

ТЕМА 5. ДИНАМИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

„Законите на механиката държат под юзди инженерите и изобретателите, за да не обещават на себе си и на другите невъзможни неща”

Леонардо да Винчи

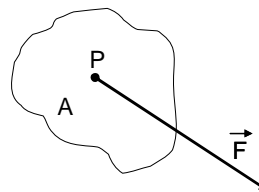
1. Първи принцип на механиката

1.1. Сила

Когато едно тяло действа на друго, то второто тяло получава определено ускорение. Ясно е, че действието на едно тяло върху друго се характеризира с определена посока. Ще считаме, че тази посока съвпада с посоката на създаденото от действието ускорение.

Физичната величина, която характеризира взаимодействията на телата в механиката се нарича сила.

Силата е векторна величина – характеризира се с големина, посока и приложна точка – фиг. 5.1. Когато едно тяло не се върти или деформира, не е съществено в коя негова точка е приложена силата. Затова ще считаме, че всички сили са приложени в центъра на тялото.



Фигура 5.1.

Ако на едно тяло действат няколко сили, то действието им може да се замени с тяхната **равнодействаща (резултантна)**.

Равнодействаща сила \vec{F} на няколко сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ е равна на тяхната векторна сума:

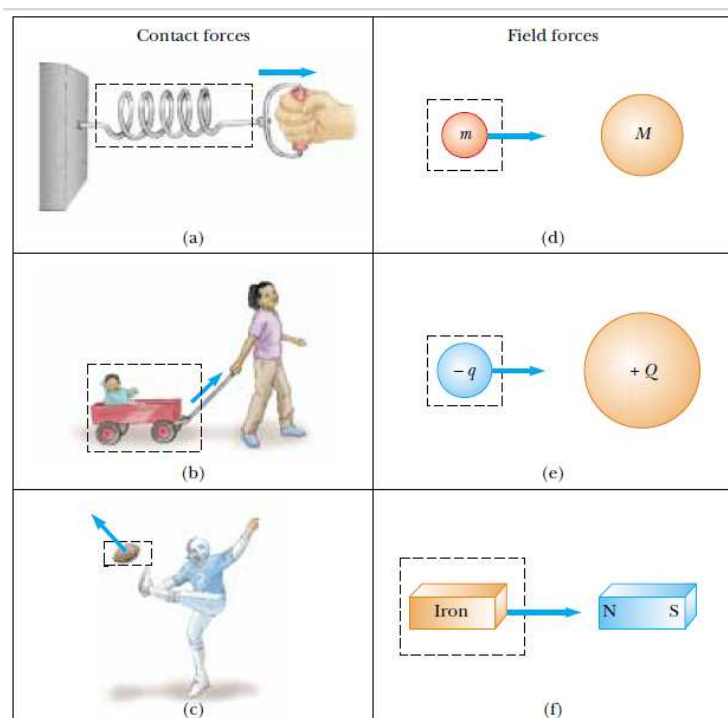
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (5.1)$$

Ще казваме, че няколко сили, действащи на едно тяло, се **уравновесяват**, ако тяхната равнодействаща е равна на нула.

Силите могат да бъдат разделени на **контактни** и **полеви** – фиг. 5.2. Контактните сили се основават на физичен контакт между взаимодействащите обекти. Полевите сили действат без наличието на физичен контакт, а върху отдалечени едно от друго тела. Примери за полеви сили са гравитационната, електричните и магнитните сили.

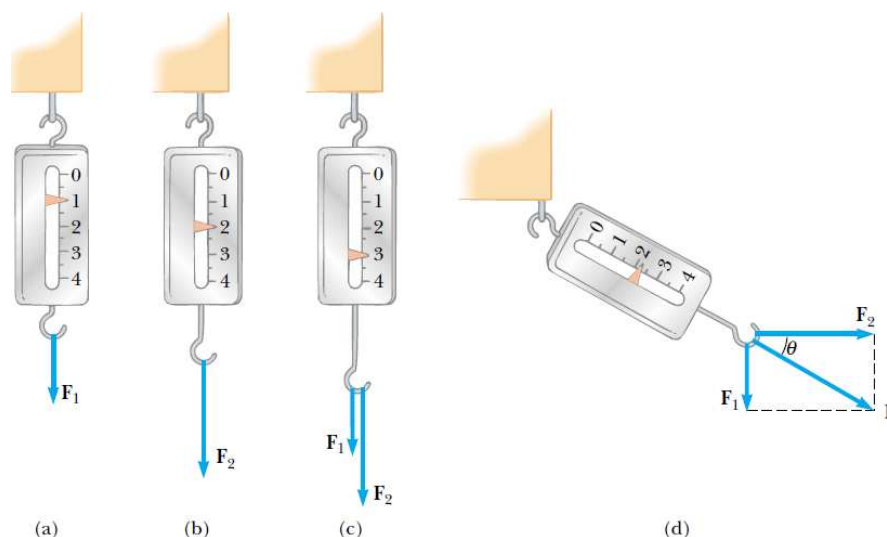
Разделянето на силите на контактни и полеви не е толкова ясно изразено. Когато взаимодействията се разглеждат на атомно ниво, се оказва, че всички сили, които се класифицират като контактни, имат електричен характер. Въпреки това, при разработването на модели за макроскопично описание на явленията, е удобно да се използват двете класификации на силите.

Всички известни фундаментални взаимодействия в природата, се реализират чрез полеви сили. Такива са гравитационните сили между обектите, електромагнитните сили между електричните заряди, ядрените сили между субатомните частици и слабите сили, които възникват в определени процеси на радиоактивен разпад.



Фигура 5.2.

Измерването на силите става с уред, наречен силомер. Той се основава на деформацията на пружина, която възниква в резултат на приложена сила – фиг. 5.3.

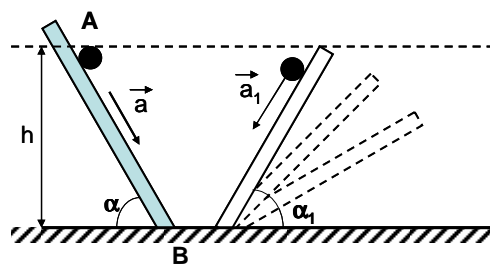


Фигура 5.3.

Големината на приложената сила е пропорционална на деформацията на пружината и тя може да бъде определена по предварително калибрирана скала.

1.2. Закон на Галилей за движението по инерция

От казаното за сила не става ясно каква е зависимостта между дадена сила и създаденото от нея ускорение. За да отговори на този въпрос, Галилей е направил следния опит:



Фигура 5.4.

От едно и също място А на височина h (фиг. 5.4) той е пуснал многократно едно топче да се движи без начална скорост надолу по наклонена равнина АВ. След като достигне долния край В, топчето започва да се изкачва по втора наклонена равнина, движейки се с ускорение \vec{a}_1 . Галилей променял ъгъла α_1 на втората наклонена равнина и измервал времето за движение на топчето по нея. Най-дълго се оказало това време, когато втората равнина заела хоризонтално положение. Като вземал след това различно гладки хоризонтални равнини, Галилей установил, че колкото е по-гладка хоризонталната равнина, толкова по-продължително е движението на топчето по нея. Този опитен факт му дал основание да предположи, че ако хоризонталната равнина е идеално гладка, т.е. ако не съществува сила на триене между нея и топчето, то би се движело по нея вечно праволинейно и равномерно. Като обобщил и анализирал резултатите от този и други опити, Галилей формирал следния закон:

Всяко тяло, на което не действат сили (или действащите на него сили се уравновесяват), се движи праволинейно и равномерно, или е в покой.

Този закон се нарича **закон на Галилей за движението по инерция**. Този фундаментален факт бележи началото на формирането на физиката като наука в съвременния смисъл на това понятие.

Тяло, което не взаимодейства с други тела, се нарича **свободно тяло**. Праволинейното равномерно движение на свободно тяло се нарича **движение по инерция**.

1.3. Първи принцип на механиката

Както е известно, за определено движение може да се говори само спрямо дадена отправна система. Понеже в закона на Галилей за движението по инерция става дума за движение с постоянна скорост и за покой, възниква въпросът спрямо какви отправни системи е валиден той. Дали във всички отправни системи е валиден закона за инерцията?

В изградената от Нютон механика се приема като принцип следното твърдение:

Съществуват отправни системи, наричани инерциални, спрямо които всяко тяло, на което не действат сили (или действащите на него сили се уравновесяват), се движи с постоянна скорост или е в покой.

То се нарича **първи принцип на Нютон** и е основен закон на механиката.

Проблемът коя отправна система може да се разглежда като инерциална се решава от опита. Той ни показва, че отправна система, свързана със Земята, за неголеми интервали от време (много по-малки от едно денонощие) може да се разглежда като инерциална. Но тази система не е съвсем точно инерциална. По-близо до инерциалната е хелиоцентричната отправна система, която е свързана с центъра на Слънцето.

Съществуват и отправни системи, спрямо които законът на Галилей за движението по инерция не е в сила. Такива отправни системи се наричат **неинерциални**. Например при рязко спиране на влака (закъснително движение с голямо ускорение) незакрепените предмети, които са били първоначално в покой, започват да се движат спрямо влака, без да са подложени на външно въздействие. Следователно в отправна система, свързана с движещия се с ускорение влак, законът за инерцията не е в сила.

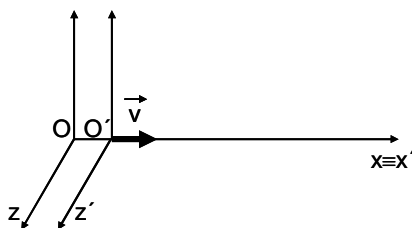
1.4. Принцип на относителността на Галилей

Съгласно принципът на относителността, формулиран от Галилей през 1636 г., всички инерциални отправни системи по своите механични свойства са еквивалентни една на друга. Във всички инерциални отправни системи свойствата на пространството и времето са еднакви, а законите на механиката имат еднаква математична форма. В съответствие с този принцип никакви механични опити, проведени в произволна инерциална система, не могат да установят дали системата се движи праволинейно и равномерно, или се намира в покой.

Движението е относително. Това означава, че траекторията на МТ и нейната скорост зависят от избора на отправна система. В същото време законите на класическата механика във всички инерциални отправни системи се записват еднакво.

1.5. Преобразувания на Галилей

Преобразуванията на Галилей представляват формули, преобразуващи координатите на МТ и времето при преход от една инерциална отправна система към друга.



Фигура 5.6.

Нека инерциалната отправна система S' и свързаната с нея координатна система $O'x'y'z'$ се движи с постоянна скорост \vec{V} относно инерциална отправна система S , с която е свързана отправна система $Oxyz$. Осите $O'y'$ и $O'z'$ са успоредни на осите Oy и Oz , а осите $O'x'$ и Ox съвпадат и са успоредни на скоростта \vec{V} (фиг. 5.6).

Преобразуванията на Галилей имат следния вид:

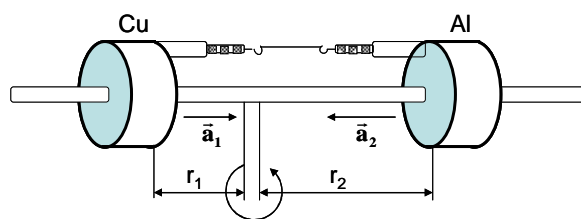
$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (5.2)$$

Преобразуванията на Галилей съответстват на представите на класическата механика, че интервалите от време между събития и размерите на телата са еднакви във всички отправни системи. Освен това, при смяна на координатите на движеща се МТ уравненията на механиката не се променят по форма.

Преобразуванията на Галилей се явяват по същество математически изказ на принципа на относителността на Галилей.

2. Втори принцип на механиката

2.1. Инертност и маса на телата



Фигура 5.7

Опит: Меден и алуминиев цилиндър с еднакви размери се надяват на тънка пръчка, по която те могат да се движат свободно с нищожно триене – фиг. 5.7. Цилиндриите са свързани с два силомера, а пръчката е поставена на оста на центробежна машина, която се превежда в равномерно въртене с ъглова скорост ω . Вижда се, че след известно време цилиндриите застават неподвижно спрямо пръчката, като медният цилиндър се намира на по-малко разстояние r_1 от оста на въртене в сравнение с алуминиевия. Силомерите показват, че на цилиндриите действат сили с равни големина, които им предават различни центростремителни ускорения:

$$a_1 = \omega^2 r_1, \quad a_2 = \omega^2 r_2 \quad (5.3)$$

Този опит показва, че еднакви сили предават на различни тела различни ускорения. Други опити и наблюдения ни убеждават, че определено изменение на скоростта на едно тяло не става мигновено, а се осъществява за определен интервал от време. Тези опити потвърждават едно важно свойство на телата, което се нарича инертност.

Инертността на телата се проявява в това, че под действие на равни сили различни тела получават различни ускорения. Тя се проявява и в това, че когато на едно тяло действа сила, изменението на скоростта му става не мигновено, а за определен интервал от време.

Тяло, което под действие на дадена сила получава по-голямо ускорение, има по-малка инертност.

Свойството инертност може да се характеризира количествено. Количествена характеристика на инертността на телата е физична величина, която се нарича **маса**.

Определянето на масите на телата може да стане, като се сравняват ускоренията, които те получават под действието на равни сили. При това се приема, че масата m_1 на едно тяло е толкова по-голяма от масата m_2 на друго тяло, колкото пъти големината a_1

на неговото ускорение е по-малка от големината a_2 на ускорението, получено от второто тяло под действието на същата сила. Следователно е в сила зависимостта:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (5.4)$$

и тъй като знаем как се изменят ускоренията, от (5.4) получаваме отношението на двете маси.

За да се определят масите на телата, избираме определено тяло за еталон и приемаме неговата маса за единица. Това тяло се нарича **еталон за маса**, а масата му е приета за **единица за маса**, и се нарича **килограм**.

Опитът показва, че **масата на едно тяло е постоянна, когато то се движи със скорост, много по-малка от скоростта на светлината във вакуум**.

Според класическата механика масата притежава свойството **адитивност**. Това означава, че ако съединим две тела с маси m_1 и m_2 , ново-полученото тяло има маса, равна на сумата $m_1 + m_2$ от масите на телата.

Еталонът за маса е тяло, направено от платинено-иридиева сплав с форма на цилиндър с диаметър и височина 39 mm. Пази се в Международното бюро за мерки и теглилки в Севър, Франция. От него са направени първични копия, които се съхраняват в различни страни. Нашата страна разполага с такъв първичен еталон, който се съхранява в националния център по метрология.

2.2. Втори принцип на механиката

Многобройните наблюдения показват, че ускорението на телата зависи както от тяхната маса, така и от действащите им сили. Резултатите от опита се обобщават от втория принцип на механиката.

Ускорението на едно тяло е правопрпорционално на резултантната сила, която му действа, и е обратно пропорционално на неговата маса:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.5)$$

Единицата за сила се нарича **нютон (N)**. Съгласно с уравнение (5.5) **1 N е сила, която приложена към тяло с маса 1 kg му придава ускорение 1 m/s²**.

Вторият принцип на механиката може да се запиши във вида:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (5.6)$$

В някои случаи масата се изменя по време на движението. Например при реактивно движение става изхвърляне на изгорелите газове и масата на ракетата непрекъснато намалява. Когато $m=const$, уравнение (5.6) се записва във вида:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.7)$$

Векторът \vec{p} , равен на произведението от масата и скоростта на тялото

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (5.8)$$

се нарича **импулс на тялото**. Импулсът е една от най-важните динамични характеристики на телата. Уравнението (5.7) изразява втория принцип на механиката в друга формулировка (дадена от самия Нютон):

Скоростта, с която се изменя импулсът на едно тяло (първата производна на импулса по времето), е равна на резултантната сила, действаща на тялото.

При движението на тяло с постоянна маса зависимости (5.6) и (5.7) са еквивалентни. Формулировката на втория принцип на механиката, изразена чрез (5.7) е обаче по-обща. Тя описва съща така движението на тела с променлива маса, както и релативистките движения, извършващи се със скорости, близки до скоростта на светлината.

Уравнение (5.7) може да се запише във вида:

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \quad (5.9)$$

Величината $\vec{F}dt$ се нарича **импулс на силата** \vec{F} за безкрайно малкия интервал от време dt . Съгласно (5.9)

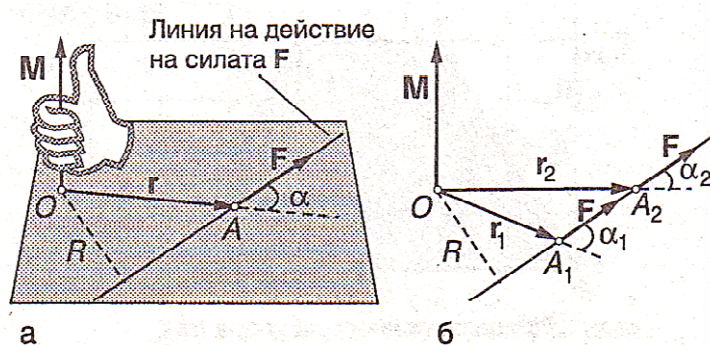
Изменението на импулса на едно тяло за интервал от време dt е равно на импулса на действащата сила за същия интервал от време.

Вторият принцип на механиката е в сила само за инерциални отправни системи. От (5.5) и (5.6) в частност следва, че при $\vec{F} = \vec{0}$ ускорението е нула, а скоростта е постоянна, т.е. тяло, на което не действа сила, се движи равномерно и праволинейно.

Изводът обаче, че вторият принцип на механиката съдържа в себе си първия като частен случай закона за инерцията е неправилен, защото законът за инерцията постулира като обобщение от опита, че съществуват инерциални отправни системи и движение по инерция.

2.3. Момент на сила и момент на импулса спрямо точка

Да разгледаме произволна точка O , която ще наречем начало или полюс. В точка A с радиус-вектор \vec{r} , определен спрямо началото O , е приложена сила \vec{F} . Правата, която минава през т. A и е успоредна на вектора \vec{F} , се нарича линия на действие на силата \vec{F} - фиг. 5.8.а.



Фигура 5.8

Векторната величина \vec{M} равна на векторното произведение на \vec{r} и \vec{F} се нарича момент на силата \vec{F} спрямо точка O .

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.10)$$

Векторът \vec{M} е перпендикулярен на векторите \vec{r} и \vec{F} , т.е. на равнината, определена от точка O и линията на действие на силата \vec{F} . Посоката на \vec{M} се определя по правилото на дясната ръка, а големината му е:

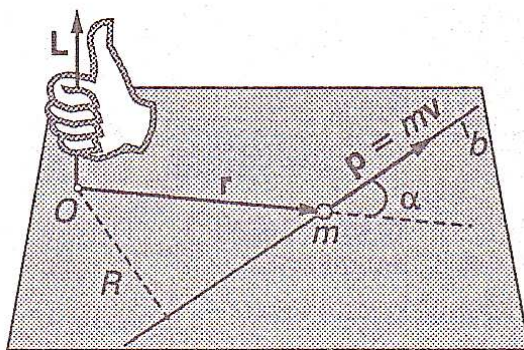
$$M = rF \sin \alpha = FR \quad (5.11)$$

където $\alpha (\alpha \leq 180^\circ)$ е ъгълът между векторите \vec{r} и \vec{F} , $R = r \sin \alpha$ е разстоянието от точка O до линията на действие на силата \vec{F} . От фиг. 5.8.б се вижда, че ако се премества приложената точка A на силата по линията на действие, без да се променя големината и посоката на силата, моментът \vec{M} на силата спрямо точка O не се изменя.

По аналогичен начин се въвежда величината момент на импулса. Нека в даден момент частица с маса m има радиус-вектор \vec{r} , скорост \vec{v} и импулс $\vec{p} = m\vec{v}$, определени спрямо началото O . Векторното произведение

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \quad (5.12)$$

се нарича **момент на импулса на материалната точка спрямо началото O** (фиг. 5.9). Големината и посоката на момента на импулса \vec{L} се определят по същия начин, както големината и посоката на момента на силата \vec{M} .



Фигура 5.9

2.4. Сила на тежестта

Известно е, че всички тела се привличат от Земята. Силата на привличане между телата и Земята се нарича сила на тежестта \vec{G} . Тази сила има гравитационен характер и е насочена към центъра на Земята.

При свободно падане в близост до земната повърхност, всички тела са подложени на едно и също ускорение \vec{g} . Като приложим втория принцип на Нютон $\vec{F} = m\vec{a}$ и отчетем факта, че при свободно падане на ялото действа само силата на тежестта, получаваме

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (5.13)$$

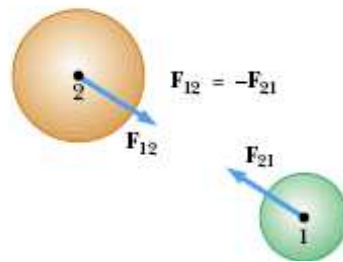
3. Трети принцип на механиката. Тегло и реакция на опората

Механичното действие на две тела едно върху друго, винаги има характер на взаимодействие. Според третия принцип на механиката, който е обобщение на опита

Силите на взаимодействие между две материални точки са равни по големина

противоположни по посока и действат в направление на правата съединяваща двете точки.

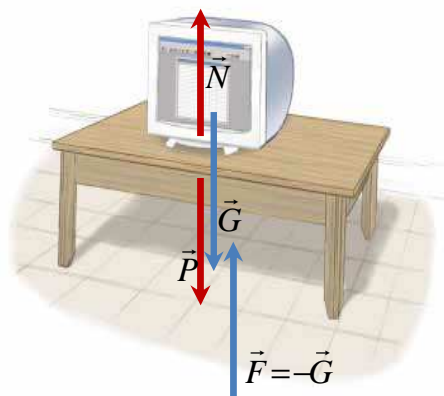
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (5.14)$$



Фигура. 5.10

Третият принцип на механиката може да се формулира и по следния начин: *всяко действие поражда равно по големина и противоположно по посока противодействие*. Силите на действие и противодействие са приложени към различни тела, поради което не се уравновесяват – фиг. 5.10.

Да разгледаме силите, действащи върху тяло, което е разположено върху подложка – фиг. 5.11.



Фигура. 5.11

На тялото действа сила на тежестта, породена от взаимодействието му със Земята. От своя страна, според третия принцип на механиката, тялото действа на Земята със същата по големина, но противоположно насочена сила $\vec{F} = -\vec{G}$, приложена в Земята. В резултат на тази сила Земята би следвала да получи ускорение към тялото. Но тъй като нейната маса е много по-голяма в сравнение с масата на тялото,

придобитото ускорение е пренебрежимо малко. Тялото не се ускорява и не се движи, тъй като то се удържа от масата. Следователно от втория принцип на динамиката на тялото би следвало действа друга сила от страна на масата, която да уравни силата на тежестта. Тази сила се нарича **реакция на опората** и се отбелязва с \vec{N} . Реакцията на опората е контактна сила и има електромагнитен характер. Според третия принцип на Нютон тялото също действа на масата със сила, равна по големина на реакцията на опората, насочена в противоположна посока, и приложена в масата. Тази сила се нарича **тегло на тялото** \vec{P} .

4. Сили на триене

Движението на телата в реални условия винаги е съпроводено с действие на сили на триене. Триенето между повърхностите на две твърди тела, в отсъствие на течен или газов слой между тях, се нарича **сухо триене**, а триенето между два слоя от течност или газ – **вътрешно** или **вискозно триене**.

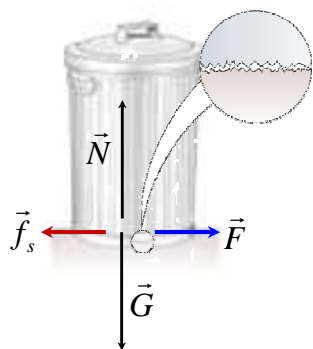
При движението на твърдо тяло във флуид (течност или газ) се извършва вискозно триене между прилепналия към тялото слой от флуида и заобикалящия го флуид. Обикновено силите на вискозно триене са значително по-малки от силите на сухо триене. Затова тънък слой от смазка, който прави триенето между две повърхности отчасти вискозно, води до намаляване на силите на триене.

Първата техническа революция е свързана с откриването на колелото, защото силите на триене при търкаляне са значително по-малки от силите на триене при хлъзгане. В процеса на еволюцията природата се е изявила като „талантлив инженер“, който умело използва силите на триене в своите биологически конструкции. Например, когато ходим или бягаме, ние не се безпокоим за силите на триене в ставите. Ставите на човека и другите бозайници се смазват от синовиална течност, която се изцежда през порите на ставните хрущяли. Затова при движение триенето в ставите е малко. В покой синовиалната течност се абсорбира обратно от хрущяла и триенето рязко нараства, което спомага за поддържане на фиксираното положение.

Силите на триене възникват в резултат на електромагнитното взаимодействие между молекулите на триещите се повърхности.

Да разгледаме тяло с маса m , поставено на хоризонтална поставка (фиг. 5.12.а). Силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$, която действа на тялото, се уравнива от силата на нормална реакция на опората \vec{N} и тялото се намира в покой. Да приложим към тялото хоризонтална сила \vec{F} и постепенно да увеличаваме нейната големина (фиг. 5.12.б). При

малки стойности на \vec{F} тялото остава в покой, което показва, че между допиращите се повърхности възникват сили на триене. Поставката действа на тялото със сила на триене \vec{f}_s , която е равна по големина и противоположна по посока на движещата сила \vec{F} . Силата на триене \vec{f}_s се нарича **сила на триене при покой** или **сила на статично триене**. В зависимост от големината на движещата сила \vec{F} силата на триене при покой може да се изменя от нула до някаква максимална стойност $f_{s,max}$.

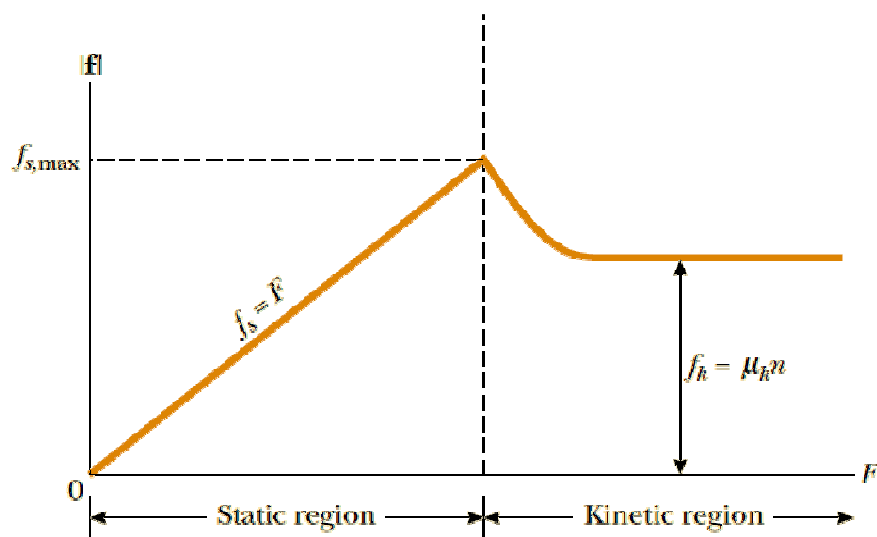


Фиг. 5.12.а



Фиг. 5.12.б

Когато силата F стане по-голяма от $f_{s,max}$, тялото започва да се движи и **възниква сила на триене при хлъзгане** \vec{f}_k , която се нарича още **сила на кинетично триене**. На фиг 5.13 е представена зависимостта на силата на триене от приложената външна сила.



Фигура. 5.13

Експериментално са установени следните закономерности:

1. Максималната сила на триене при покой не зависи от площта на триещите се повърхности.

2. За дадена двойка повърхности максималната сила на триене при покой е правопрпорционална на големината на силата на нормална реакция на опората N

$$f_{smax} = k_s N \quad (5.15)$$

Коефициентът на пропорционалност k_s се нарича *коефициент на статично триене*. Той зависи от вида и състоянието на триещите се повърхности.

3. Силата на триене при хлъзгане е по-малка от максималната сила на статично триене – $f_k < f_{smax}$. Тя не зависи от площта на триещите се повърхности и е правопрпорционална на големината на силата на нормална реакция на опората

$$f_k = k_k N \quad (5.16)$$

където k_k е коефициент на кинетично триене, който подобно на k_s зависи от вида и състоянието на триещите се повърхности.

4. Коефициентът на кинетично триене не зависи от скоростта на движение.

В редица случаи разликата между коефициентите на статично и кинетично триене е малка. Затова в много от задачите по механика тя се пренебрегва и се използва един и същи коефициент на триене k – както за определяне на максималната сила на триене при покой, така и на силата на триене при хлъзгане.