ТЕМА 6: МЕХАНИКА НА ИДЕАЛНО ТВЪРДО ТЯЛО

1. Идеално твърдо тяло. Видове движения. Основни кинематични величини при въртене на идеално твърдо тяло около постоянна ос.

Идеално твърдо тяло се нарича съвкупността от материални точки, разстоянията между които не се изменят с течение на времето.

От определението следва, че при действие на външни сили идеално твърдото тяло запазва формата и обема си. т.е. не се деформира. Идеално твърдото тяло е абстрактно понятие, което се въвежда в механиката за опростяване решаването на определени физични проблеми. Очевидно е, че няма смисъл да се проследява движението на всяка точка от тялото, след като разстоянията между точките се запазват постоянни с времето. Достатъчно е да се избере една точка от него, която да описва движението му просто и нагледно. Тази точка се нарича център на масите (център на инерцията). *Център на масите е такава въображаема точка* C*, положението на която характеризира разпределението на масите в една система и чийто радиус-вектор се определя от уравнението*:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad 6.1$$

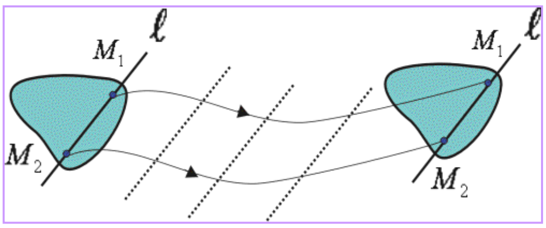
където m_i и $\vec{r}_i$ са съответно масата и радиус-вектора на i-тата точка, а n – броят на материалните точки в системата; $M = \sum m_i$ – масата на системата.

Движенията на твърдите тела са сложни, но винаги едно сложно движение може да се сведе до по-прости. Най-простите движения за твърдите тела са две – постъпателно и въртеливо.

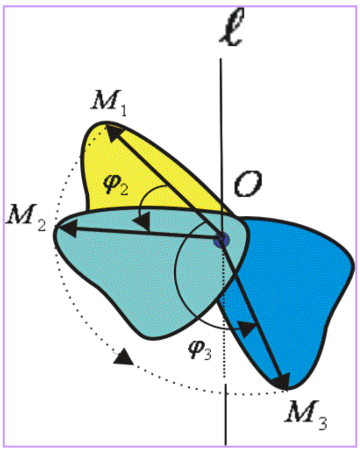
При *постъпателно движение* (нарича се още *транслационно*) всички точки от тялото се движат с еднакви скорости и описват еднакви траектории, успоредни една на друга (фиг. 6.1). Ето защо за описването на постъпателното движение на едно твърдо тяло е достатъчно да се познава законът за движение на неговия център на масите:

$$M\vec{a} = F;\; M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F} \qquad (6.2)$$

където M е масата на твърдото тяло, $\vec{F}$ – резултантната сила, а $\vec{r}_C$ и $\vec{v}_C$ – радиус-векторът и скоростта на центъра на масите му.



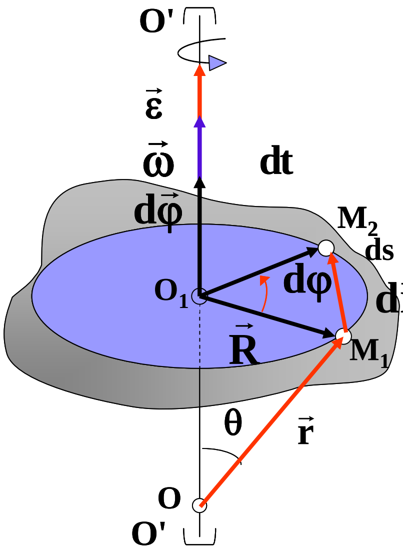
Фиг. 6.1



Фиг. 6.2

Въртеливите движения са много разнообразни, но ние ще се спрем на най-простото от тях – *въртене на твърдо тяло около постоянна ос* (нарича се още *двумерно въртене*), фиг. 6.2. При това въртене всички точки от тялото описват окръжности, чиито центрове лежат върху една права, наречена *ос на въртене* (ℓ). Равнините на окръжностите, по които се извършва движението, са успоредни по между си и са перпендикулярни на оста ℓ на въртенето. Оста на въртене може да минава през центъра на тежестта на тялото, но може и да лежи на някакво разстояние от нея.

Най-напред ще разгледаме по-подробно въртенето на твърдо тяло около ос, минаваща през центъра на тежестта му. Основните кинематични величини, които характеризират това движение, са ъгъл на завъртане $d\vec{\varphi}$, ъглова скорост $\vec{\omega}$ ъглово ускорение $\vec{\varepsilon}$.



Фиг. 6.3

Нека разгледаме произволна точка от тялото, която в началния момент от време t се намира в положение M_1 (фиг. 6.3). За интервал от време dt тя се завърта на ъгъл $d\varphi$ и заема новото положение M_2. При това завъртане точката извършва постъпателно движение по окръжност с радиус R с линейна скорост $\vec{v}$. За разглеждания интервал от време изминатия път е равен на дъгата M_1M_2, като е изпълнено равенството $ds = Rd\varphi$. Заедно с точката M се завъртат и всички точки от тялото, намиращи се на различни разстояния от оста на въртене. Ъгълът на завъртане е един и същ за всички точки, но изминатите от тях пътища са различни. Следователно *ъгловата скорост и ъгловото ускорение, които представляват производни на ъгъла на завъртане, са еднакви за всички точки от тялото*. Не може да се каже същото за линейните скорости на различни точки от тялото. Точките, които са по-близо до оста на въртене, ще се движат по-бавно, а тези, които са по-далеч – по-бързо.

Ще изразим връзките, които съществуват между ъгловите и линейните кинематични величини. Да въведем отправна система с начало точка O (лежаща на оста на въртене $O'O'$ и нека $\vec{r}$ е радиус-векторът на точката M_1. Да означим ъгълът между $\vec{r}$ и оста на въртене с θ. Големината на елементарното преместване $d\vec{r}$ е равна на изминатия от точката път ds:

$$|d\vec{r}| = ds; \quad ds = Rd\varphi \Rightarrow dr = r\sin\theta d\varphi \tag{6.3}$$

От определението за векторно произведение на два вектора елементарното преместване $d\vec{r}$ може да се представи като векторното произведение на елементарния ъгъл на завъртане $d\vec{\varphi}$ и радиус-векторът на точката:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{R} \tag{6.4}$$

Линейната скорост на материалната точка се дефинира като първата производна на преместването. Следователно:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{6.5}$$

Аналогично за връзката между линейното и ъгловото ускорение получаваме:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (6.6)$$

Първото събираемо представлява тангенциалното ускорение $\vec{a}_\tau$ на точката, а второто – нормалното ускорение $\vec{a}_n$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau, \qquad \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{a}_n \quad (6.7)$$

2. Кинетична енергия на идеално твърдо тяло при двумерно въртене. Инерчен момент на идеално твърдо тяло

Всяка точка, която се движи, притежава кинетична енергия. Твърдото тяло, като съвкупност от материални точки, свързани здраво по между си, при въртене също ще притежава някаква кинетична енергия. Да допуснем, че тялото, което се върти, се състои от n на брой материални точки. Всички те се въртят с еднаква ъглова скорост и имат различни линейни скорости. Означаваме с m_i и v_i съответно масата и линейната скорост на i-тата точка. Тогава нейната кинетична енергия може да се запиши по следния начин:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i R^2 \omega^2}{2} = \frac{I_i \omega^2}{2} \quad (6.8)$$

където с I_i е означена една нова величина, характеризираща двумерното въртене на материалната точка. Тази величина се нарича *инерчен момент на материална точка спрямо дадена ос на въртене* и се определя от следния израз:

$$I_i = m_i R_i^2 \quad (6.9)$$

За да се определи инерчния момент на тялото, трябва да се извърши сумиране по броя n на точките:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \quad (6.10)$$

В такъв случай пълната кинетична енергия на тялото е:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{\omega^2 I}{2} \quad (6.11)$$

Изразът за кинетичната енергия на въртящо се тяло има подобен вид на този за кинетична енергия при постъпателното движение. Кинетичната енергия се определя от произведението на инерчния момент на тялото и квадрата на неговата ъглова скорост, разделено на две.

Инерчният момент е физична величина, която характеризира разпределението на масите в едно твърдо тяло спрямо неговата ос на въртене. Числено тази величина се определя от сумата на произведенията от масите на отделните частици на тялото, разглеждани като материални точки, и квадратите на разстоянията на тези частици до оста на въртене. Аналогично на масата, *инерчният момент характеризира количествено свойството инертност при въртеливите движения*. Всяко тяло, независимо дали се върти или не, притежава определен инерчен момент по отношение на произволно избрана ос на въртене, както и всяко тяло, независимо дали се движи или е в покой, притежава маса. Мерната единица за инерчен момент е килограм по квадратен метър [kg.m^2].

Инерчният момент зависи от формата, размерите на тялото и от избраните оси на въртене. При непрекъснато разпределение на масите в едно тяло сумата в (6.10) се заменя с интеграл. В такъв случай получаваме:

$$I = \int_V R^2 dm \tag{6.12}$$

където dm е масата на една безкрайно малка частица от тялото, а r – разстоянието между тази частица и оста на въртене. Интегрирането се извършва по целия обем V на тялото.

Инерчният момент на всяко тяло при въртене около ос, минаваща през неговия център на масите, се нарича собствен инерчен момент. Ако собственият инерчен момент на тялото е известен, инерчният му момент спрямо друга ос, която е успоредна на тази през центъра на масите му, се определя от теоремата на Щайнер: "*Инерчният момент на тяло спрямо произволна ос е равен на инерчният момент спрямо ос, минаваща през центъра на тежестта (наречен център на инерция) и успоредна на дадената, плюс произведението от масата на тялото и квадрата на разстоянието между двете оси*":

$$I = I_G + ma^2 \tag{6.13}$$

3. **Момент на сила. Работа при двумерно въртене на идеално твърдо тяло. Основно динамично уравнение при двумерно въртене на идеално твърдо тяло**

Всяко движение на дадено тяло е свързано с действието на сили върху него. На материалните точки, които изграждат твърдото тяло, могат да действат две групи сили – вътрешни и външни. Вътрешните сили свързват системата от материални точки и я превръщат в едно цяло. Външните сили възникват поради взаимодействието между това тяло и кое да е друго. Следователно в сила е изразът:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{6.14}$$

където с $\vec{f}_i$ са означени вътрешните сили, действащи на i-тата частица от тялото, а с $\vec{F}_i$ – външните сили, действащи на същата частица. Съгласно третия принцип на механиката сумата от всички вътрешни сили трябва да бъде равна на нула. Ето защо окончателно получаваме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{6.15}$$

Силата $\vec{F}$ е резултантната на всички външни сили, действащи върху тялото.

Тъй като твърдите тела извършват най-общо два вида движения – постъпателни и въртеливи, ще се опитаме да разграничим и силите, пораждащи тези движения. Външните сили, чието направление на действие минава през центъра на масите, предизвикват постъпателното движение. *Въртеливите движения възникват като резултат от действието на външни сили, чието направление не пресича оста на въртене и не е успоредно на нея.*

Нека силата $\vec{F}$ е такава сила, приложена в точка P, която се намира на разстояние R от оста на въртене на дадено тяло и нека посоката на силата $\vec{F}$ сключва ъгъл γ с посоката на вектора $\vec{R}$ (фиг. 6.4). Величината

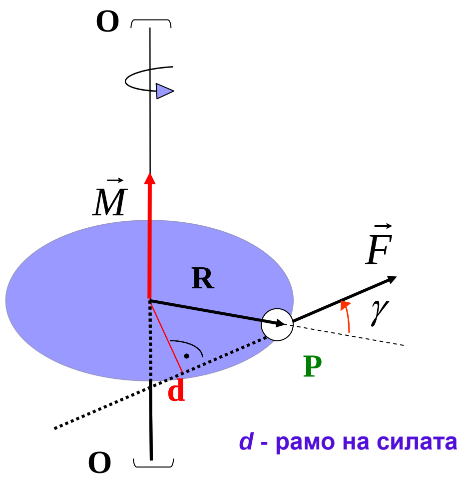
$$d = R\sin\gamma \tag{6.16}$$

се нарича рамо на силата $\vec{F}$. Това е най-малкото разстояние между правата, на която лежи силата, и оста на въртене.

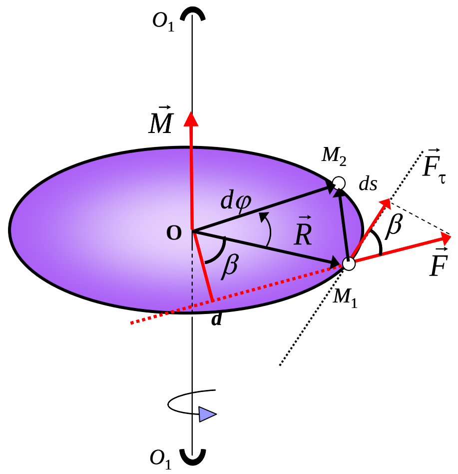
Векторното произведение

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \tag{6.17}$$

се дефинира като момент на силата $\vec{F}$. Измерва се в [N.m]. Моментът на силата е вектор, насочен по направлението на оста на въртене.



Фиг. 6.4



Фиг. 6.5

Тъй като частиците в твърдите тела са здраво свързани по между си, действието на приложената сила $\vec{F}$ се предава и на останалите частици, вследствие на което цялото тяло извършва въртене около оста OO, минава през центъра на масите му. За малък интервал от време dt точката P се завърта на малък ъгъл $d\varphi$, при което извършва елементарно преместване $d\vec{r}$, като изминава път ds. Работата на силата $\vec{F}$ е (фиг. 6.5):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\beta R d\varphi \tag{6.18}$$

Отчитайки, че $R\cos\beta = d$ и $M = Fd$, израз (6.18) може да се запиши във вида:

$$dA = Fd d\varphi = M d\varphi \tag*{$\boxed{(6.19)}$}$$

Тъй като векторите $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$ са успоредни, за елементарната работа при въртеливо движение може да се получи израз, аналогичен на този, за работата, извършвана от сила при постъпателно движение:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \tag{6.20}$$

Работата за краен интервал от време Δt е:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{t_1}^{t_2} M\omega dt \tag{6.21}$$

Вече знаем, че работата на една сила върху дадено тяло се изразходва за привеждане на съответното тяло в движение, т.е.

$$dA = dE_k \tag{6.22}$$

Заместваме (6.20) и (6.11) в (6.22)

$$M\,d\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{2I\omega d\omega}{2} \tag{6.23}$$

Разделяме двете страни на равенството на dt:

$$M\frac{d\varphi}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt}; \qquad \vec{M} = I\vec{\varepsilon} \tag{6.24}$$

Последната зависимост между момента на силата, инерчния момент на тялото и неговото ъглово ускорение е аналогично на уравнението на постъпателно движение $\vec{F} = m\vec{a}$ на материална точка и се нарича *основно динамично уравнение при двумерно въртене*.

4. Момент на импулса на тяло при въртене. Закони за изменение и за запазване момента на импулса. Свободни оси.

Нека диференцираме формулата $E_{ki} = \dfrac{I_i\omega^2}{2}$, определяща кинетичната енергия на една точка от въртящото се твърдо тяло, по ъгловата скорост ω:

$$\frac{dE_{ki}}{d\omega} = \frac{2I_i\omega}{2} = I_i\omega = L_i \tag{6.25}$$

Получаваме една нова величина която характеризира въртенето на отделна точка около постоянна ос и се нарича *момент на импулса на точката*. Тя е аналогична на импулса $\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{i}}$ на точката при постъпателното движение. Израз (25) може да се преобразува по следния начин:

$$L_i = \frac{m_i R_i^2 v_i}{R_i} = m_i R_i v_i = p_i R_i \tag{6.26}$$

Формула (6.26) показва връзката между момента на импулса на една точка при въртене и импулса на същата точка при постъпателно движение. Тъй като при всяко движение по окръжност е изпълнено условието $\vec{r}_i \perp \vec{p}_i$, моментът на импулса може да се представи като векторно произведение на двата вектора:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{6.27}$$

Мерната единица за момента на импулса е [kg.m^2/s]. Пълният момент на импулса на тялото се получава, като се сумират като се сумират моментите на всички точки, които го изграждат:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = I\vec{\omega} \tag{6.28}$$

Нека диференцираме (6.28) по времето:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \tag{6.29}$$

Получихме нова зависимост, която е аналогична на втория принцип на механиката. На импулса $\vec{p}$ на точката при постъпателно движение съответства моментът на импулса $\vec{L}$ при въртене, а на равнодействащата сила $\vec{F}$ съответства пълния момент на силите $\vec{M}$. Зависимостта (6.29) показва, че *пълният въртящ момент на силите, действащи на твърдото тяло, е равен на изменението на неговия пълен момент на импулса за единица време*. Ако на тялото не действат външни сили, тогава $\vec{M} = 0$ и изменението на момента на импулса също ще бъде равно на нула. Следователно моментът на импулса на тялото ще се запазва постоянен с времето:

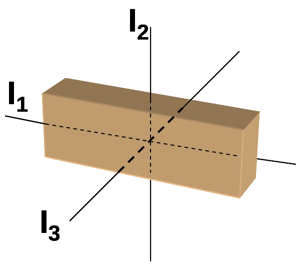
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = \text{const} \tag{6.30}$$

Изразите (6.29) и (6.30) изразяват законите за изменение и за запазване момента на импулса на твърдо тяло при въртене около постоянна ос.

Между величините, характеризиращи постъпателното движение на материална точка, и тези. И тези, характеризиращи двумерното въртене на твърдо тяло, съществува аналогия. В таблицата са показани еквивалентните величини при двата вида движения.

Постъпателно движение	**Въртеливо движение**
Преместване $\vec{r}$	Ъгъл на завъртане $\vec{\varphi}$
Скорост $\vec{v}$	Ъглова скорост $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a}$	Ъглово ускорение $\vec{\varepsilon}$
Сила $\vec{F}$	Момент на сила $\vec{M}$
Маса m	Инерчен момент I
Импулс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент на импулса $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Уравнение на движение $\vec{F} = m\vec{a}$; $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	Уравнение на движение $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$; $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
Закон за запазване на импулса $\vec{p} = \text{const}$	Закон за запазване момента на импулса $\vec{L} = \text{const}$
Кинетична енергия $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$	Кинетична енергия $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$
Работа $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Работа $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$

Двумерното въртене на телата намира широко приложение в техниката при различни въртящи се механизми и системи. Всяко тяло може да се върти около безброй много оси, прекарани през центъра на тежестта му. Оказва се, обаче, че сред всички възможни оси съществуват такива, които запазват ориентацията си в пространството при отсъствие на външно въздействие. Тези оси се наричат *свободни оси на въртене*. Устойчивостта на въртене на едно тяло може да не е еднаква за всички такива оси. Нека разгледаме един правоъгълен паралелепипед и построим трите му главни оси (фиг. 6.6).



$$I_1 \leq I_2 \leq I_3$$

Фиг. 6.6

Спрямо оста 1 паралелепипедът има максимален инерчен момент, спрямо оста 3 – минимален. Най-устойчиво е въртенето на тялото около оста 1. В този случай ако външна сила отклони паралелепипеда от това положение, в него се пораждат центробежни сили, които го връщат обратно в изходното положение (това е свързано с максималния инерчен момент, който е мярка за инертността на въртящите се тела). При въртене на тялото около оста 3 то е устойчиво само при отсъствие на външно въздействие.