептения

От всичко казано до тук е ясно, че когато в една трептяща система действат силите на триене, трептенията, които се извършват в нея, след известно време се преустановяват. По тази причина те се наричат затихващи. Ако в системата се внесе енергия отвън, която да компенсира загубите, дължащи се на силите на триене, съпротивление и др., трептенията могат да се превърнат от затихващи в незатихващи, наречени ***принудени трептения***. Принудените трептения се предизвикват от действието на външни периодично-променливи сили върху системата и се наричат още ***несвободни трептения***. Нека да разгледаме една система, в която действа външна сила, изменяща се с времето по периодичен закон:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

Силата $F(t)$ се нарича ***принуждаваща сила***. Съгласно втория принцип на Нютон получаваме

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \qquad 13.44$$

Изразът (13.44) представлява ***диференциалното уравнение на принудените трептения***. Ако заместим отношенията $\frac{k}{m}$ и $\frac{r}{m}$ с равните им и положим $\frac{F_0}{m} = f_0$, то ще придобие вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \boldsymbol{sin}(\omega t) \qquad 13.45$$

където ω_0 в честотата на собствените трептения на тялото (когато в системата не действат сили на съпротивление), а β – коефициентът на затихване (при наличие на съпротивителни сили в системата). Честотата $\boldsymbol{\omega}$ е кръговата честота на периодичната сила $F(t)$, която извършва някаква работа върху тялото. Ако посоката на тази сила е противоположна на посоката на движение на тялото, тя ще извършва отрицателна работа, или ще затруднява движението на тялото; ако посоката ú съвпада с посоката на движение на тялото, тя ще извършва положителна работа, следователно ще ускорява неговото движение. Това предизвиква трептения на тялото, които се извършват със същата честота $\boldsymbol{\omega}$, с която се изменя и външната сила. Тази честота се нарича ***честота на принудените трептения*** на тялото. Допускаме, че разликата между фазите на силата и отместването на трептящото тяло е равна на φ. В такъв случай

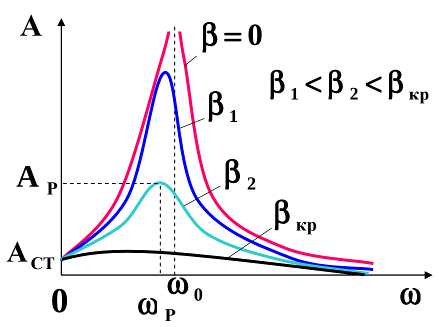
$$x = A\,sin(\omega t + \varphi) \qquad 13.46$$

След преобразования за амплитудата **A** и фазата φ на принудените трептения се получават изразите:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \qquad 13.46$$

Амплитудата на принудените трептения зависи от амплитудата и честотата на външната сила, от коефициента на затихване, собствената честота ω_0 на трептенето и от масата на трептящото тяло ($\frac{F_0}{m} = f_0$). При постоянни F_0, m и β амплитудата **A** зависи от съотношението между кръговата честота ω на външната сила и собствената честота ω_0 на свободните незатихващи трептения.

Зависимостта на амплитудата от ω при различни коефициенти на затихване е показана на фиг. 13.15.



Фиг. 13.15

Ще разгледаме някои частни случаи на формула (13.46):

а) Кръговата честота е $\omega = 0$

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = const$$

Върху тялото действа постоянна сила $F = F_0$, която го отмества от равновесното му положение на разстояние A_0. Постоянните сили не предизвикват трептения. Ако в новото си равновесно положение тялото получи еднократен тласък, то ще започне да извършва хармонични трептения със собствена честота ω_0.

б) При пренебрежимо малък коефициент на затихване ($\beta \approx 0$) амплитудата на принудените трептения расте с увеличаването на ω. Когато $\omega = \omega_0$, $A \to \infty$. При по-нататъшно увеличаване на $\beta \approx 0$ амплитудата започва да намалява и при $\omega \to \infty$ се стреми към нула. Явлението, при което амплитудата нараства силно при честота на принудените трептения $\omega \to \omega_0$, се нарича ***резонанс.***

в) При коефициент на затихване $\beta \neq 0$ амплитудата на принудените трептения зависи и от β. За да се определи условието за резонанс в този случай, трябва да се намери минимума на знаменателя във формулата (13.46). За целта е необходимо изразът под корена да се диференцира по ω и да се приравни на нула. По този начин се получава стойността на честотата ω, при която настъпва резонанс:

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad 13.47$$

Тази честота се нарича ***резонансна честота***, а стойността на амплитудата при резонансната честота – ***резонансна амплитуда***.

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad 13.48$$

Резонансните явления се проявяват при всички принудени трептения, които намират широко приложение в различни области на техниката. В акустиката резонансът се използва за анализ и усилване на звукови трептения. В радиотехниката той намира приложение във всички радиопредаватели и радиоприемници. С явлението резонанс се обясняват и много процеси от ядрената физика.