

## ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛНИ ОТПРАВНИ СИСТЕМИ

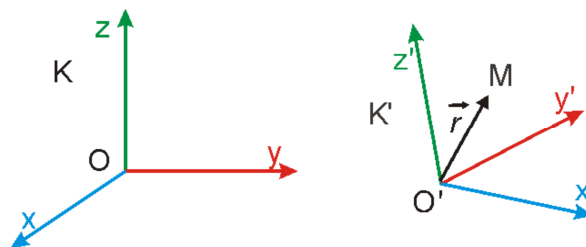
### 1. Абсолютна, относителна и преносна скорост

Както вече беше отбелязано, законите на механиката са валидни в инерциални отправни системи.

Отправни системи, движещи се ускорително спрямо инерциална отправна система, се наричат **неинерциални**.

Земята е неинерциална отправна система. Тя извършва криволинейно движение около Слънцето и въртене около собствената си ос, т.е. движения, при които има ускорение. При определени условия обаче отправните системи, свързани неподвижно със Земята, може приблизително да се разглеждат като инерциални системи.

Разглеждаме движението на материална точка  $M$  спрямо две отправни системи - инерциална ( $K$ ) и неинерциална ( $K'$ ), която се движи произволно (постъпателно и въртливо) спрямо системата ( $K$ ) (фиг. 7.1). Радиус-векторът на точката  $M$  в системата ( $K'$ ) е  $\vec{r}$ .



Фиг. 7.1

Скоростта  $\vec{v}_a$  на точката спрямо системата ( $K$ ) се нарича **абсолютна скорост**, а скоростта  $\vec{v}_r$  спрямо системата ( $K'$ ) се нарича **относителна скорост**. Връзката между абсолютната и относителната скорост е:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e,$$

7.1

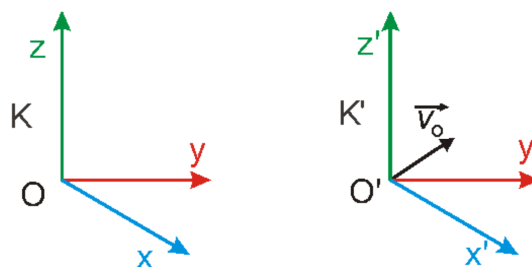
където  $\vec{v}_e$  е **преносната скорост**, свързана с движението на неинерциалната отправна система спрямо инерциалната отправна система. Или:

**Абсолютната скорост е векторна сума от относителната и преносната скорост.**

В частния случай, когато системата ( $K'$ ) не извършва въртеливи движения, а се движи спрямо системата ( $K$ ) постъпателно със скорост  $\vec{v}_0$ , която може да се променя по големина, всички точки от ( $K'$ ) (например точката  $M$ ) се движат спрямо системата ( $K$ ) със скорост  $\vec{v}_0$ , т.е. преносната скорост е  $\vec{v}_e = \vec{v}_0$  (фиг. 7.2) и тогава

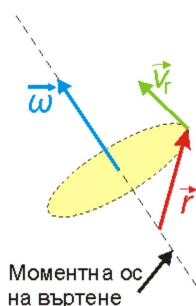
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_0,$$

7.2



Фиг. 7.2

Произволно движение на системата ( $K'$ ) може да се разглежда като съставено от две движения - постъпателно със скорост  $\vec{v}_0$ , и въртеливо с ъглова скорост  $\vec{\omega}$  около моментна ос, минаваща през точката  $O'$  (фиг. 7.3).



Фиг. 7.3

В този случай за преносната скорост е в сила равенството:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

7.3

а за абсолютната скорост се получава

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

7.4

където  $\vec{r}$  е радиус-векторът на материалната точка спрямо системата ( $K'$ ).

## 2. Теорема на Кориолис

Френският учен Густав Кориолис доказва, че

**абсолютното ускорение  $\vec{a}_a$  (измерено спрямо инерциалната отправна система K) е геометрична сума от относителното ускорение  $\vec{a}_r$  (измерено спрямо неинерциалната система K'), преносното ускорение  $\vec{a}_e$  и кориолисовото ускорение  $\vec{a}_c$ , т.е.**

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

7.5

Това равенство се нарича **теорема на Кориолис**. Следователно: спрямо **инерциалната** отправна система (K) наблюдателят измерва **три ускорения** ( $\vec{a}_r$ ,  $\vec{a}_e$ ,  $\vec{a}_c$ ), докато спрямо **неинерциалната** отправна система съществува **само ускорението  $\vec{a}_r$** .

**Кориолисовото ускорение** се изразява чрез формулата:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r,$$

7.6

където  $\vec{\omega}$  е ъгловата скорост, с която се върти неинерциалната отправна система K', а  $\vec{v}_r$  е относителната скорост на материалната точка (измерена спрямо неинерциалната отправна система). Това ускорение зависи както от относителното движение на материалната точка (скоростта  $\vec{v}_r$  спрямо системата K') така също и от преносното движение (въртенето) на системата K' спрямо системата K.

## 3. Инерчни сили

За да са валидни законите на динамиката и за неинерциалните отправни системи, освен силите, обусловени от взаимодействията между телата, е необходимо въвеждането на особен вид сили – **инерчни сили**. При отчитане на инерчните сили вторият принцип на механиката е валиден за произволна отправна система. При това инерчната сила  $\vec{F}_i$  трябва да бъде такава, че заедно със силите, обусловени от взаимодействията между телата, да създава на тялото ускорение  $\vec{a}_r$ , каквото то притежава в неинерциалната отправна система:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_i,$$

7.7

Тъй като  $\vec{F} = m\vec{a}_a$  ( $\vec{a}_a$  е ускорението на тялото в инерциална отправна система), то

$$m\vec{a}_r = m\vec{a}_a + \vec{F}_i,$$

7.8

Най-важните свойства на инерчните сили са:

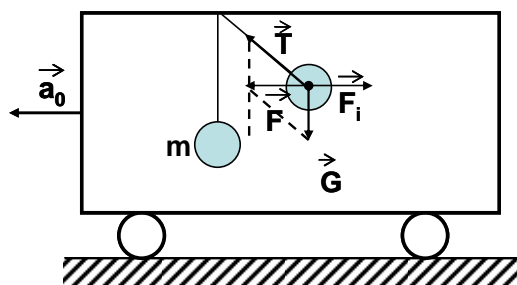
- действат само в неинерциална отправна система;
- не са предизвикани от взаимодействието на тела, а се дължат на ускорителното движение на отправната система;
- не се подчиняват на третия принцип на Нютон, т.е. инерчните сили нямат противодействие;
- големината им е пропорционална на масата на разглежданото тяло (материална точка), върху която действат;
- за наблюдател от неинерциалната отправна система те са напълно реални сили, които могат да се измерят;
- инерчните и гравитационните сили са еквивалентни, което е основата на Общата теория на относителността, на Айнщайн. (това означава, че с никакви експерименти не може да се установи дали една сила е резултат от ускорителното движение на система с ускорение  $\vec{g}$  или е резултат от действието на земното гравитационно поле).

Всяко механично движение може да се разглежда спрямо инерциална отправна система. В този смисъл въвеждането на инерчни сили не е необходимо, но използването им в неинерциална система значително опростява някои от задачите на динамиката.

Инерчната сила е обусловена от ускорителното движение на неинерциалната система и затова в общия случай трябва да се отчитат следните случаи на тази сила: 1) инерчна сила при ускорително постъпателно движение на отправната система; 2) инерчна сила, действаща на тяло, което се намира в покой спрямо въртяща се отправна система; 3) инерчна сила, действаща на тяло, което се движи във въртяща се отправна система.

### 3.1. Преносна инерчна сила при постъпателно движение.

Да разгледаме следния пример: топче е закачено на нишка за тавана на кабината на вагон (фиг. 7.4).



Фиг. 7.4

Докато вагонът е неподвижен, или се движи праволинейно и равномерно, нишката е във вертикално положение и силата на тежестта  $\vec{G}$  на топчето се уравнива от силата на опън на нишката  $\vec{T}$ . Ако вагонът се преведе в постъпателно движение с ускорение  $\vec{a}_0$ , то нишката ще започне да се отклонява назад от вертикалата до такъв ъгъл  $\alpha$ , при който резултантната сила  $\vec{F} = \vec{G} + \vec{T}$  не обезпечи ускорението на топчето  $\vec{a}_0$ , т.е.

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_0.$$

7.9

Така резултантната сила е насочена по посока на движението на вагона.

Относно отправна система, свързана с ускорително движещия се вагон, топчето се намира в покой. Това е възможно само ако силата  $\vec{F}_i$  се уравнива от сила, равна по големина и противоположно насочена. Именно тази сила се явява инерчна сила, тъй като топчето не взаимодейства с никакви други тела. Следователно инерчната сила е:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

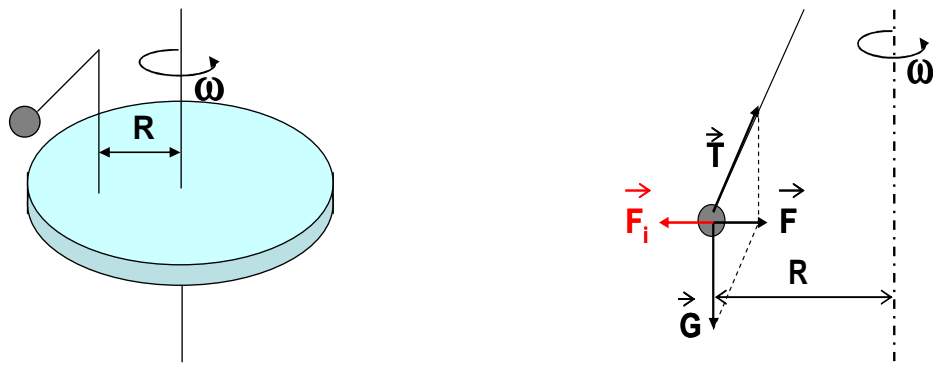
7.10

Знакът „-“ в зависимост (7.10) показва, че

**инерчната сила е насочена в посока, противоположна на посоката на ускорението на отправната система.**

### 3.2. Центробежна инерчна сила

Нека диск се върти равномерно с ъглова скорост  $\omega$  около вертикална ос, минаваща през центъра му. На диска, на разстояние  $R$  от оста на въртене, се намира махало (топче с маса  $m$  е окачено на тънка нишка). При въртене на махалото заедно с диска топчето ще се отклонява от вертикалата на някакъв ъгъл (фиг. 7.5).



Фиг. 7.5

В инерциална отправна система топчето равномерно се движи по окръжност радиус  $R$ . Следователно на него действа сила с големина

$$F = m\omega^2 R,$$

7.11

насочена перпендикулярно на оста на въртене на диска. Тя се явява равнодействаща на силата на тежестта  $\vec{G}$  на топчето и силата на опън на нишката  $\vec{T} - \vec{F} = \vec{G} + \vec{T}$ . Относно отправна система, свързана с въртящия се диск, топчето се намира в покой, което е възможно само ако силата  $\vec{F}$  се уравни от сила, равна по големина и противоположно насочена. Тя се явява инерчна сила. Нарича се **центробежна инерчна сила** и е насочена по хоризонтала навън от оста на въртене на отправната система.

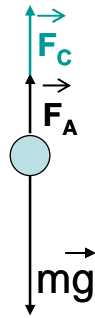
Центробежните сили намират приложение във всички центробежни механизми – центрофуги, сепаратори и др.

Пример: При седиментация (утаяване) на суспенсии и емулсии на частиците (червени кръвни телца, макромолекули, нуклеинови киселини, твърди частици и др.) действат силата на тежестта, архимедовата сила и силата на съпротивление, която е право пропорционална на скоростта на частицата ( $\vec{F} = -k\vec{v}$ , където  $k$  е коефициент на пропорционалност). При нормални условия скоростта на седиментация е много малка. Тя може рязко да се увеличи, ако епруветка с емулсия (суспенсия) се постави в ултрацентрофуга, въртяща се с голяма ъглова скорост.

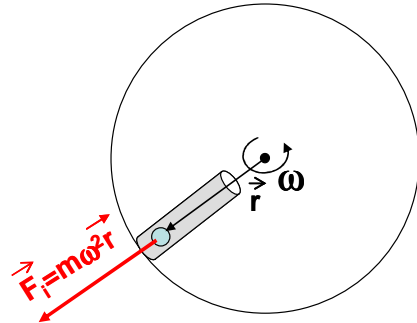
Колко пъти ще нарастне скоростта на седиментация, ако ултрацентрофугата извършва 50000 оборота в минута? Радиусът на въртене е  $r = 10 \text{ cm}$ .

Решение: Нека утаяването се извършва под действие на силата на тежестта. Скоростта на утаяващата се частица става постоянна, когато силата на тежестта се

уравнoвеси от архимедовата сила  $F_A = \rho Vg$  ( $\rho$  е плътността на дисперсионната среда,  $V$  е обемът на частицата) и от силата на съпротивление (фиг. 7.8a):



Фиг. 7.8a



Фиг. 7.8б

$$mg = \rho_0 Vg = \rho Vg + kv,$$

където  $\rho_0$  е плътността на частицата. От това уравнение определяме постоянната скорост на седиментация

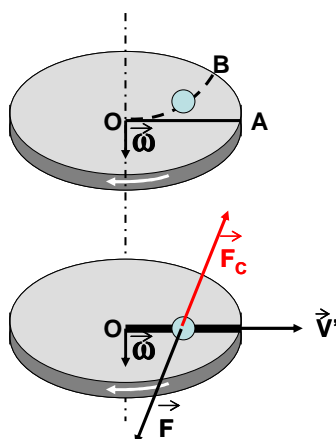
$$v = \frac{(\rho_0 - \rho)Vg}{k}$$

Да поставим сега епруветката с препарата в ултрацентрифугата. Във въртящата се неинерциална отправна система, свързана с центрофугата, на частицата действа центробежна инерчна сила  $F_i = m\omega^2 r = m(2\pi\nu)^2 r$ , където  $\nu$  е честотата на въртене на центрофугата (фиг. 7.8б). Тъй като инерчната сила е много по-голяма от силата на тежестта, можем да пренебрегнем последната и да смятаме, че утаяването се извършва под действие на центробежната инерчна сила. Скоростта на седиментация  $v_1$  в този случай можем да определим като заместим в получената формула за седиментация под действие на силата на тежестта земното ускорение  $g$  с нормалното ускорение  $\omega^2 r$ .

$$v_1 = \frac{(\rho_0 - \rho)V\omega^2 r}{k} = \frac{\omega^2 r}{g} v = 2,7 \cdot 10^5 v,$$

т.е. в ултрацентрифуга скоростта на седиментация нараства почти 300000 пъти.

### 3.3. Инерчни сили, действащи на тяло, движещо се във въртяща се отправна система.



Фиг. 7.9

Нека топче се движи с постоянна скорост  $\vec{v}'$  по посока на радиуса на равномерно въртящ се диск ( $\vec{v}' = const; \vec{\omega} = const; \vec{v}' \perp \vec{\omega}$ ). Ако дискът е неподвижен, топчето се движи по радиална права и попада в точка А, а когато дискът се преведе в движение в указаната със стрелка посока, топчето се хлъзга по кривата ОВ (фиг. 7.9а), при което посоката на относителната му спрямо диска скорост  $\vec{v}'$  се изменя. Това е само възможно само когато на топчето действа сила, перпендикулярна на скоростта му. За да се търкаля топчето по посока на радиуса на въртящия се диск, се използва твърдо закрепен прът, по който топчето се движи без триене праволинейно и равномерно със скорост  $\vec{v}'$  (фиг. 7.9б). При отклонение на топчето прътът му действа със сила  $\vec{F}$ . Относно диска (въртяща се отправна система) топчето се движи равномерно и праволинейно, което може да се обясни с факта, че силата  $\vec{F}$  се уравновесява от приложена към топчето инерчна сила, перпендикулярна на скоростта  $\vec{v}'$ . Тази сила се нарича *кориолисова инерчна сила*. Може да се покаже, че кориолисовата инерчна сила е

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

7.12

Векторът  $\vec{F}_c$  е перпендикулярен на вектора на скоростта  $\vec{v}'$  на тялото и ъгловата скорост на въртене на отправната система в съответствие с правилото на десния винт. Двете необходими условия за възникването на кориолисови сили са:

- 1) Неинерциалната отправна система да се върти –  $\omega \neq 0$ ;
- 2) Материалната точка да се движи спрямо неинерциалната отправна система.



#### 4. Земята като неинерциална отправна система

Денонощното въртене на Земята оказва влияние върху телата, които са в покой или се движат спрямо земната повърхност. За да отчетем това влияние, ще разгледаме земната повърхност като неинерциална отправна система, която се върти с ъглова скорост  $\omega$ .

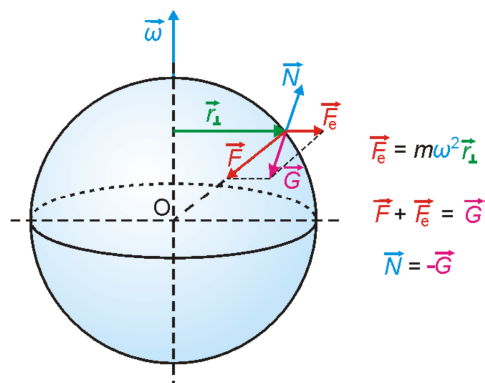
В тази отправна система действат центробежни и кориолисови инерчни сили.

##### 4.1. Сила на тежестта и тегло на телата

В инерциална отправна система силата на тежестта  $\vec{G} = m\vec{g}$  на дадено тяло е равна на гравитационната сила, с която Земята привлича разглежданото тяло към себе си.

В неинерциална отправна система, свързана със Земята, на неподвижно тяло (материална точка) действат три сили (фиг. 7.10):

- гравитационна сила  $\vec{F}$ ;
- центробежна инерчна сила  $\vec{F}_e$ ;
- сила на реакция на опората  $\vec{N}$ .



Фиг. 7.10

Гравитационните и инерчните сили са масови сили - на произволен малък елемент от разглежданото тяло, независимо от неговото разположение (на повърхността или в обема на тялото), действа гравитационна сила, правопропорционална на гравитационната му маса, и инерчна сила, правопропорционална на инертната му маса.

Съгласно с принципа за еквивалентност, гравитационната и инертната маса са равни. Това дава възможност да разгледаме съвместно гравитационните и инерчните сили и да дадем по-точно и по-пълно определение на понятието сила на тежестта:

За неподвижно спрямо земната повърхност тяло силата на тежестта е равна на векторната сума от гравитационната сила и центробежната инерчна сила, обусловена от денонощното въртене на Земята:

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{F}_c \quad 7.13$$

Силата на тежестта не е насочена към центъра на Земята, а е отклонена на малък ъгъл (фиг. 7.10).

Тялото и опората взаимодействат с контактни сили:

- нормална реакция на опората  $\vec{N}$  (приложена в тялото);
- тегло  $\vec{P}$  (приложено в опората).

От условието за равновесие на тялото следва, че

$$\vec{G} + \vec{N} = 0 \quad 7.14$$

Съгласно с третия принцип на Нютон, тялото и опората взаимодействат с равни по големина и противоположни по посока сили, т.е.

$$\vec{P} = -\vec{N} = \vec{G} \quad 7.15$$

Следователно при тяло, неподвижно спрямо опората, теглото и силата на тежестта **съвпадат по големина и по посока**. Но тези две сили са приложени в различни тела: силата на тежестта е приложена в разглежданото тяло, а теглото – в опората (нишката).

Силата с която тялото натиска опората върху която е поставено (или опъва нишката на която е окачено) се нарича тегло на това тяло.

За разлика от силата на тежестта  $\vec{G}$ , която за дадено тяло близо до земната повърхност остава постоянна и различна от нула  $\vec{G} \neq 0$ , теглото на тялото  $\vec{P}$  може да е по-голямо ( $\vec{P} > \vec{G}$ ) или по-малко ( $\vec{P} < \vec{G}$ ) от силата на тежестта, равно на нея по големина ( $\vec{P} = \vec{G}$ ) или може да е нула ( $\vec{P} = 0$ ).

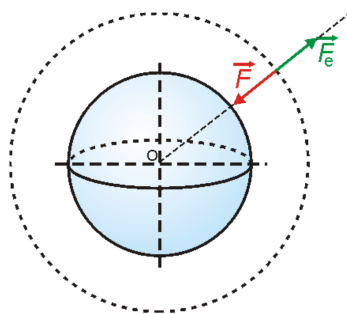
Когато теглото на едно тяло е  $\vec{P} = 0$  казваме, че тялото е в състояние на **безтегловност**.

Състоянието на телата, при което тяхното тегло става нула, т.е. тези тела не натискат върху опората си (не опъват нишката, на която са окачени) се нарича състояние на безтегловност.

В състояние на безтегловност се изменят редица жизнени функции и се наблюдават необичайни явления.

От гледна точка на наблюдател в **инерциална** отправна система, **състояние на безтегловност се реализира при свободно падане в гравитационно поле.**

Състояние на безтегловност се наблюдава при космическите полети по околоземна орбита. От гледна точка на наблюдател от неинерциалната отправна система (орбиталната станция) , гравитационната сила се уравнива от центробежната инерчна сила (фиг. 7.11).



Фиг. 7.11

$$\vec{F}_e + \vec{F} = 0$$

7.16

$\vec{F}$  - гравитационна сила;  $\vec{F}_e$  - центробежна инерчна сила.

За наблюдател от инерциалната отправна система, свързана с „неподвижните звезди“, орбиталната станция през цялото време пада свободно в гравитационното поле на Земята.

#### 4.2. Зависимост на земното ускорение от географската ширина

Денонощното въртене на Земята води до зависимост на земното ускорение от географската ширина.

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{F}_e = m\vec{g},$$

7.17

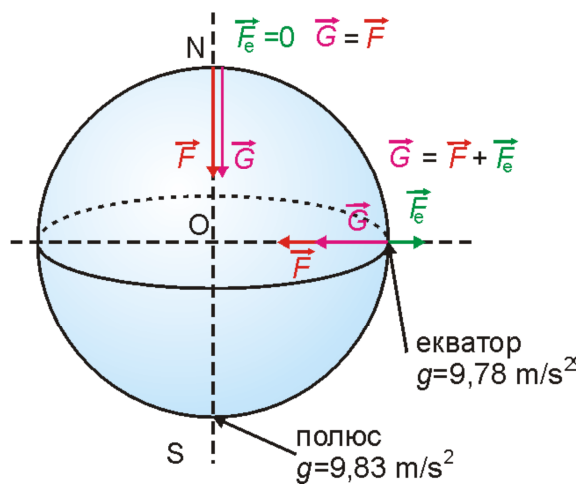
където преносната инерчна сила е центробежната сила ( $\vec{F}_e = m\omega^2\vec{r}_\perp$ ).

Ако приемем Земята за хомогенно кълбо, гравитационната сила е насочена към центъра ѝ и не зависи от това в коя точка от земната повърхност се намира тялото.

Центробежната инерчна сила обаче зависи от географската ширина (тя е максимална на екватора, където  $r_{\perp} = R$  - радиус на Земята, и е нула на полюсите, където  $r_{\perp} = 0$ ).

Поради **това земното ускорение също зависи от географската ширина** (фиг. 7.12). То има:

- **минимална** стойност ( $g=9,78 \text{ m/s}^2$ ) на **екватора**, където гравитационната и центробежната сила са с противоположни посоки (фиг. 7.10)
- **максимална** стойност ( $g=9,83 \text{ m/s}^2$ ) на **полюсите**, където центробежната инерчна сила е равна на нула.



Фиг. 7.12

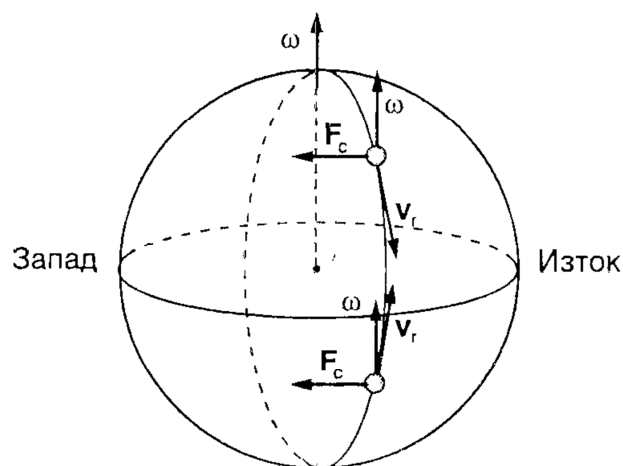
Земята не е хомогенно кълбо: тя е сплескана към екватора, а освен това съдържа нееднородности (например рудни находища) . Това допълнително обуславя зависимост на земното ускорение от географското положение на тялото.

### 4.3. Кориолисови сили

Тъй като Земята представлява въртяща се отправна система, на движещите се тела действат кориолисови сили, които обясняват редица наблюдавани явления. Например ако тяло се движи в северното полукълбо на север (фиг. 7.13), то действащата му кориолисова сила ще бъде насочена надясно по отношение на посоката на движение, т.е. тялото ще се отклонява на изток. Ако тялото се движи на юг, то силата на Кориолис отново действа на дясно по отношение на посоката на движение, т.е. тялото се отклонява на запад. Поради това в северното

полукълбо се наблюдава по-силно отмиване на десните брегове на реките, десните релси на железопътните линии се износват по-бързо и т.н.

В южното полукълбо кориолисовите сили са насочени наляво спрямо посоката на движението. Там реките подкопават по-силно левите брегове и по-бързо се износват левите релси спрямо посоката на движение на влаковете.



Фиг. 7.13

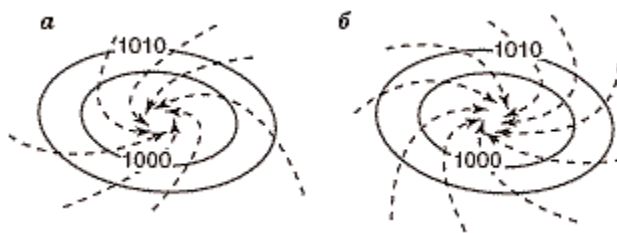
Поради силите на Кориолис падащите на повърхността на Земята тела се отклоняват на изток. С кориолисовите сили е свързано и поведението на махалото на Фуко, което се явява едно от доказателствата за въртенето на Земята. Ако такава сила не съществуваше, то равнината на трептене на махалото нямаше да се променя. Действието на кориолисовата сила довежда до завъртане на равнината на трептене около вертикална ос.

Кориолисовите сили влияят и на процесите в атмосферата - например на движението на въздушните маси.

Движението на въздуха от атмосферата се извършва под действието на различни сили – сила на тежестта, сили на натиска, дължащи се на изменението на налягането във вертикално и в хоризонтално направление, сили на вътрешно триене между въздушни слоеве, които се движат с различна скорост, и инерчни сили. Ще се ограничим с разглеждането на хоризонтален въздушен поток, когато всички сили действащи във вертикално направление, се уравниават (това са силата на тежестта и вертикалната сила на натиск). Когато скоростта е малка, силите на вътрешно триене могат да се пренебрегнат. Тогава в отправна система, свързана със Земята, на всеки малък обем с маса  $m$  от въздушния поток действат

две хоризонтални сили – силата на натиск  $\vec{F}_n$ , дължаща се на изменение на налягането в хоризонтално направление, и кориолисовата сила  $\vec{F}_c = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}$ .

При установили се бавни криволинейни хоризонтални движения на въздушните маси се постига приблизителен баланс на кориолисовите сили и силите на натиск. Разликата в техните голедини е много малка и определя закривяването на траекторията. Типичен пример в това отношение са циклоните и антициклоните. На метеорологичните карти циклоните (области на ниско налягане) и антициклоните (области на високо налягане) се представят с изобари – криви, които са геометрично място от точки с еднакво налягане. Силите на натиск  $\vec{F}_n$  са перпендикулярни на изобарите и са насочени от областите на високо налягане към областите на ниско налягане. Кориолисовата сила, която балансира силата на натиск, трябва да е насочена в противоположна на силата  $\vec{F}_n$  посока. По правилото на дясната ръка определяме, че кориолисовата сила изпълнява това условие, ако скоростта  $\vec{v}_r$  на разглеждания обем въздух е насочена по допирателната към съответната изобара. Следователно за северното полукълбо движението на въздушните маси се извършва по изобарите по посока на часовниковата стрелка за антициклоните и в обратна на часовниковата стрелка посока за циклоните, т.е. и в двата случая областта на високо налягане се намира отдясно на въздушния поток. В южното полукълбо е обратно – областта на високо налягане е отляво на въздушния поток, т.е. за антициклона движението на въздушните маси е в обратна на часовата стрелка посока, а за циклона – по часовата стрелка (фиг. 7.14). Тези изводи се потвърждават от метеорологичните наблюдения и спътниковите снимки.



Фиг. 7.14