ТЕМА 3: ДИНАМИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

„Законите на механиката държат под юзди инженерите и изобретателите, за да не обещават на себе си и на другите невъзможни неща.”

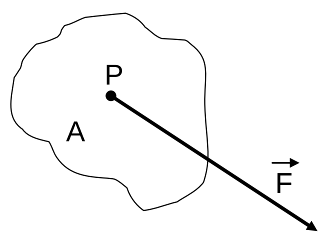
Леонардо да Винчи

1. Първи принцип на механиката

1.1. Сила

Когато едно тяло действа на друго, то второто тяло получава определено ускорение. Ясно е, че действието на едно тяло върху друго се характеризира с определена посока. Ще считаме, че тази посока съвпада с посоката на създаденото от действието ускорение.

Физичната величина, която характеризира взаимодействията на телата в механиката се нарича сила. Силата е *векторна величина* – характеризира се с големина, посока и приложна точка – фиг. 3. 1.



Фиг. 3. 1

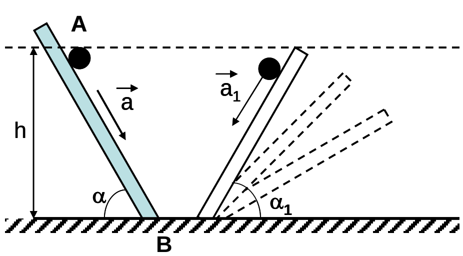
Ако на едно тяло действат няколко сили, то действието им може да се замени с тяхната *равнодействаща* (*резултантна*). Равнодействаща $\vec{F}$ на няколко сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ е равна на тяхната векторна сума:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad 3.1$$

Ще казваме, че няколко сили, действащи на едно тяло, се *уравновесяват*, ако тяхната равнодействаща е равна на нула.

1.2. Закон на Галилей за движението по инерция

От казаното дотук не става ясно каква е зависимостта между дадена сила и създаденото от нея ускорение. За да отговори на този въпрос, Галилей е направил следния опит:



Фиг. 3. 2

От едно и също място **A** на височина **h** (фиг. 3. 2) той пускал многократно едно топче да се движи без начална скорост надолу по наклонена равнина AB. След като достигне долния край B, топчето започва да се изкачва по втора наклонена равнина, движейки се с ускорение $\vec{a}_1$. Галилей променял ъгъла α_1 на втората наклонена равнина и измервал времето за движение на топчето по нея. Най-дълго се оказало това време, когато втората равнина заела хоризонтално положение. Като вземал след това различно гладки хоризонтални равнини, Галилей установил, че колкото е по-гладка хоризонталната равнина, толкова по-продължително е движението на топчето по нея. Този опитен факт му дал основание да предположи, че ако хоризонталната равнина е идеално гладка, т.е. ако не съществува сила на триене между нея и топчето, то би се движело по нея вечно праволинейно и равномерно. Като обобщил и анализирал резултатите от този и други опити, Галилей формирал следния закон: *Всяко тяло, на което не действат сили (или действащите на него сили се уравновесяват), се движи праволинейно и равномерно, или е в покой.* Този закон се нарича *закон на Галилей за движението по инерция*. Този фундаментален факт бележи началото на формирането на физиката като наука в съвременния смисъл на това понятие.

Тяло, което не взаимодейства с други тела, се нарича *свободно тяло*. Праволинейното равномерно движение на свободно тяло се нарича *движение по инерция*.

1.3. Първи принцип на механиката

Както е известно, за определено движение може да се говори само спрямо дадена отправна система. Понеже в закона на Галилей за движението по инерция става дума за движение с постоянна скорост и за покой, възниква въпросът спрямо какви отправни системи е валиден той. Дали във всички отправни системи е валиден закона за инерцията?

В изградената от Нютон механика се приема като принцип следното твърдение: *Съществуват отправни системи, наричани инерциални, спрямо които всяко тяло, на което не действат сили (или действащите на него сили се уравновесяват), се движи с постоянна скорост или е в покой*. То се нарича първи *принцип на Нютон* и е основен закон на механиката.

Проблемът коя отправна система може да се разглежда като инерциална се решава от опита. Той ни показва, че отправна система, свързана със Земята, за неголеми интервали от време (много по-малки от едно денонощие) може да се разглежда като инерциална. Но тази система не е съвсем точно инерциална. По-близко до инерциалната е хелиоцентричната отправна система, която е свързана с центъра на Слънцето.

Съществуват и отправни системи, спрямо които законът на Галилей за движението по инерция не е в сила. Такива отправни системи се наричат *неинерциални*. Например при рязко спиране на влака (закъснително движение с голямо ускорение) незакрепените предмети, които са били първоначално в покой, започват да се движат спрямо влака, без да са подложени на външно въздействие. Следователно в отправна система, свързана с движещия се с ускорение влак, законът за инерцията не е в сила.

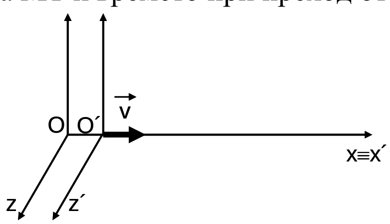
1.4. Принцип на относителността на Галилей

Съгласно принципът на относителността, формулиран от Галилей през 1636 г., всички инерциални отправни системи по своите механични свойства са еквивалентни една на друга. Във всички инерциални отправни системи свойствата на пространството и времето са еднакви, а законите на механиката имат еднаква математична форма. В съответствие с този принцип *никакви механични опити, проведени в произволна инерциална система, не могат да установят дали системата се движи праволинейно и равномерно, или се намира в покой*.

Движението е относително. Това означава, че траекторията на МТ и нейната скорост зависят от избора на отправна система. В същото време законите на класическата механика във всички инерциални отправни системи се записват еднакво.

1.5. Преобразувания на Галилей

Преобразуванията на Галилей представляват формули, преобразуващи координатите на МТ и времето при преход от една инерциална отправна система към друга.



Фиг. 3.3

Нека инерциалната отправна система S' и свързаната с нея координатна система $O'x'y'z'$ се движи с постоянна скорост $\vec{V}$ относно инерциална отправна система S, с която е свързана отправна система $Oxyz$. Осите $O'y'$ и $O'z'$ са успоредни на осите Oy и Oz, а осите $O'x'$ и Ox съвпадат и са успоредни на скоростта $\vec{V}$ (фиг. 3.3).

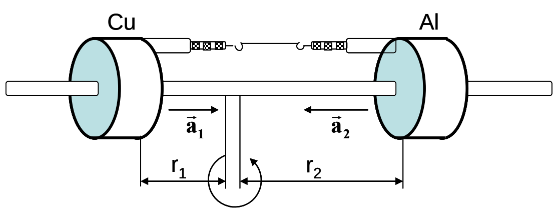
Преобразуванията на Галилей имат следния вид:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \qquad 3.2$$

Преобразуванията на Галилей съответстват на представите на класическата механика, че интервалите от време между събития и размерите на телата са еднакви във всички отправни системи. Освен това, при смяна на координатите на движеща се МТ уравненията на механиката не се променят по форма.

Преобразуванията на Галилей се явяват по същество математически изказ на принципа на относителността на Галилей.

1.6. Инертност и маса на телата



Фиг. 3.4

Опит: Меден и алуминиев цилиндър с еднакви размери се надяват на тънка пръчка, по която те могат да се движат свободно с нищожно триене – фиг. 3.4. Цилиндрите са свързани с два силомера, а пръчката е поставена на оста на центробежна машина, която се превежда в равномерно въртене с ъглова скорост ω. Вижда се, че след известно време цилиндрите застават неподвижно спрямо пръчката, като медният цилиндър се намира на по-малко разстояние r_1 от оста на въртене в сравнение с алуминиевия. Силомерите показват, че на цилиндрите действат сили с равни големини, които им предават различни центростремителни ускорения

$$a_1 = \omega^2 r_1, \; a_2 = \omega^2 r_2 \qquad 3.3$$

Този опит показва, че еднакви сили предават на различни тела различни ускорения. Други опити и наблюдения ни убеждават, че определено изменение на скоростта на едно тяло не става мигновено, а се осъществява за определен интервал от време. Тези опити потвърждават едно важно свойство на телата, което се нарича инертност.

Инертността на телата се проявява в това, че под действие на равни сили различни тела получават различни ускорения. Тя се проявява и в това, че когато на едно тяло *действа сила, изменението на скоростта му става не мигновено, а за определен интервал от време*.

Тяло, което под действие на дадена сила получава по-голямо ускорение, има по-малка инертност.

Свойството инертност може да се характеризира количествено. Количествена характеристика на инертността на телата е физична величина, която се нарича *маса*.

Определянето на масите на телата може да стане, като се сравняват ускоренията, които те получават под действието на равни сили. При това се приема, че масата m_1 на едно тяло е толкова по-голяма от масата m_2 на друго тяло, колкото пъти големината a_1 на неговото ускорение е по-малка от големината a_2 на ускорението, получено то второто тяло под действието на същата сила. Следователно е в сила зависимостта

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad 3.4$$

и тъй като знаем как се изменят ускоренията, от (3.4) получаваме отношението на двете маси.

За да се определят масите на телата, избираме определено тяло за еталон и приемаме неговата маса за единица. Това тяло се нарича *еталон за маса*, а масата му е приета за *единица за маса*, и се нарича *килограм*.

Опитът показва, че *масата на едно тяло е постоянна, когато то се движи със скорост, много по-малка от скоростта на светлината във вакуум*.

Според класическата механика масата притежава свойството *адитивност*. Това означава, че ако съединим две тела с маси m_1 и m_2, ново-полученото тяло има маса, равна на сумата $m_1 + m_2$ от масите на телата.

Еталонът за маса е тяло, направено от платинено-иродиева сплав с форма на цилиндър с диаметър и височина 39 mm. Пази се в Международното бюро за мерки и теглилки в Севър, Франция. От него са направени първични копия, които се съхраняват в различни страни. Нашата страна разполага с такъв първичен еталон, който се съхранява в националния център по метрология.

2. Втори и трети принцип на механиката

Многобройните наблюдения показват, че ускорението на телата зависи както от тяхната маса, така и от действащите им сили. Резултатите от опита се обобщават от втория принцип на механиката.

Ускорението на едно тяло е правопропорционално на резултантната сила, която му действа, и е обратно пропорционално на неговата маса:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} \qquad 3.5$$

Единицата за сила се нарича *нютон* (**N**). Съгласно с уравнение (3.5) 1 N е сила, която приложена към тяло с маса 1 kg му придава ускорение 1 m/s^2.

Вторият принцип на механиката може да се запиши във вида:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad 3.6$$

В някои случаи масата се изменя по време на движението. Например при реактивно движение става изхвърляне на изгорелите газове и масата на ракетата непрекъснато намалява. Когато m=const, уравнение (3.6) се записва във вида:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad 3.7$$

Векторът $\vec{p}$, равен на произведението от масата и скоростта на тялото

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad 3.8$$

се нарича *импулс на тялото*. Импулсът е една от най-важните динамични характеристики на телата. Уравнението (3.7) изразява втория принцип на механиката в друга формулировка (дадена от самия Нютон): *Скоростта, с която се изменя импулсът на едно тяло (първата производна на импулса по времето), е равна на резултантната сила, действаща на тялото.*

При движението на тяло с постоянна маса (3.6) и (3.7) са еквивалентни. Формулировката на втория принцип на механиката, изразена чрез (3.7) е обаче по-обща. Тя описва също така движението на тела с променлива маса, както и релативистките движения, извършващи се със скорости, близки до скоростта на светлината.

Уравнение (3.7) се записва във вида

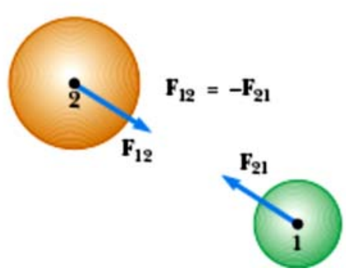
$$\vec{F}dt = d\vec{p} \qquad 3.9$$

Величината $\vec{F}dt$ се нарича *импулс на силата* $\vec{F}$ за безкрайно малкия интервал от време dt. Съгласно (3.9) *изменението на импулса на едно тяло за интервал от време* dt *е равно на импулса на действащата сила за същия интервал от време.*

Вторият принцип на механиката е в сила само за инерциални отправни системи. От (3.5) и (3.6) в частност следва, че при $\vec{F} = \vec{0}$ ускорението е нула, а скоростта постоянна, т.е. тяло, на което не действа сила, се движи равномерно и праволинейно. Изводът обаче, че вторият принцип на механиката съдържа в себе си първия като частен случай закона за инерцията е неправилен, защото законът за инерцията постулира като обобщение от опита, че съществуват инерциални отправни системи и движение по инерция.

Механичното действие на две тела едно върху друго, винаги има характер на взаимодействие. Според третия принцип на механиката, който е обобщение на опита *силите на взаимодействие между две материални точки са равни по големина, противоположни по посока и действат в направление на правата, съединяваща двете точки* – фиг. 3.5.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad 3.10$$



Фиг. 3.5

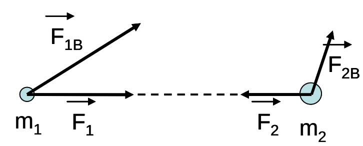
Третият принцип на механиката може да се формулира и по следния начин: *всяко действие поражда равно по големина и противоположно по посока противодействие*. Силите на действие и противодействие са приложени към различни тела, поради което не се уравновесяват.

3. Закон за запазване на импулса на система от тела

Затворена система. Да разгледаме произволна система от тела (материални точки). Всички останали тела във Вселената, които не влизат в тази система, са външни тела. Силите на взаимодействие между телата от системата се наричат *вътрешни сили*, а силите, с които външните тела действат на телата от системата – *външни сили*.

Механична система, на която не действат външни сили, се нарича затворена система.

Закон за изменение на импулса. Ще разгледаме най-проста механична система, съставена от две материални точки, които взаимодействат със сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. На материалните точки действат външни сили $\vec{F}_{1B}$ и $\vec{F}_{2B}$ (фиг. 3.6).



Фиг. 3.6

Записваме уравнението за втория принцип на механиката за всяка от МТ.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{1B}, \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{2B} \qquad 3.11$$

и събираме двете уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + (\vec{F}_{1B} + \vec{F}_{2B}) \qquad 3.12$$

Съгласно с третия принцип на механиката силите на взаимодействие на двете МТ са равни по-големина и противоположни по посока, т.е. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Следователно

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = F_B \qquad (3.13)$$

където $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ е векторната сума от импулсите на двете материални точки, а $\left(\vec{F}_B = \vec{F}_{1B} + \vec{F}_{2B}\right)$ е векторната сума от външните сили. Доказва се, че полученият резултат остава в сила за механична система , съставена от произволен брой N материални точки. Векторната физична величина

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad (3.14)$$

която е равна на сумата от импулсите на всички материални точки от системата, се нарича *импулс на механичната система*.

Уравнението (13) изразява закона за изменение на импулса на система от материални точки, който гласи: *скоростта на изменение на импулса* $\vec{p}$ *на система от материални точки (производната на* $\vec{p}$ *по времето) е равна на векторната сума от всички външни сили*

$\vec{F}_B = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Bi}$, *действащи на системата*. По аналогия със случая на отделна материална точка, ще наричаме $\vec{F}_B$ резултантна на всички външни сили.

Закон за запазване на импулса. За затворена система $\vec{F}_B = 0$ и уравнение (3.13) приема вида $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, откъдето

$$\vec{p} = \text{const} \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) изразява закона на запазване на импулса, който гласи: *Импулсът на затворена механична система не се изменя с течение на времето*.

Ако посоката на резултантната външна сила $\vec{F}_B$ не се изменя, можем да представим импулса на системата като сума от две компоненти: $\vec{p} = \vec{p}_\perp + \vec{p}_\parallel$, където компонентата $\vec{p}_\parallel$ е успоредна на вектора $\vec{F}_B$, а компонентата $\vec{p}_\perp$ е перпендикулярна на $\vec{F}_B$. Уравнение (3.13) се записва отделно за двете компоненти на импулса:

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{d\vec{p}_\parallel}{dt} = \vec{F}_B \tag{3.16}$$

откъдето следва, че само успоредната на външната сила компонента $\vec{p}_\parallel$ на импулса на системата се променя с течение на времето, докато перпендикулярната компонента $\vec{p}_\perp$ остава постоянна ($\vec{p}_\perp = \text{const}$).

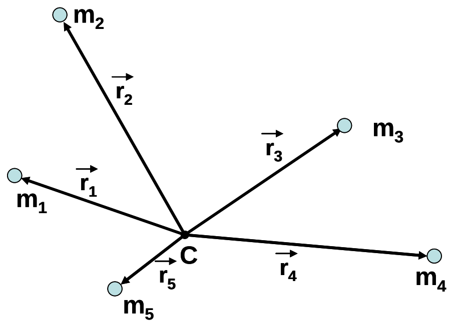
Център на масите. Центърът на масите на система от **N** материални точки се нарича геометрична точка C, чийто радиус-вектор $\vec{r}_C$ се задава с уравнението:

$$M\vec{r}_C = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \tag{3.17}$$

където $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ е сумата от масите на всички материални точки (маса на системата), а $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и т.н. са техните радиус-вектори спрямо дадена координатна система. Ако изберем началото на координатната система да съвпада с центъра на масите, тогава $\vec{r}_C = 0$ и уравнение (3.17) добива вида:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = 0 \tag{3.18}$$

т.е. центърът на масите е такава геометрична точка C, за която сумата от произведенията на масите на материалните точки и техните радиус-вектори, построени от точка C (фиг. 3.7), е равна на нула.



Фиг. 3.7

Движение на центъра на масите. Диференцираме двете страни на уравнение (3.17) по времето:

$$M\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} p_i = \vec{p} \tag{3.19}$$

Следователно импулсът $\vec{p}$ на система от материални точки е равен на произведението от масата M на системата и скоростта $\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ на центъра на масите:

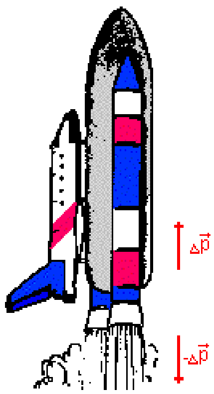
$$M\vec{v}_C = \vec{p} \tag{3.20}$$

Диференцираме уравнение (3.20) по времето: $M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, след което заместваме $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_B$ и получаваме:

$$M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_B \tag{3.21}$$

Уравнението (3.21) има същия вид както уравнение на движение на отделна материална точка с маса M. Следователно центърът на масите на система от материални точки се движи така, както би се движела една отделна материална точка с маса M, равна на маста на системата, ако тази материална точка се постави в центъра на масите на системата и към нея се приложи резултантната на всички външни сили $\vec{F}_B$. Ако системата е затворена ($\vec{F}_B = 0$) скоростта на центъра на масите не се изменя: $\vec{v}_C = const$.

Центърът на масите на затворена механична система се движи праволинейно и равномерно или се намира в покой.



Фиг. 3.8

Реактивно движение. Реактивното движение на ракети и самолети се основава на закона за запазване на импулса. Да разгледаме ракета, която в началния момент е в покой. Включва се реактивният двигател и изгорелите газове се изхвърлят с голяма скорост през соплото му. Газовете и ракетата образуват затворена механична система, чийто импулс не се изменя с времето. Ако импулсът на изхвърлените за малък интервал от време dt газове е $-d\vec{p}$ (фиг. 3.8), от закона за запазване на импулса следва, че за същото време ракетата ще получи импулс $d\vec{p}$ и ще започне да се движи в противоположна на газовете посока. С течение на времето скоростта на ракетата нараства, защото тя получава непрекъснато допълнителен импулс при изхвърлянето на газовете.

Да анализираме движение на ракета, на която действа външна сила $\vec{F}_B$. Съгласно с втория принцип на механиката изменението на импулса на ракетата за време dt е равно на импулса на външната сила:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_r\vec{v}_r - m\vec{v} = \vec{F}_B dt \tag{3.22}$$

където $dm < 0$ е изменението на масата на ракетата за време dt, $dm_r = -dm > 0$ е масата на изхвърлените от ракетата за същото време газове, а $\vec{v}$ и $\vec{v}_r$ са скоростите на ракетата и на газовете спрямо инерциална отправна система, в която е записано уравнението на движение на ракетата.

$$m d\vec{v} = (\vec{v}_r - \vec{v})dm + \vec{F}_B dt \tag{3.23}$$

Да означим с $\vec{u} = \vec{v}_r - \vec{v}$ относителната скорост на газовете спрямо ракетата.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F}_B \tag{3.24}$$

Уравнението (3.24) описва реактивното движение на ракета, или по-общо казано – движението на тяло променлива маса.