ТЕМА 9: ГРАВИТАЦИЯ

1. Закон на Нютон за всеобщото привличане

През 1687 г. Нютон обобщава резултатите от многобройните астрономически наблюдения за движението на Луната и другите планети и формулира своя закон за гравитацията. От първия принцип на механиката вече е било известно, че на Луната трябва да действа някаква сила, защото в противен случай тя би се движила праволинейно и равномерно, а не по почти кръгова орбита. Нютон стига до извода, че небесните тела взаимно се привличат със сили, имащи същата природа, както и силите, с които Земята привлича заобикалящите ни тела (например падащата от дървото ябълка). Сили на всеобщо привличане (гравитационни сили) действат между всички тела във Вселената: както между Слънцето и планетите, така и между Земята и „ябълката на Нютон“. Законът на Нютон за гравитацията гласи:

Между всеки две тела (материални точки) от Вселената действат сили на взаимно привличане, наречени гравитационни сили, чиято големина е правопропорционална на произведението от масите на телата и е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между тях.

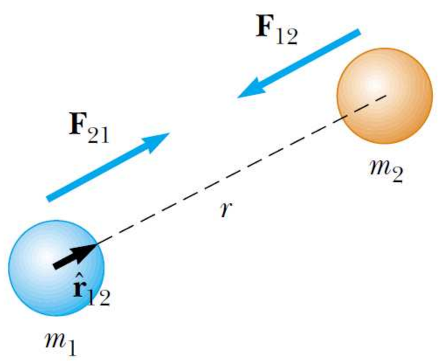
Ако телата имат маси m_1 и m_2 и разстоянието между тях е r, големината на гравитационната сила е:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (9.1)$$

където $\boldsymbol{\gamma}$ е константа, наречена ***универсална гравитационна константа***. Тя е експериментално определена и в система SI нейната стойност е:

$$\gamma = 6.673 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \qquad (9.2)$$

Законът за гравитацията може да бъде записан във векторна форма като се въведе единичен вектор $\vec{r}_{12}$ – фиг. 9.1.



Фиг. 9.1

Тъй като единичният вектор е ориентиран от частица 1 към частица 2, силата, предизвикана от частица 1 върху частица 2 е:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{r}_{12} \qquad (9.3)$$

Знакът „-„ показва, че частицата 2 се привлича към частицата 1, т.е. силата е насочена в посока, противоположна на посоката на вектора $\vec{r}_{12}$. Според третия принцип на Нютон тялото 2 също привлича тялото 1 със сила $\vec{F}_{21}$, равна по големина на силата $\vec{F}_{12}$ и насочена в противоположна посока. Така тези сили формират действие-противодействие и $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

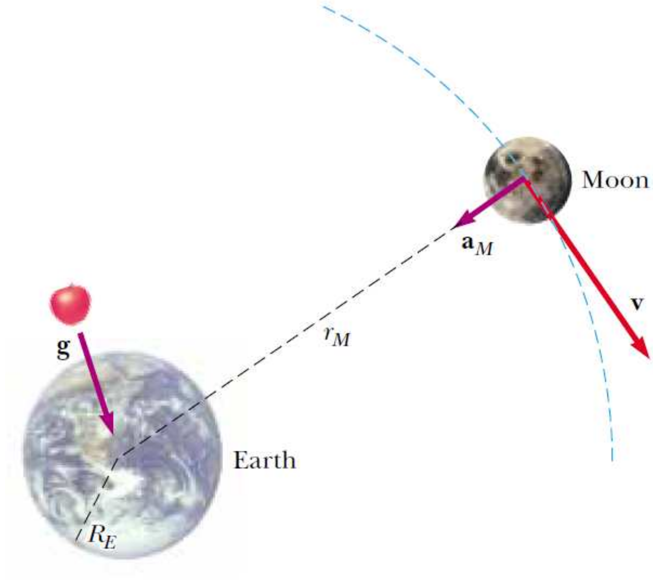
Гравитационната сила притежава следните по-важни свойства: гравитационната сила е ***полева сила*** и съществува винаги между две тела, независимо от вида на средата, която ги разделя. Тъй като силата е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между телата, тя намаля много бързо с раздалечаването на телата.

Както може да се види от зависимост (9.1), ***гравитационната сила, създавана от тяло с крайни размери и сферично симетрично разпределение на масата, извън тялото има същия вид, както сила, създадена от материална маса със същата маса и разположена в центъра на тялото***. Например силата, създавана от Земята върху тяло с маса m, намиращ се в близост до земната повърхност е:

$$F_g = \gamma \frac{M_E \cdot m}{R_E^2} \qquad (9.4)$$

където M_E и R_E са съответно масата и радиуса на Земята.

При формулирането на закона за всемирната гравитация Нютон използва следните аргументи, които подкрепят предположението, че гравитационната сила е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между телата. Той сравнява ускорението на Луната при движението по нейната орбита около Земята с ускорението на тяло, падащо близо до земната повърхност (например легендарната ябълка) – фиг. 9.2. Предполагайки, че двете ускорения имат еднакъв произход – гравитационното привличане на Земята, Нютон предполага, че ускорението на Луната спрямо Земята е пропорционално на $1/r_M^2$, където r_M е разстоянието между центровете на Земята и на Луната. Освен това ускорението на свободно падаща ябълка близо до земната повърхност е пропорционално на $1/R_A^2$, където R_A е разстоянието между центъра на Земята и ябълката. Тъй като ябълката се намира много близо до повърхността на Земята, $R_A = R_\text{E}$, R_E е радиусът на Земята. Използвайки стойностите $r_M = 3.84 \times 10^8\ m$ $R_\text{E} = 6.37 \times 10^6 m$, Нютон предсказва, че отношението между ускорението на Луната a_M и ускорението на ябълката g ще бъде:



Фиг. 9.2

$$\frac{a_M}{g} = \frac{(1/r_M)^2}{(1/R_E)^2} = \left(\frac{R_E}{r_M}\right)^2 = \left(\frac{6.37 \times 10^6 m}{3.84 \times 10^8 m}\right)^2 = 2.75 \times 10^{-4} \qquad (9.5)$$

Така, ускорението на Луната е:

$$a_M = (2.75 \times 10^{-4})(9.80\, m/s^2) = 2.70 \times 10^{-3}\, m/s^2$$

Нютон изчислява също ускорението на Луната от средното й разстояние от Земята и орбиталния й период *T=27.32 дни=2.36x10⁶s*. Така

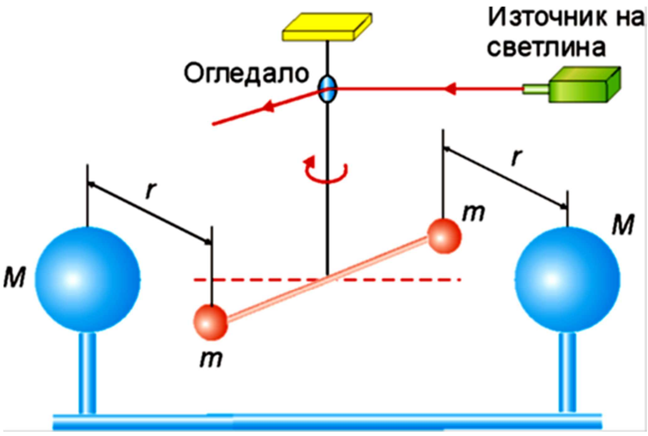
$$a_M = \omega^2 r_M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_M = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8 m)}{(2.36\text{x}106 s)^2} = 2.72 \times 10^{-3}\, m/s^2$$

Перфектното съответствие между двете стойности на ускорението на Луната са неоспоримо доказателство, че гравитационната сила е обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между взаимодействащите си тела. За да оцени ускорението на тяло, намиращо се в близост до земната повърхност, Нютон предположил, че Земята действа като тяло, чиято маса е съсредоточена в центъра му, т.е. влиянието на Земята върху външно тяло е същото, каквото би оказвала материална точка със същата маса и намираща се в центъра на Земята. Няколко години по-късно, през 1687 г., въз основа на своята пионерска работа в развитието на математическия анализ, Нютон доказва, че това предположение е в сила и е естествено следствие от закона за всемирното привличане.

От нашите наблюдения върху падащи предмети, имаме доказателства, че гравитационната сила, действаща върху даден обект, е право пропорционална на масата му. В близост до земната повърхност всички обекти, независимо от тяхната маса, падат в отсъствие на съпротивление на въздуха с едно и също ускорение g. Според втория закон на Нютон това ускорение се дава с израза $g = F_g/m$, където $\boldsymbol{m}$ е масата на падащото тяло. Ако това съотношение трябва да бъде едно и също за всички падащи предмети, то F_g трябва да бъде пропорционална на $\boldsymbol{m}$, така че масата да може да се съкрати. Ако разгледаме по-общата ситуация на гравитационната сила между всеки два обекта с маса, като например две планети, може да бъде приложен същият този аргумент , за да покаже, че гравитационната сила е пропорционална на една от масите. Тъй като можем да изберем да разглеждаме коя да е от двете маси, гравитационната сила трябва да бъде пропорционална и на двете маси на взаимодействащите си тела.

2. Определяне на гравитационната константа

Гравитационната константа γ е измерена през 1789 г. от английския физик Хенри Кавендиш. Опитната постановка е показана схематично на фиг. 9.3



Фиг. 9.3

Две еднакви топчета с маси $\boldsymbol{m}$ са закрепени на двата края на лека хоризонтална пръчка, която е окачена на вертикална нишка. Близо до топчетата се поставят две големи оловни кълба, всяко с маса $\boldsymbol{M}$. Гравитационните сили $\boldsymbol{F}$ на привличане на топчетата към оловните кълба завъртат пръчката и нишката се усуква. Като се измери ъгъла на усукване на нишката α, определя се силата $\boldsymbol{F}$ (доказва се, че големината на силата $\boldsymbol{F}$ е правопропорционална на ъгъла α). Тъй като α е малък ъгъл (около 1°), за точното му измерване се използва светлинен лъч, отразен от прикрепеното към нишката огледалце. Като са известни $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{r}$, се пресмята числената стойност на гравитационната константа от уравнение (9.1).

3. Зависимост на земното ускорение от височината

Дотук силата на тежестта $\vec{\boldsymbol{G}}$ дефинирахме като силата, която придава на телата, намиращи се близо до земната повърхност ускорени $\vec{g}$ (земно ускорение или ускорение на свободно падане). Ако пренебрегнем въртенето на Земята около собствената й ос и я приемем за инерциална отправна система:

Силата на тежестта на дадено тяло, разположено близо до земната повърхност, е равна на гравитационната сила, с която Земята привлича това тяло.

Ако приемем Земята за хомогенно кълбо с маса M_E и радиус R_E, а тялото - за материална точка с маса $\boldsymbol{m}$, която се намира близо до земната повърхност,

$$G = mg = \gamma \frac{M_E m}{R_E^2}$$

$$g = \gamma \frac{M_E}{R_E^2} \tag{9.6}$$

Или при посочените условия ***земното ускорение е еднакво за всички тела и не зависи от тяхната маса***.

Да разгледаме тяло с маса $\boldsymbol{m}$, намиращо се на височина $\boldsymbol{h}$ от повърхността на Земята, или на разстояние $\boldsymbol{r}$ от центъра на Земята, т. е. $r = R_E + h$. Големината на гравитационната сила, действаща върху тялото е

$$F_g = \gamma \frac{M_E m}{r^2} = \gamma \frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

Големината на гравитационната сила, действаща на тялото в тази позиция, е $F_g = mg$, където g е ускорението на свободно падане на телата на височина h.
Следователно

$$g = \gamma \frac{M_E}{r^2} = \gamma \frac{M_E}{(R_E + h)^2} \tag{9.7}$$

За малки височини спрямо радиуса на Земята (h≪R) земното ускорение като функция на височината $\boldsymbol{h}$ над земната повърхност се изменя по закона

$$g(h) = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \tag{9.8}$$

където $\boldsymbol{g}$ е земното ускорение на повърхността на Земята. ***Следователно земното ускорение намалява приблизително линейно при увеличаване на височината над земната повърхност***.

4. Тежка и инертна маса. Принцип на еквивалентност на масите

В динамиката масата е мярка за инертността на телата. Затова масата, която участва във втория принцип на механиката, се нарича инертна маса – $\boldsymbol{m_i}$. Гравитационните взаимодействия се характеризират с гравитационна маса – $\boldsymbol{m_g}$. Сега ще се спрем по-подробно на този въпрос, тъй като съвсем не е очевидно защо две толкова различни на пръв поглед явления – инерция и гравитация, трябва да се описват с една и съща физична величина.

Под действие на силата на тежестта $\vec{G}$ тяло с инертна маса $\boldsymbol{m_i}$ се движи с ускорение $\vec{a}$, чиято големина се определя от уравнението на втория принцип на механиката $G = m_i a$: От. друга страна, силата на тежестта е гравитационна сила, която се изразява от нютоновия закон за гравитацията $G = \gamma \frac{M m_g}{R^2}$, в който участва гравитационната маса $\boldsymbol{m_g}$ на тялото. От тези две уравнения изразяваме ускорението $\boldsymbol{a}$:

$$a = \frac{m_g}{m_i}\left(\gamma \frac{M}{R^2}\right)$$

където изразът в скобите е константа. Експериментално е установено с голяма точност, че всички тела, пуснати от една и съща точка, падат с еднаква ускорение $a=g=const$. Следователно отношението $\frac{m_g}{m_i}$ има една и съща стойност за всички тела и при подходящ избор на измерителните единици то може да се положи равно на единица, т.е. $m_i=m_g=m$.

Не съществува нито един експериментален факт, който да сочи възможни различия между гравитационната и инертната маса. Затова във физиката се формулира общ принцип, според който те са еквивалентни.

5. Закони на Кеплер

Видимото въртене на небесната сфера и видимото преместване на небесните тела създават впечатление, че Земята е в центъра на света. Този възглед е широко възприет в древността и е залегнал в основата на геоцентричната система, разработена от александрийския астроном Клавдий Птолемей през II в. пр.н.е.

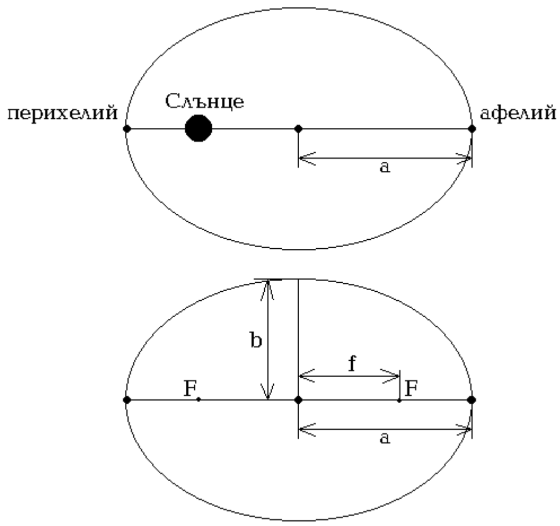
Едва през XVI век полският астроном Николай Коперник обосновал нов възглед, според който около Слънцето обикалят планетите в това число и Земята. Чрез хелиоцентричната система на света сложните заплетени планетни движения лесно се обясняват, имайки предвид положението ни на земни наблюдатели. Коперник за първи път определя относителните разстояния между планетите и Слънцето, както и периодите им на обикаляне около него.

Възприемайки възгледа на Коперник, Кеплер търси закономерностите в планетните движения. Използва точните наблюдения на Марс, правени цял живот от Тихо Брахе и извежда знаменитите си 3 закона, залегнали и днес в основите на небесната механика. Изведените по емпиричен път закони на Кеплер, по-късно намират обяснението си чрез закона за гравитацията на великия Нютон.

1. Всички планети се движат по елиптични орбити, в единия фокус на които се намира Слънцето.
2. При движението на планетите около Слънцето техните радиус-вектори описват равни площи за равни интервали от време.
3. Квадратите на периодите на обикаляне $\boldsymbol{T}$ на планетите около Слънцето се отнасят, както кубовете на големите им полуоси $\boldsymbol{a}$ до Слънцето.

5.1. Първи закон на Кеплер

Според първия закон на Кеплер движението по кръгова орбита е много частен случай на по-общата елиптична орбита. Фиг. 9.4 представя геометрията на елипсата.



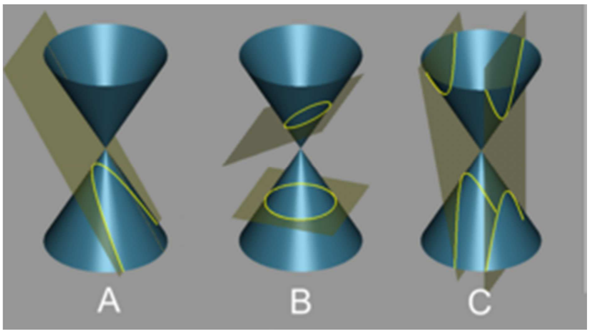
Фиг. 9.4

Елипсата има един център и 2 фокуса, f е фокусното разстояние. С a и b са обозначени най-големия и най-малкият радиус на елипсата, които се наричат ***голяма*** и съответно ***малка полуос***. По голямата ос на елипсата има две точки – ***перихелий*** и ***афелий*** – най-близката и най-далечната съответно точки на планетата до Слънцето. Ексцентрицитетът на елипсата се дава със зависимостта $e = f/a$ и описва формата на елипсата. При окръжността c=0 и ексцентрицитетът е нула.

Ексцентрицитетът на орбитите на планетите от Слънчевата система варира в широки граници. За орбитата на Земята той е 0.017, което я прави почти кръгова. От друга страна ***e*** за орбитата на Плутон е 0.25, което е най-високата стойност от всички планети. Ексцентрицитетът на орбитата на Халеевата комета е 0.97, поради което кометата описва орбита с голяма полуос много по-дълга от малката полуос. В резултат на Халеевата комета прекарва голяма част от 76-годишен период далеч от Слънцето и е невидимаи от Земята. Тя е видима с невъоръжено око само по време на една малка част на орбитата си, когато тя е близо до Слънцето.

Първият закон на Кеплер е пряк резултат от закона на Нютон за гравитационното взаимодействие. След извеждане на закона за гравитацията, Нютон обобщава законите за движение на едно тяло около друго така:

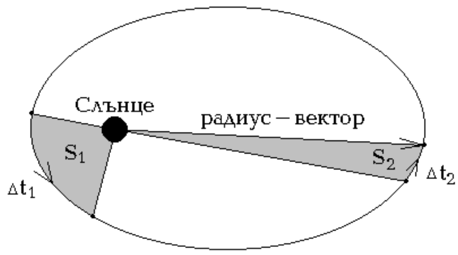
Обобщен ПЪРВИ ЗАКОН: Едно небсно тяло се движи около друго под действие на силата на привличане и това става по едно от коничните сечения: елипса, парабола, хипербола – фиг. 9.5



Фиг. 9.5

В този вид законите на Кеплер важат не само за движение на планета около звездите, но и за движението на кометите, двойните звезди и всякакъв друг вид движения, които извършват телата под действие на всеобщото привличане.

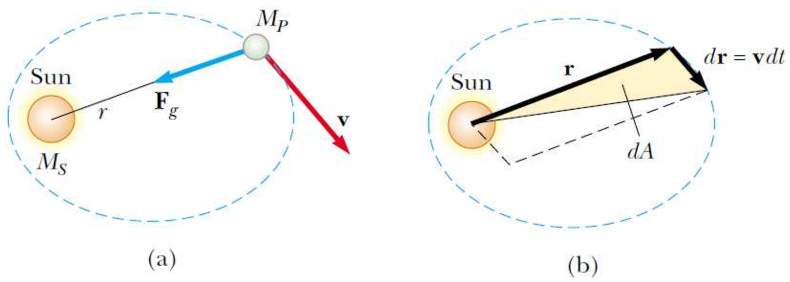
5.2. Втори закон на Кеплер



Фиг. 9.6

Законът на площните скорости, както още е известен вторият кеплеров закон означава, че планетата се движи с различна скорост в различни части от своята елипсовидна орбита. Най-бързо се движи около точката на перихелия си – най-близо до Слънцето и все по-бавно към афелия си – най-далеч от Слънцето – фиг. 9.6.

Може да се покаже, че вторият закон на Кеплер е следствие от закона за запазване на момента на импулса. Да разгледаме планета с маса ***Mp***, движеща се около Слънцето по елептична орбита – фиг. 9.7.



Фиг. 9.7

Да разглеждаме планетата като система. Ще считаме, че масата на Слънцето е толкова по-голяма от масата на планетата, че то не се движи. Гравитационната сила, действаща на планетата е централна сила, действаща винаги по направлението на радиус-вектора и насочена към Слънцето – фиг. 9.7a. Моментът на гравитационната сила е нула, тъй като $\vec{F}$ е успоредна на $\vec{r}$.

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Моментът на външните сили е равен на скоростта на изменение на момента на импулса на системата:

$$\vec{\mathrm{M}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Следователно, тъй като $\vec{\mathrm{M}} = 0$, моментът на импулса при движение на палнетата е постоянна величина:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} = const$$

Този резултат може да бъде свързан със следните геометрични разсъждения: за интервал от време ***dt*** радиус-векторът $\vec{r}$ описва площ ***dA***, равна на половинатаот площта на $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ на успоредника, формиран от векторите $\vec{r}$ и $d\vec{r}$ – фиг. 9.7b. Тъй като преместването на планетата за време ***dt*** се изразява чрез зависимостта $d\vec{r} = \vec{v}dt$, то

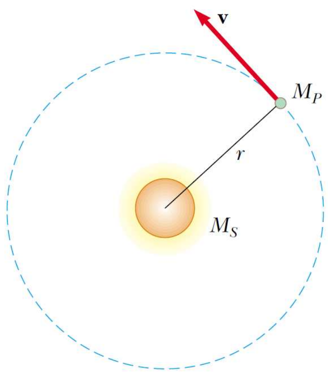
$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt| = \frac{L}{2M_p}dt \qquad (9.9)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} = const$$

където L и M_p са константи. Следователно ***радиус-векторът на планетата за равни интервали от време описва равни площи***.

5.3. Трети закон на Кеплер

Третиат закон на Кеплер може да бъде предсказан от закона за гравитацията. Да предположим, че планета с маса M_p се движи около Слънцето (масата на Слънцето означаваме с M_s) по кръгова орбита – фиг. 9.8 (орбитите на планетите от Слънчевата система с изключение на тези на Меркурий и Плутон са много близки до кръгови).



Фиг. 9.8

Гравитационната сила предизвиква центростремително ускорение и вторият принцип на механиката може да бъде записан във вида:

$$\gamma \frac{\mathrm{M}_s M_p}{r^2} = \frac{M_p v^2}{r}$$

Скоростта, с която планетата се движи по орбитата, може да се представи във вида:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

където $\boldsymbol{T}$ е периода на движение. Следователно

$$\frac{\gamma \mathrm{M}_s}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\gamma M_s}\right) r^3 = K_s r^3$$

където K_s е константа:

$$K_s = \frac{4\pi^2}{\gamma M_s} = 2.97 \times 10^{-19}\, s^2/m^3$$

Последното уравнение е валидно и за елиптични орбити, ако заместим радиуса на окръжността с голямата полуос на елипсата:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\gamma M_s}\right) \mathrm{a}^3 = K_s \mathrm{a}^3 \tag{9.10}$$

Уравнение (9.10) представлява третия закон на Кеплер. Тъй като голямата полуос на кръговата орбита е нейния радиус, уравнение (9.10) е валидно както за кръгова, така и за елиптична орбита. Константата на пропорционалност K_s не зависи от масата на планетата. Ето защо третият закон на Кеплер е валиден за всички планети. Ако приложим зависимост (9.10) за орбитата на сателит, например на Луната около Земята, тогава константата K_s ще има различна стойност, като масата на Слънцето е заместена с масата на Земята, т.е.

$$K_s = \frac{4\pi^2}{\gamma M_{\mathrm{E}}}$$

6. Гравитационно поле

Когато Нютон публикува своята теория за всемирното привличане, тя се считала за успех, тъй като задоволително обяснява движението на планетите. От 1687 г. същата теория е била използвана за отчитане на движението на кометите, отместването на везната на Кавендиш, орбитите на двойните звезди, както и въртенето на галактиките. Независимо от това, както съвременниците на Нютон, така и неговите последователи, възприемат трудно концепцията за сила, която действа на разстояние. Те не могат да си обяснят как е възможно два обекта да си взаимодействат, когато те не са в контакт един с друг. Нютон също не може да отговори на този въпрос.

След смъртта на Нютон учените предлагат подход за описанието на взаимодействия между обекти, които не са в контакт. Това позволява гравитационното взаимодействие да се разгледа по различен начин, като се използва концепцията на гравитационното поле, което съществува във всяка точка от пространството. Когато една частица с маса $\boldsymbol{m}$ се поставя в точката, където гравитационното поле е $\vec{g}$, на частицата действа сила $\vec{F_g} = m\vec{g}$. С други думи полето упражнява сила върху частицата. Гравитационното поле се описва чрез ***силовата характеристика интензитет*** $\vec{\mathrm{E}}_{\boldsymbol{g}}$:

$$\vec{\mathrm{E}}_{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{F_g}}{m} \tag{9.11}$$

Интензитетът на електричното поле е вектор, чиято големина е равна на гравитационната сила, действаща на пробно тяло с маса 1kg.

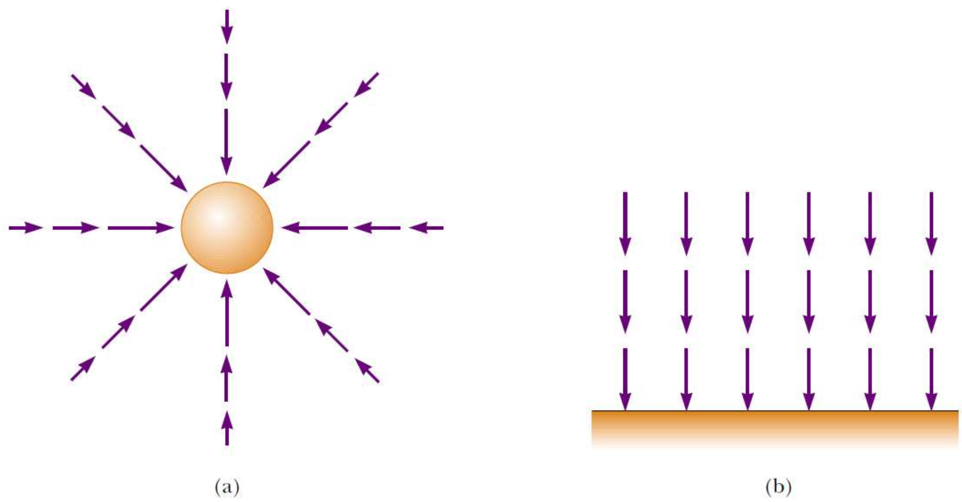
За съществуването на полето не необходимо наличието на пробно тяло - Земята създава гравитационното поле. ***Обектът, създаващ полето, се нарича източник на полето***. Ние можем да се установим наличието на полето и да измерва интензитета му чрез поставяне на пробно тяло и измерване на силата, упражнявана върху него.

Въпреки, че гравитационната сила в своята същност е взаимодействие между два обекта, концепцията на гравитационното поле позволява да отстраним ефекта на масата на единия от обектите.

Като пример как се прилага концепцията за полето, да разгледаме обект с маса $\boldsymbol{m}$ близо до земната повърхност. Тъй като гравитационната сила, действаща на обекта, има големина

$$\gamma \frac{\mathrm{M_E} \cdot m}{r^2}$$

интензитетът на полето $\vec{\mathrm{E}}_{\boldsymbol{g}}$ на разстояние r от центъра на Земята е



Фиг. 9.9

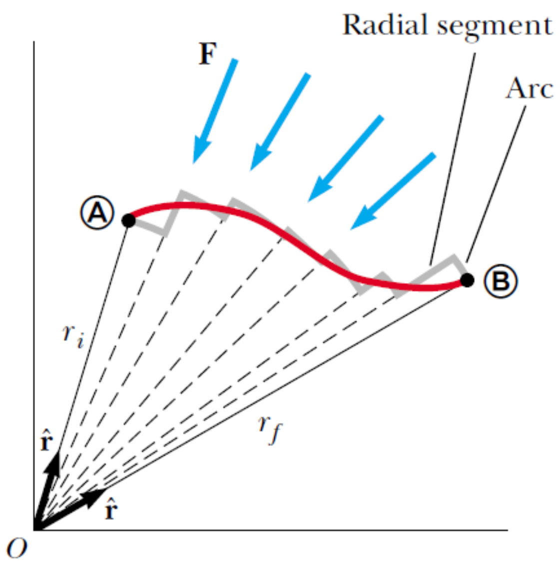
$$\vec{\mathrm{E}}_g = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \vec{r}_0 \tag{9.12}$$

където $\vec{r}_0$ е единичния вектор, насочен радиално от центъра на Земята. Отрицателният знак показва, че полето е насочено към центъра на Земята – фиг. 9.9а.

Векторите на полето в различните точки от полето се променят както по посока, така и по големина. В близост до земната повърхност гравитационното поле е постоянно и хомогенно (фиг. 9.9.b). Уравнение (9.11) е валидно за всички точки извън земната повърхност при предположението, че Земята е кълбо. На земната повърхност $\vec{g}$ има стойност 9.80N/kg.

7. Потенциална енергия на гравитационното поле

Гравитационната потенциална енергия е свързана с конфигурацията на система от обекти, взаимодействащи чрез гравитационна сила. Изразът за гравитационна потенциална енергия mgy на системата тяло-Земя е валиден само в случаите, когато тялото се намира в близост до земната повърхност и може да считаме, че гравитационната сила е постоянна. Тъй като гравитационната сила между две частици зависи от $1/r^2$, може да се очаква, че в общия случай изразът за гравитационната енергия ще бъде съществено различен.



Фиг. 9.10

Първо ще докажем, че ***гравитационната сила е консервативна*** (една сила се нарича консервативна, ако работата, която извършва при движение на тялото между две точки не зависи от траекторията на тялото). Първо че отбележим, че ***гравитационната сила е централна сила***. По определение

Централна сила е всяка сила, която е насочена по направление на радиалните линии към фиксиран център и има големина, която зависи само от радиалната координата r.

Следователно централната сила може да се представи като $F(r)\vec{r}_0$, където $\vec{r}_0$ е единичен вектор, насочен от източника на полето към тялото – фиг. 9.10.

Да разгледаме централна сила, действаща на тяло, което се движи по произволна траектория AB (фиг. 9.10). Кривата AB може да се апроксимира по следния начин: построяваме система от тънки сегменти (на фиг. 9.10 те са представени с пунктирана линия). Външната част на сегментите е крива, състояща се от къси радиални линии и дъги (сивата линия на фиг. 9.10). Избираме дебелината на сегментите по такъв начин, че дъгите в техния широк край максимално да се доближават до действителната траектория на тялото. По такъв начин траекторията може да се апроксимира със серия от зигзагообразни движения, при които се редуват движение по дъга и движение по радиалните линии.

По определение централната сила винаги е насочена по един от радиалните сегменти и работата, извършена от нея при движение в радиално направление е:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)dr.$$

По определение работата на сила, действаща перпендикулярно на преместването е нула. Следователно работата, извършена от гравитационната сила при движение по дъгите от окръжност, е нула. Така общата работа на силата $\vec{F}$ е сума от работите, извършени при движение на тялото в радиално направление:

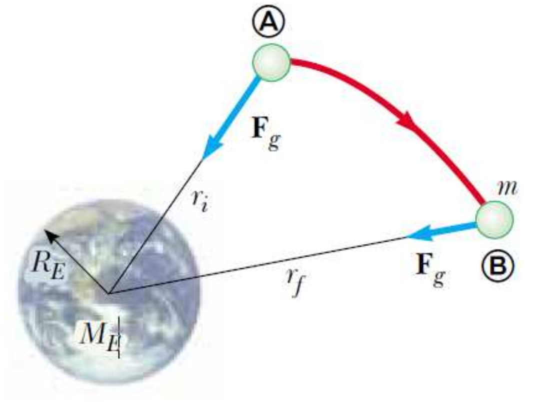
$$A = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr,$$

където индексите ***i*** и ***f*** се отнасят за началното и крайното положение на тялото. Тъй като подинтегралната функция зависи само от радиалното положение на тялото, интегралът ще зависи само от началната и крайната стойност на ***r***. Следователно работата е една и съща при произволна траектория на тялото. Тъй като работата не зависи от траекторията, а само от началното и крайното положение на тялото, можем да заключим, че ***всяка централна сила е консервативна***.

Изменението на потенциалната енергия на система от тела в случаи на преместване на някое от телата се изразява като взетата със знак „минус“ работа на гравитационната сила, извършена при това преместване:

$$\Delta W = W_f - W_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \tag{9.13}$$

Да разгледаме тяло с маса m, движещо се между точките A и B над земната повърхност – фиг. 9.11.



Фиг. 9.11

На тялото действа гравитационна сила

$$F(r) = -\frac{\gamma M_E m}{r^2}$$

Знакът „минус“ отчита фактът, че силата е сила на привличане и действа към източника на гравитационното поле. Заместваме последния израз в (9.13):

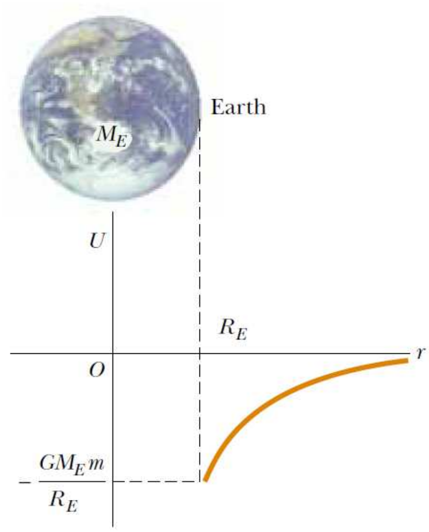
$$W_f - W_i = \gamma \mathrm{M_E} m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2}$$

$$W_f - W_i = -\gamma \mathrm{M_E} m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \tag{9.14}$$

При определяне на началните условия считаме, че гравитационната енергия е равна на нула в точките, в които и гравитационната сила е нула. Тогава $U_i = 0$ при $r_i \rightarrow \propto$ и

$$W(r) = -\frac{\gamma \mathrm{M_E} m}{r} \tag{9.15}$$

Този резултат е валиден за системата Земя-тяло, когато тялото се намира „извън Земята“, т.е. когато разстоянието $r \geq R_E$. Резултатът не е верен за частици „вътре в Земята“, където $r < R_E$. Поради избора на начални условия, гравитационната енергия е отрицателна – фиг. 9.12.



Фиг. 9.12

Формула (9.15) може да се обобщи за гравитационната потенциална енергия на система от тела с маса M и m, намиращи се на разстояние r едно от друго:

$$W(r) = -\frac{\gamma \mathrm{M} m}{r} \tag{9.16}$$

Този резултат показва, че гравитационната потенциална енергия за всяка двойка частици се изменя обратно пропорционално на разстоянието между тях (1/r), докато силата между тях се изменя обратно пропорционално на квадрата на разстоянието ($1/r^2$). Освен това потенциалната енергия е отрицателна, защото гравитационната сила е сила на привличане и сме избрали потенциалната енергия да бъде равна на нула при безкрайно разстояние между телата. След като силата между телата е сила на привличане, за да се увеличи разстоянието между тях е необходима външна сила, която да извършва положителна работа. Работата, извършена от външната сила, отива за увеличаване на потенциалната енергия и раздалечаване на телата. Това означава, че потенциалната енергия се увеличава и става по-малко отрицателна.

За да се раздалечат до безкрайност две тела, които са в покой и се намират на разстояние r едно от друго, е необходимо да се приложи външна сила, която да внесе в системата енергия, не по-малка от гравитационната потенциална енергия

$$\frac{\gamma \text{M} m}{r}$$

Ето защо за абсолютната стойност на гравитационната потенциална енергия е логично да се мисли като ***енергия на свързване на системата***. Ако външната сила внесе енергия, по-голяма от енергията на свързване, допълнителната енергия ще формира кинетичната енергия на телата, когато те са безкрайно раздалечени едно от друго.

За да се опиши енергетичното състояние на гравитационното поле, се дефинира ***скаларната величина величината потенциал на гравитационното поле***:

$$U_g = \frac{W}{m} \tag{9.17}$$

Потенциалът е гравитационното поле в дадена точка е скаларна величина, числено равна на потенциалната гравитационна енергия, която притежава пробно тяло с маса m, поставено в тази точка.

Ясно е, че потенциалът на гравитационното поле, създавано от източник с маса М е:

$$U_g = -\frac{\gamma \text{M}}{r} \tag{9.18}$$

Да разгледаме тяло с маса ***m***, движещо се със скорост ***v*** в близост в близост до масивен обект с маса ***M*** ($\text{M} \gg m$). Да предположим, че масивното тяло е в състояние на покой спрямо инерциална отправна система. Тогава общата механична енергия на системата от двете тела, когато те се намират на разстояние ***r*** едно от друго, ще бъде сумата от кинетичната и потенциалната енергия на тялото с маса ***m***.

$$\text{E} = \text{E}_\text{к} + W$$

$$\text{E} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} \tag{9.19}$$

Последното равенство показва, че общата енергия Е може да бъде положителна, отрицателна или нула, в зависимост от стойностите на ***v***.

Да разгледаме движение на тялото с маса ***m*** по кръгова орбита. От втория принцип на механиката:

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r} \tag{9.20}$$

Ако умножим двете страни на това равенство с r и разделим на 2, получаваме

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{Mm}{2r}$$

Тогава общата енергия на системата е:

$$\mathrm{E} = \gamma\frac{Mm}{2r} - \gamma\frac{Mm}{r}$$

$$\mathrm{E} = \gamma\frac{Mm}{2r}$$

Този резултат показва, че ***общата механична енергия при движение на тяло по кръгова орбита е отрицателна***. Кинетичната енергия е положителна и равна на половината от стойността на големината на потенциалната енергия.

Общата механична енергия е отрицателна и в случая на движение по елиптична орбита.

$$\mathrm{E} = \gamma\frac{Mm}{2\mathrm{a}}$$

8. Космически скорости

Да предположим, че тяло с маса m е хвърлено от повърхността на Земята вертикално нагоре с начална скорост $\boldsymbol{v_i}$ – фиг. 9.13.

От зависимост (9.20) можем да изразим скоростта, с която тялото се движи по кръгова орбита с радиус r:

$$v = \sqrt{\gamma\frac{M}{r}} \tag{9.21}$$

Ако заместим в последната формула масата на източника на гравитационното поле с масата на Земята - $\mathrm{M} = \mathrm{M_E}$, а радиуса на орбитата – с радиуса на Земята $r = R_{\mathrm{E}}$, ще получим най-малката скорост, с която е необходимо да се изстреля тяло от повърхността на Земята, за да стане неин спътник. Тази скорост се нарича ***първа космическа скорост***:

$$v_k = \sqrt{\gamma\frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{gR_E} \tag{9.22}$$

Приблизително $v_k = 8\ km/s$.

За да определим с каква скорост трябва да бъде изстреляно тялото, за да напусне пределите на земната гравитация, прилагаме закона за запазване на механичната енергия:

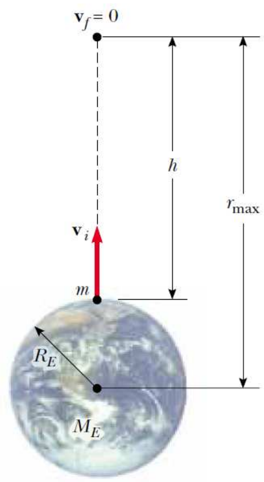
$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{M_{\mathrm{E}}m}{R_E} = -\gamma\frac{M_{\mathrm{E}}m}{r_\propto} = 0$$

Следователно

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{M_{\mathrm{E}}m}{R_E}$$

$$v_\propto = \sqrt{2\gamma\frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} \qquad (9.23)$$

Стойността $v_\propto$ се нарича втора космическа скорост.



Фиг. 9.13

Тези резултати, заедно с някои идеи от кинетичната теория на газовете обяснява защо някои планети имат атмосфери, а други не. Както ще видим по-късно, при дадена температура средната кинетичната енергия на газовата молекула зависи само от масата на молекулата. При една и съща температура леките молекули, като водород и хелий, имат по-високи средни скорости, в сравнение с по-тежките. Когато средната скорост на леките молекули не е много по-малка от втора космическа скорост за дадената планета, значителна част от тези молекули могат да напуснат атмосферата.

Също така този механизъм обяснява защо Земята не задържа водородните молекули и хелиеви атоми, а по-тежките молекулите, като например кислород и азот се задържат.