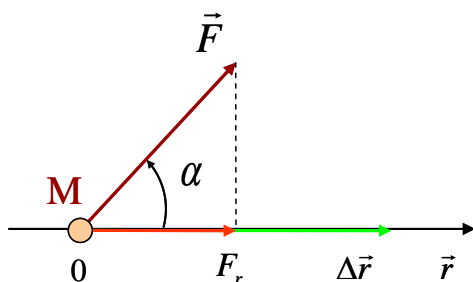


ТЕМА 5. РАБОТА И МЕХАНИЧНА ЕНЕРГИЯ. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗВАНЕ НА МЕХАНИЧНАТА ЕНЕРГИЯ

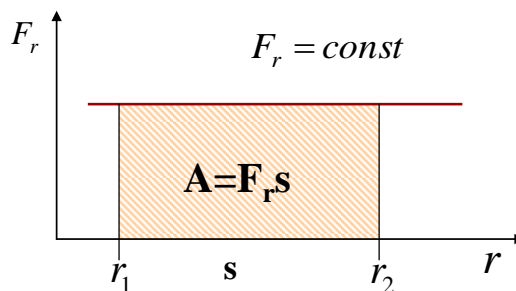
1. Работа и кинетична енергия

1.1. Работа на постоянна сила при праволинейно движение

Нека материална точка се движи праволинейно. На тялото действа постоянна по големина и посока сила \vec{F} , сключваща ъгъл α с посоката на движение. За определен период от време тялото извършва преместване $\Delta\vec{r}$ (фиг. 5.1а).



Фиг. 5.1 а



Фиг. 5.1 б

Величината

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha \quad (5.1)$$

равна на скаларното произведение на силата по преместването, се нарича *работа на силата*. Тя се представя също във вида:

$$A = F_r s \quad (5.2)$$

където $F_r = |\vec{F}| \cos \alpha$ е проекцията на вектора \vec{F} върху посоката на преместването. При праволинейно движение в една посока големината на преместването е равна на изминатия път: $s = |\Delta\vec{r}|$. Работата е скаларна алгебрична величина, която може да има както положителни, така и отрицателни стойности. Работата е положителна, когато посоката на силата сключва остър ъгъл с посоката на преместването ($\alpha < 90^\circ$). При $\alpha < 90^\circ$ $\cos \alpha > 0$ и работата е отрицателна. Когато силата е перпендикулярна на преместването ($\alpha = 90^\circ$), тя не извършва работа.

Единицата за работа се нарича *джаул*. Съгласно (5.1) 1 джаул (1 J) е работата, която извършва постоянна сила с големина 1 нютон (1 N), насочена успоредно на преместването при преместване на тялото с един метър (1 m):

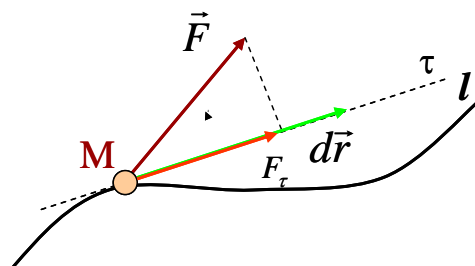
$$1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m} \quad (5.3)$$

На фиг. 5.1 б е показана графиката на успоредната на преместването компонента F_r на силата като функция от изминатия път s . Площта на защрихования правоъгълник е:

$$F_r s = A \quad (5.4)$$

1.2. Работа на променлива сила

Да разгледаме общия случай, когато материална точка се движи по криволинейна траектория. Елементарното преместване $d\vec{r}$, което точката извършва за безкрайно малък интервал от време dt , е насочено по допирателната към траекторията. На материалната точка действа сила \vec{F} – фиг. 5.2. Величината



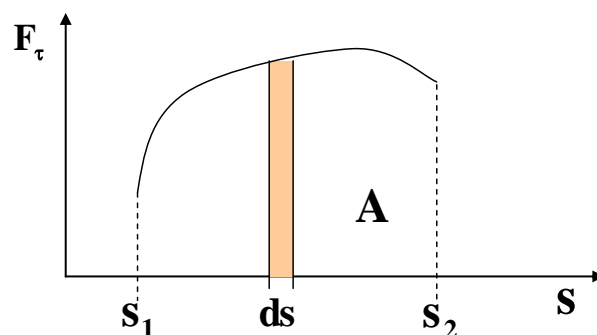
Фиг. 5.2

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.5)$$

се нарича *елементарна работа* на силата \vec{F} , извършена при елементарното преместване $d\vec{r}$. Да разложим силата \vec{F} на две компоненти, насочени съответно към тангентата и нормалата към траекторията: $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$. Компонентата \vec{F}_n , която е перпендикулярна на елементарното преместване $d\vec{r}$, не извършва работа. Следователно елементарната работа е:

$$dA = \vec{F}_\tau \cdot d\vec{r} = F_\tau |d\vec{r}| = F_\tau ds \quad (5.6)$$

На фиг. 5.3 е представена графично тангенциалната компонента F_τ на силата като функция на пътя s . Работата, извършена при изминаването на път между точките 1 и 2 се задава с определения интеграл



Фиг. 5.3

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds \quad (5.7)$$

Когато на материалната точка действат едновременно няколко сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, общата работа е сума от работата на всяка една от силите: $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Работата е положителна в тези участъци на траекторията, където векторът на елементарното преместване $d\vec{r}$ и компонентата \vec{F}_τ на силата имат еднакви посоки. Когато векторите $d\vec{r}$ и \vec{F}_τ са с противоположни посоки, работата е отрицателна.

1.3. Мощност

Величината

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (5.8)$$

т.е. работата, извършена за единица време, се нарича *мощност*.

Единицата за мощност в *ват* (W). Съгласно с уравнение (5.8) мощността е 1 ват (1 W), когато за време 1 секунда (1 s) се извършва работа 1 джаул (1 J), т.е. 1 W=1 J/s. Заместваме елементарната работа от уравнение (5.6) в уравнение (5.8) и получаваме:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.9)$$

Следователно мощността е равна на скаларното произведение на действащата сила по скоростта на материалната точка.

1.4. Кинетична енергия

Нека материална точка с маса m извършва криволинейно движение под действие на сила \vec{F} . Разлагаме силата \vec{F} на две (тангенциална и нормална) компоненти – фиг. 5.2. Съгласно с втория принцип на механиката $\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau$, където \vec{a}_τ е тангенциалното ускорение на материалната точка. В уравнение (5.7) заместваме $F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$ и пресмятаме работата на силата \vec{F} , когато материалната точка се придвижва по траекторията от положение 1 до положение 2

$$A = \int_1^2 \left(m \frac{dv}{dt} \right) ds = \int_{v_0}^v mvdv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \quad (5.10)$$

където $\frac{ds}{dt} = v$ е големината на моментната скорост, а v_0 и v са съответно големините на скоростта в началната точка 1 и в крайната точка 2.

Величината

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (5.11)$$

се нарича *кинетична енергия* на материалната точка. Измерва се в същите мерни единици, както и работата – в джаули (J). Тя е скаларна величина, която има винаги положителни стойности или е равна на нула, ако тялото е в покой.

Уравнението (5.10) може да се запиши във вида:

$$A = E_k - E_{k0} \quad (5.12)$$

Полученото уравнение изразява закона за изменение на кинетичната енергия, който гласи:

Изменението на кинетичната енергия на едно тяло (материална точка) е равно на работата на равнодействащата на всички сили, приложени към тялото.

Уравнение (5.12) се записва също така във вида

$$E_k = E_{k0} + A \quad (5.13)$$

Следователно крайната кинетична енергия е равна на началната кинетична енергия плюс работата, извършена върху тялото. Ако в началния момент тялото е в покой, а в крайния момент се движи със скорост v и има кинетична енергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$, уравнение (5.13) получава вида

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = A \quad (5.14)$$

Следователно кинетичната енергия е равна на работата, която трябва да се извърши от външна сила, за да се ускори едно тяло от покой до скорост v .

1.5. Предаване и преобразуване на енергията

С помощта на уравнение (5.13) ще проследим как се изменя кинетичната енергия на едно тяло в резултат на взаимодействието му с други тела. Когато силите, приложени към тялото, извършват положителна работа, кинетичната енергия на тялото нараства и то започва да се движи с по-голяма скорост.

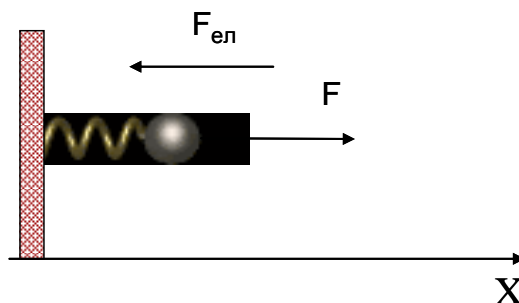
Когато извършената върху тялото работа е отрицателна, кинетичната му енергия намалява и то забавя движението си. Да разгледаме следния пример: на топче, закачено за свободния край на пружина е придадена начална скорост v_0 и то притежава

кинетична енергия $E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}$ – фиг. 5.4.

То започва да се движи и да разтяга пружината, към която е закрепено. Еластичната сила \vec{F}_e , с която пружината действа на топчето, е насочена обратно на посоката на неговото преместване \vec{x} и пружината извършва отрицателна работа. В резултат на тази работа топчето се забавя.

Силата \vec{F} , с която топчето действа на пружината, е насочена по посока на

преместването на края на пружината, поради което работата на топчето върху пружината е положителна. По модул отрицателната работа на пружината е равна на положителната работа на топчето. Тялото, което извършва положителна работа, отдава енергия, а тялото, което извършва отрицателна работа, получава енергия. В случая топчето извършва положителна работа за сметка на кинетичната си енергия: топчето отдава кинетичната си енергия, която в резултат на извършената от него положителна работа за разтягане на пружината се преобразува в енергия на деформираната пружина.

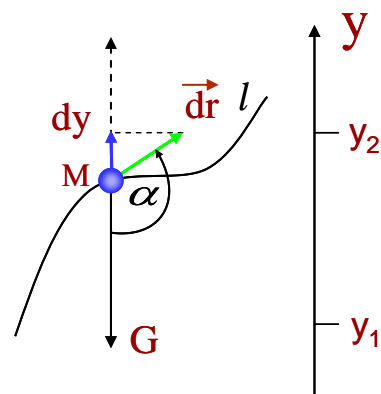


Фиг. 5.4

2. Потенциална енергия

2.1. Работа на силата на тежестта

Да разгледаме материална точка с маса m , която се движи близо до земната повърхност – фиг. 5.5. Ще изчислим работата, която извършва силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$ при преместване на материалната точка от началното положение 1 с координати (x_1, y_1) в положение 2 с координати (x_2, y_2) . Представяме вектора на силата на тежестта и вектора на елементарното преместване $d\vec{r}$ чрез техните компоненти спрямо координатна система Oxy : $\vec{G} = -mg\vec{j}$; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.



Фиг. 5.5

Елементарната работа е

$$dA = \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = -mgdy$$

Интегрираме в граници и определяме работата на силата на тежестта

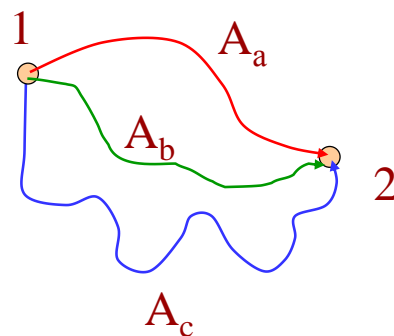
$$A = -\int_{y_1}^{y_2} mgy = -mg(y_2 - y_1) = -mgh \quad (5.15)$$

където $h = (y_2 - y_1)$ е изменението на височината на материалната точка над земната повърхност. От получения резултат следва, че *работата на силата на тежестта не зависи от траекторията, по която се извършва преместването, а се определя единствено от разликата във височините на началното и крайното положение.* Силата на тежестта върши отрицателна работа при издигане на материалната точка и положителна при спускане.

2.2. Консервативни сили

Сили, чиято работа не зависи от траекторията, по която се движи материалната точка, а само от началното и крайното положение, се наричат *консервативни сили*. На фиг. 5.6 са показани три произволно избрани траектории, по които материална точка, на която действа сила \vec{F} , се премества от положение 1 в положение 2. Да означим с A_a , A_b и A_c работата на силата \vec{F} в трите случая. Силата \vec{F} е консервативна ако $A_a = A_b = A_c = A_{12} = \text{const}$.

От определението за консервативна сила следва, че нейната работа по затворен контур е равна на нула. Действително, ако материалната точка отначало премине от положение 1 в положение 2 по траекторията a , консервативната сила \vec{F} извършва работа $A_a = A_{12}$. След това материалната точка се връща отново в положение 1 например по траектория c , при което силата \vec{F} извършва работа



Фиг. 5.6

$A'_c = -A_c = -A_{12}$. Общата работа по затворената траектория е $A = A_a + A'_c = 0$.

Понеже началното и крайното положение и траекториите са избрани произволно, полученият резултат е в сила за работата на консервативна сила по произволен затворен контур L . Математически той се изразява с уравнението:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.16)$$

Не всички сили са консервативни. Например работата на силите на триене и съпротивление \vec{f}_k по затворен контур винаги е отрицателна: $\oint_L \vec{f}_k \cdot d\vec{r} < 0$. Такива сили се наричат *дисипативни сили*. В резултат на тяхната работа механичната енергия се превръща във вътрешна енергия (отделя се количество топлина).

Сили, които са насочени винаги перпендикулярно на скоростта на материалната точка, се наричат *жироскопични сили*. Примери за жироскопични сили са кориолисовата сила, магнитната сила, действаща на заредена частица, движеща се в магнитно поле. Тъй като са перпендикулярни на преместването, работата на жироскопичните сили винаги е нула.

2.3. Потенциална енергия

Материална точка, на която действа консервативна сила \vec{F} , се премества от положение **1** с радиус вектор \vec{r}_1 в положение **2** с радиус-вектор \vec{r}_2 . Тъй като работата A_{12} на консервативната сила зависи единствено от началното и от крайното положение, тя може да се представи като изменение на една функция на положението на материалната точка $W(\vec{r})$

$$A_{12} = W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_2) = -\Delta W \quad (5.17)$$

$$\Delta W = -A_{12} \quad (5.18)$$

Величината W , която е функция единствено на координатите на материалната точка и не зависи от нейната скорост, се нарича *потенциална енергия на материалната точка в полето на консервативната сила \vec{F}* . По определение изменението на потенциалната енергия е равно на взетата със знак „-“, работа на консервативната сила. Когато точките 1 и 2 са безкрайно близо една до друга, уравнение (5.18) приема вида:

$$dW = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.19)$$

където dA е елементарната работа на консервативната сила \vec{F} при преместване $d\vec{r}$. Според уравнение (5.7) изменението на потенциалната енергия между положение 1 и положение 2 е

$$\Delta W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.20)$$

От уравнения (5.18) и (5.19) следва, че потенциалната енергия може да се определи с точност до константа. За еднозначното ѝ определяне трябва да се приеме, че в дадено положение на материалната точка потенциалната ѝ енергия е равна на нула.

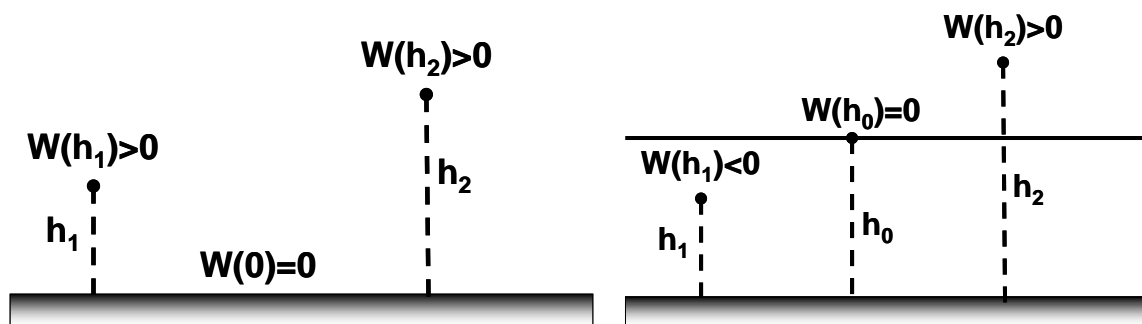
Изборът на точката (или точките), в която потенциалната енергия е нула, може да стане по различен начин. Например потенциалната енергия на материална точка в полето на силата на тежестта е

$$A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = W(y_1) - W(y_2) \quad (5.21)$$

Ако приемем, че потенциалната енергия е нула, когато материалната точка се намира на земната повърхност, т.е. при $y_1 = 0$, тогава потенциалната енергия на височина $h = y_2 - 0 = y_2$ е

$$W(y_2) = mgy_2 \quad (5.22)$$

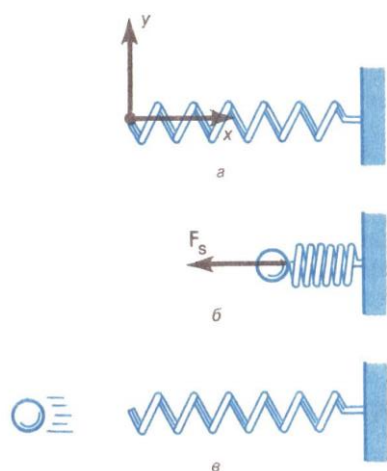
$$W = mgh \quad (5.23)$$



Фиг. 5.7а

Фиг. 5.7б

При такъв избор на нулевото равнище всички тела, които са издигнати нас земната повърхност, имат положителна потенциална енергия – фиг. 5.7а. Нулевото равнище можем да изберем и по друг начин. Например да приемем, че потенциалната енергия е нула на някаква височина h_0 над земната повърхност. Тогава телата, които се намират на по-голяма височина от h_0 имат положителна потенциална енергия, а тези, за които $h < h_0$, потенциалната енергия е отрицателна (фиг. 5.7б).



Фиг. 5.8

Ще разгледаме още един вид потенциална енергия, характерен за еластичните тела, и имащ много практически приложения. Да разгледаме пружина, единият край на който е неподвижно закрепен (фиг. 5.8). В свито или в разтегнато състояние пружината притежава потенциална енергия, тъй като когато се освободи, тя може да извърши работа над топка, както е показано на фиг. 5.8. Тази потенциална енергия се дължи на еластичната сила, която според закона на Хук е $\vec{F}_e = -k\vec{r}$. Тогава според (5.19) изменението на потенциалната енергия е

$$\Delta W = -\int_1^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_1^2 k\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} k(r_2^2 - r_1^2) = W(\vec{r}_2) - W(\vec{r}_1) \quad (5.24)$$

Удобно е да положим че когато пружината не е деформирана ($r_1 = 0$), нейната потенциална енергия е нула. Тогава потенциалната енергия при деформация $\vec{r}_2 = \vec{r}$ е

$$W = \frac{1}{2}kr^2 \quad (5.25)$$

2.4. Механична енергия

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на материална точка се нарича *механична енергия E на тялото*:

$$E = E_k + W \quad (5.26)$$

Нека на материалната точка действат както консервативни, така и неконсервативни сили. Тогава съгласно със закона за изменение на кинетичната енергия $A_{\text{конс.}} + A_{\text{неконс.}} = \Delta E_k$, където $A_{\text{конс.}}$ е работата на консервативните сили, а $A_{\text{неконс.}}$ – на неконсервативните сили. Тъй като по определение $A_{\text{конс.}} = -\Delta W$, горното уравнение може да се запише във вида:

$$A_{\text{неконс.}} = \Delta E_k + \Delta W = \Delta E \quad (5.27)$$

Уравнение (5.27) изразява закона за изменение на механичната енергия на една материална точка: *изменението на механичната енергия ΔE е равно на работата на неконсервативните сили, които действат на материалната точка*.

С въвеждането на потенциалната енергия отпада необходимостта да се пресмята непосредствено работата на консервативните сили – това става чрез отчитане на изменението на потенциалната енергия.

3. Закон за запазване на енергията

3.1. Енергия на система.

Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на всички материални точки от една механична система се нарича *механична енергия на системата*.

$$E = E_k + W, \quad (5.28)$$

където $E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki}$ е кинетичната енергия, а $W = \sum_{i=1}^N W_i$ – потенциалната енергия на системата (E_{ki} е кинетичната енергия на i -тата частица, а W_i е потенциалната ѝ енергия с всички останали частици от системата). Законът за изменение на механичната енергия на една материална точка се обобщава за механична система:

Изменението на механичната енергия ΔE на система от материални точки е равно на работата $A_{\text{неконс.}}$ на неконсервативните сили, действащи на системата.

$$A_{\text{неконс.}} = \Delta E \quad (5.29)$$

3.2. Закон за запазване на механичната енергия

Да разгледаме затворена механична система, в която частиците си взаимодействат само с консервативни сили. Тогава $A_{\text{неконс.}} = 0$ и от уравнение (5.29) следва, че $\Delta E = 0$, или

$$E = E_k + W = \text{const} \quad (5.30)$$

Уравнение (5.30) изразява закона за запазване на механичната енергия, който гласи:

Механичната енергия на затворена система, в която действат само консервативни вътрешни сили, не се изменя с течение на времето.

В резултат на работата на вътрешните консервативни сили става само непрекъснато превръщане на кинетичната енергия в потенциална и обратно, докато пълната енергия се запазва.

3.3. Превръщане на енергията

Във всички реални макроскопични механични системи освен консервативни сили, действат и неконсервативни сили – например дисипативни сили на триене и съпротивление. Дисипативните сили извършват отрицателна работа и съгласно с уравнение (5.29) механичната енергия на системата намалява. В резултат на работата на силите на триене става превръщане на механичната енергия в топлинна енергия – триещите се тела се загряват.

Класическата механика разглежда движението на макроскопичните тела, т.е. на телата, които са изградени от огромен брой микрочастици (молекули и атоми). Атомите и молекулите са в състояние на непрекъснато вътрешно движение и взаимодействие, което обаче не се отчита от класическата механика. Затова енергията на една система от макроскопични тела може условно да се раздели на механична и немеханична енергия. Последната не зависи от скоростите и взаимното положение на телата от системата, а се определя от вътрешното движение и взаимодействие между градивните им частици. Съществуват различни видове немеханична енергия – топлинна енергия, химична енергия, ядрена енергия, енергия на топлинното излъчване и др. От гледна точка на съвременната наука всички форми на немеханична енергия се свеждат до кинетична и потенциална енергия на микрочастици от различни структурни равнища на материята. Например топлинната енергия на идеален газ е сума от кинетичните енергии на хаотичното топлинно движение на молекулите на газа. Химичната енергия се определя от кинетичната енергия на градивните частици на атомите и молекулите (ядра и електронни обвивки) и потенциалната енергия на тяхното електрично взаимодействие. Ядрената енергия е сума от кинетичната и потенциалната енергия на градивните частици на атомните ядра (протони и неутрони), които взаимодействат с ядрени и електрични сили.

Процесите в неживата и живата природа са свързани с непрекъснато преобразуване на енергията от един вид в друг.

3.4. Запазване на енергията

Всички експериментални изследвания в различни области на физиката, химията и биологията показват, че енергия не се създава и не изчезва, а в резултат на различни взаимодействия тя само се преобразува от един вид в друг вид. В сила е общ закон за запазване на енергията:

Пълната енергия на една изолирана система не се изменя.

Под изолирана система се разбира всяка съвкупност от макротела или микрочастици, която, подобно на затворена механична система, не е подложена на външни силови въздействия. Освен това изолираната система не обменя топлинна енергия или излъчване с околните тела. Вътре в системата може да протичат различни процеси – механични, химични, биологични и др., при които се превръщат сложни превръщания на енергията от един вид в друг, но пълната енергия на системата не се променя.

Законът за запазване на енергията е фундаментален закон, който е в сила не само в механиката, но и при всички други процеси в природата.