ТЕМА 9: МЕХАНИЧНИ ВЪЛНИ

1. Вълни в неограничена среда

Когато една трептяща система се намира в някаква материална среда (газ, течност или твърдо тяло), предизвиканите от нея трептения се разпространяват в средата. Така възниква *вълнов процес (механична вълна)*.

Вълнов процес (вълна) се нарича процесът на разпространение на трептения в дадена среда.

За средата, в която се разпространяват трептения, се използва моделът на *непрекъснатата еластична среда*. В този модел не се отчита атомно-молекулният строеж на веществото, а свойствата на средата се описват с макроскопични величини: плътност, еластични модули и др.

Вълната е периодичен процес, който протича във времето. При този процес частиците на средата не се движат постъпателно заедно с вълната, а трептят около своите равновесни положения. Ето защо *при вълновите процеси се предава само състоянието на движение и неговата енергия, но не се пренася вещество*.

Основно свойство на всяка вълна е предаването на енергия, без да се пренася вещество.

Тогава можем да дадем следната по-обща дефиниция за вълнов процес, която включва не само механичните, но и електромагнитните вълни:

Разпространението в пространството на изменението на някаква физична величина, при което се пренася енергия и импулс, се нарича вълнов процес.

1.1. Видове вълни според природата на трептящата система

Механична (еластична) вълна се нарича разпространението на механични деформации в една еластична среда.

Звукова или акустична вълна се нарича разпространението на хармонични трептения с определена честота (варираща в границите от 16 Hz до 20 kHz) в материална еластична среда.

Електромагнитна вълна се нарича разпространението на периодичните изменения на интензитета на електричното поле и индукцията на магнитното поле в пространството.

1.2. Видове вълни според размерността на средата

В зависимост от размерността на средата, в която се разпространяват вълните, различаваме едномерна, двумерна и тримерна вълна.

Едномерна (линейна) вълна се нарича вълнов процес, който се разпространява по една линия.

Пример за такава вълна е разпространението на трептения по струна, пръчка, шнур и др.

Двумерна (повърхностна) вълна се нарича вълнов процес, който се разпространява по дадена повърхност.

Пример за такава вълна са водните вълни.

Тримерна (обемна) вълна се нарича вълнов процес, който се разпространява в обема на дадено тяло.

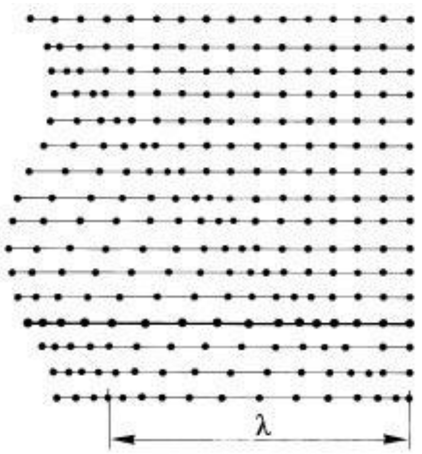
Пример за такава вълна са акустичните вълни (звукът).

1.3. Надлъжна и напречна вълна

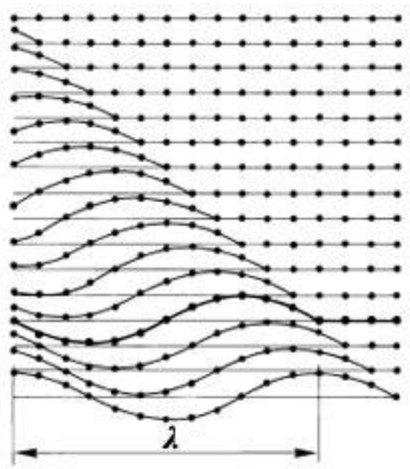
В зависимост от това какво е направлението на трептене на частиците на средата и направлението, в което се разпространява вълната, вълните се разделят на *надлъжни и напречни.*

Вълна, при която направлението на трептене на частиците съвпада с направлението на разпространение на вълната, се нарича надлъжна вълна (фиг. 9.1а).

Пример за надлъжни вълни са звуковите вълни.



Фиг. 9.1а.



Фиг. 9.1б.

Вълна, при която направлението на трептене на частиците е перпендикулярно на направлението на разпространение на вълната, се нарича напречна вълна (фиг. 9.1б).

Характерът на вълната – напречна или надлъжна, зависи от свойствата на средата. В газовете могат да се разпространяват само надлъжни вълни. В твърдите тела са възможни както надлъжни, така и напречни вълни. В обема на течностите могат да се разпространяват само надлъжни вълни, а по повърхността им се образуват напречни вълни. Следователно надлъжните вълни могат да се разпространяват в среда, в която възникват обемни деформации на свиване и разтягане, т.е. в газове, в течности и в твърди тела.

2. Бягаща хармонична вълна

2.1. Основни свойства на бягащата вълна

Най-простият вид вълново движение е бягащата хармонична вълна. Тя пренася енергия и импулс, но не пренася вещество. Такава вълна се получава от хармоничен трептящ източник в неограничена среда. При нея всички частици от средата извършват принудено хармонично трептене с кръгова честота, равна на честотата на трептене на източника. Много от вълните, срещащи се в природата, са близки до хармоничните вълни.

Вълнов процес, при който се разпространяват хармонични трептения, се нарича хармонична вълна.

Вълна, която се отдалечава от източника и не се връща към него, се нарича бягаща вълна.

Трептящо тяло, чието въздействие върху средата поражда деформации, се нарича източник на механична вълна.

Еластична материална среда, която няма външни граници, се нарича отворена или неограничена среда.

2.2. Основни величини, характеризиращи бягащите вълни

Най-голямото отклонение на трептящите частици от равновесното им положение се нарича амплитуда на вълната.

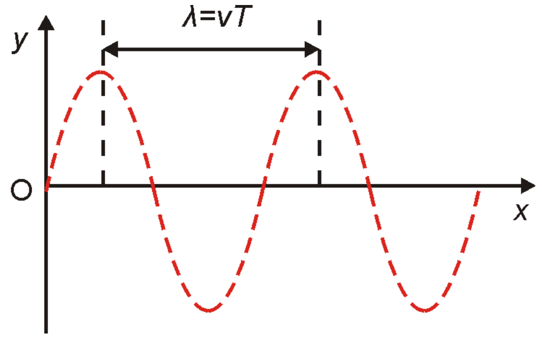
Тъй като вълната се разпространява в пространството трябва да има характеристики, които да описват това разпространение. Една такава характеристика е *дължината на вълната.* Тя описва пространствената периодичност на вълновия процес. Дължината на вълната се означава с буквата λ и в системата SI се измерва в метри.

Минималното разстояние между две частици, които в даден момент от време са отклонени максимално от равновесното си положение (в едната или в противоположната посока) , се нарича дължина на вълната (фиг. 9.2).

Вълната е процес, който протича периодично във времето. Следователно по аналогия с трептенията и тук може да се въведе величината период. Периодът се означава с буквата T и се измерва в секунди.

Времето, за което вълновото движение се разпространява на разстояние, равно на дължината на вълната, се нарича период на вълната.

Броят на периодите за единица време се нарича честота.



Фиг. 9.2

Тази величина се означава с буквата ν и се измерва с единицата херц. Периодът и честотата на вълната съвпадат периода и честотата на източника на трептене.

Кръговата честота е равна на умножената с 2π *честота на вълната*

$$\omega = 2\pi\nu \qquad 9.1$$

Тук са в сила и познатите от изучаването на хармоничното трептене зависимости:

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad \nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad 9.2$$

3. Скорост на разпространение на вълните

Вълновото движение се разпространява в пространството с крайна скорост u, която се различава от скоростта v, с която трептят отделните частици на средата. Тя зависи от еластичните свойства на тази среда и е свързана с дължината на вълната и нейната честота:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \qquad 9.3$$

Важно: Периодът и честотата не зависят от средата, в която се разпространява вълната. Те се определят само от източника на трептене. Обратно, скоростта на разпространение на вълната не зависи от източника, а зависи единствено от еластичните свойства на средата.

Дължината на вълната, която се определя от формулата $\lambda = uT$, зависи както от източника, така и от свойствата на средата.

За да изясним от какво зависи скоростта на разпространение на механичните вълни, ще направим аналогия с хармоничното трептене. От формулата за кръговата честота на пружинно махало се вижда, че тя зависи от масата *m* (т.е. от инертността на теглилката) и от коефициента на еластичност *k* (т.е. от еластичността на пружината). Аналогично и при механичните вълни скоростта на тяхното разпространение в една еластична среда ще зависи от инертността и еластичността на средата. Колкото по-инертна е средата, толкова по-бавно се разпространяват вълните. Обратно, ако еластичните сили, които възникват при деформациите на средата, са големи, вълните се разпространяват по-бързо. В зависимост от вида на вълните еластичността и инертността на средата се характеризират с различни величини.

При разпространение на напречни вълни в твърда среда се извършват деформации на хлъзгане. В този случай скоростта на вълните е:

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad 9.4$$

където *G* е модулът на еластичност при хлъзгане, а ρ е механичната плътност на средата.

При разпространение на надлъжни вълни в неограничена среда се извършват деформации на едностранно свиване и разширение. Скоростта на надлъжните вълните се дава с израза:

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} \qquad 9.5$$

където E' е модулът на еластичност при едностранно свиване (разширение), наречен модул на Юнг, а ρ е механичната плътност на средата.

За всички твърди тела E>G, поради което надлъжните вълни се разпространяват с по-голяма скорост от напречните. Този факт дава възможност например да се определи на какво разстояние се намира епицентърът на земетресение.

4. Уравнение на бягаща вълна по еластична струна

Зависимостта на отклонението y от координатата x и от времето t за произволна частица от средата се нарича уравнение на вълната:

$$y = y(x, t)$$

За да намерим това уравнение, ще разгледаме разпространение на напречна хармонична вълна по безкрайна опънатата струна, с която съвпада оста *x* (едномерна задача). Нека в момента t=0 под действие на външна сила, насочена перпендикулярно на струната, точката с координата *x*=0 започва да извършва принудено хармонично трептене с кръгова честота ω по оста *y*. Тогава отклонението на тази точка от равновесното ú положение се представя с функцията:

$$y = A sin\omega t$$

(За простота сме приели, че началната фраза на трептенето е нула, т.е. φ_0=0). Това трептене се разпространява в пространството (по дължината на струната) със скорост v (фиг. 9.2).

Следователно до частица, която се намира на разстояние *x* от началната, трептенето ще достигне със закъснение, т.е. след някакво време τ=x/v. Отклонението на тази частица в момента *t* ще се описва от функцията:

$$y = A\sin\omega(t - \tau) = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) \qquad 9.6$$

Тази функция представя в явен вид *уравнението на бягащата едномерна вълна*.

Като използваме, че

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \lambda = vT$$

получаваме:

$$\frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi x}{Tv} = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Тогава уравнението на вълната се изписва във вида:

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad 9.7$$

Това е уравнение на плоска монохроматична вълна, която се разпространява по струната. Тя е наречена монохроматична, тъй като съдържа само една честота. Уравнението на вълната е функция, която е периодична както по отношение на времето, така и по отношение на пространството.

Фаза на вълната се нарича величината

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad 9.8$$

Точките, за които в даден момент частиците на струната имат максимално отклонение от равновесното си положение, се наричат максимуми или гребени на вълната.

Точките, за които в даден момент частиците на струната имат максимално по големина отклонение, но в противоположна на максимума посока, се наричат минимуми или долове на вълната.

Разстоянието между два съседни максимума или минимума на вълната се нарича дължина на вълната.

Гребените, долините и дължината λ на вълната са представени на фиг.9.2.

5. Плоски и сферични вълни

При разпространение на хармоничната вълна по струна (едномерна вълна) всички точки от струната трептят с различни фази. Когато вълните се разпространяват в пространството (тримерна вълна), във всеки момент голям брой частици трептят с еднаква фаза. Тяхната съвкупност образува повърхност, наречена *вълнова повърхност*.

Геометричното място на точки, в които частиците трептят с еднаква фаза, се нарича фазова или вълнова повърхност.

Съвкупността от точки, до които е достигнало вълновото движение в даден момент, се нарича фронт на вълната.

Фронтът на вълната е границата, разделяща трептящите частици от тези, до които все още не е достигнало трептеливото движение. Фронтът на всяка вълна е само един, докато вълновите повърхности са много.

Скоростта u*, с която вълновите фронтове се разпространяват в средата се нарича фазова скорост*.

В зависимост от фронта на вълната вълните се разделят на плоски сферични, цилиндрични и др.

Линиите, които са перпендикулярни на вълновите фронтове, се наричат лъчи на разпространение.

Лъчите започват от източника на вълната и показват посоката, в която се разпространява енергията от вълните. В еднородна среда лъчите са прави линии.

Вълни, чиито вълнови повърхности са успоредни равнини, се наричат плоски вълни.

Лъчите на тези вълни са успоредни прави линии. Тяхната посока съвпада с посоката на разпространението на вълната. Ако изберем ос *x*, която да съвпада с посоката на разпространение на плоска хармонична вълна, нейното уравнение има същия вид, както уравнението на хармонична вълна по опънатa струна:

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Вълни, чиито вълнови повърхности са концентрични сфери, се наричат сферични вълни.

Лъчите на сферичните вълни са радиални прави линии, излизащи от източника във всички посоки. За разлика от плоските вълни, при които амплитудата остава постоянна за всяка точка от средата, при сферичните вълни амплитудата намалява с отдалечаване от източника.

Уравнението на плоската (линейна) монохроматична вълна може да се представи във вид, симетричен по отношение на времето *t* и пространствената координата *x*. Това става, като се въведе нова величина *k*, наречена *вълново число*.

Вълново число се нарича броят на дължините на вълните, които се разполагат на разстояние 2π метра.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad 9.9$$

Вълновото число може да се представи и като

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \qquad 9.10$$

Тогава за уравнението на плоска (линейна) хармонична вълна се получава:

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A\sin(\omega t - kx) \qquad 9.11$$

Следователно кръговата честота ω характеризира бързината, с която се изменя фазата в дадена точка от пространството с течение на времето, а вълновото число *k* показва бързината, с която се променя фазата в даден момент при преместване в пространството.

6. Пренасяне на енергия от вълните

6.1. Плътност на енергията на вълната

При разпространение на вълна еластичната среда се деформира и притежава потенциална енергия на деформации $\boldsymbol{W_p}$. Освен това частиците на средата извършват движение (трептене), на което съответства кинетична енергия $\boldsymbol{W_k}$. Величините обемна плътност на кинетичната енергия w_k и обемна плътност на потенциалната енергия w_p на механичната вълна в произволна точка М от средата се дефинират чрез уравненията:

$$w_k = \frac{dW_k}{dV}, \qquad w_p = \frac{dW_p}{dV} \qquad 9.12$$

където dW_k и dW_p са съответно кинетичната и потенциалната енергия в безкрайно малък обем dV на средата, в която се намира точка М. Величината

$$w = w_k + w_p \qquad 9.13$$

се нарича *обемна плътност на енергията* на механичната вълна.

Ако в даден момент частиците се движат със скорост v, обемната плътност на кинетичната енергия е:

$$w_k = \frac{\rho v^2}{2} \qquad 9.14$$

където ρ е механичната плътност на средата. Доказва се, че за плоска хармонична вълна $w_p = w_k$. Скоростта на частиците е равна на първата производна на отклонението y по времето. От уравнение (9.11) получаваме:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx) \qquad 9.15$$

Така обемната плътност на плоската хармонична вълна е:

$$w = 2w_k = \rho v^2 = \rho\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad 9.16$$

Следователно обемната плътност на енергията на вълната се изменя периодично от $w_{min} = 0$ до $w_{max} = \rho\omega^2 A^2$. Нейната средна стойност е

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \qquad 9.17$$

Уравнение (11.17) изразява средната плътност на енергията на хармонична вълна. При разпространение на вълните става непрекъснато предаване на енергия от източника на заобикалящите го части от средата, които от своя страна предават енергия на по-отдалечените области и т.н.

Скоростта, с която се преместват в пространството повърхностите, съответстващи на максималната плътност на енергията, се нарича групова скорост.

За хармонична вълна груповата скорост съвпада с фазовата скорост, поради което може да се говори само за скорост на вълната. При по-сложни вълнови образувания обаче, които могат да се разглеждат като суперпозиция от хармонични вълни с различни честоти, в зависимост от честотата вълните могат да имат различна фазова скорост. Тогава груповата скорост на резултатната вълна е различна от фазовите скорости на съставящите я хармонични вълни.

6.2. Интензитет на вълната

Да разгледаме малък плосък елемент с площ dS, разположен перпендикулярно на посоката на разпространение на плоска хармонична вълна със скорост v. За интервал от време dt вълната пренася през елемента dS енергия dW, равна на енергията на вълната в паралелепипед с обем $(\mathrm{vdt})\mathrm{dS}$:

$$\mathrm{dW} = \mathrm{wvdtdS}$$

Енергията, пренесена от вълната за единица време е

$$\mathrm{d\Phi} = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{wvdS} \qquad 9.18$$

Величината $d\Phi$ се нарича *поток на енергията* през елемента dS. Потокът на енергията $d\Phi$ се изменя с времето по същия периодичен закон (9.16), както обемната плътност на енергията. Неговата средна стойност

$$\overline{\mathrm{d\Phi}} = \overline{\mathrm{w}}\mathrm{vdS} \qquad 9.19$$

се нарича *среден поток на енергията* през елемента dS. Величината

$$\mathrm{I} = \frac{\overline{\mathrm{d\Phi}}}{\mathrm{dS}} = \overline{\mathrm{w}}\mathrm{v} \qquad 9.20$$

се нарича *интензитет на вълната*.

Интензитетът на вълната е равен на средната енергия, която се пренася от вълната за единица време през единица плоска повърхност, разположена перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната.

Измерва се в единици

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2 \cdot s}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \qquad 9.21$$

За плоска хармонична вълна интензитетът на вълната се дава от израза:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\rho\mathrm{v}\omega^2\mathrm{A}^2 \qquad 9.22$$

Следователно интензитетът е правопропорционален на квадрата на амплитудата на вълната ($I \sim A^2$).

6.3. Интензитет и амплитуда на сферична вълна

При плоските вълни за еднакви интервали от време във вълновото движение се въвличат равни по големина обеми от средата. Затова амплитудата и и интензитетът на плоските вълни навсякъде са еднакви. За сферичните вълни обемът на средата, обхванат за единица време от вълната, непрекъснато нараства, когато вълната се отдалечава от източника. Тъй като източникът има постоянна мощност, т.е. за единица време предава постоянна по големина енергия на средата, от закона за запазване на енергията следва, че интензитетът и амплитудата на вълната намаляват при отдалечаване от източника на сферични вълни. Да разгледаме две концентрични сферични повърхности с радиуси $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{r}$, в центъра на които се намира точков източник $\boldsymbol{S}$. Поради сферичната симетрия интензитетът $\boldsymbol{I(r)}$ може да зависи само от разстоянието r до източника. Средният поток на енергията през двете повърхности е равен на произведението от площта на сферите и интензитета на вълната:

$$\Phi_0 = 4\pi r_0^2 I(r_0), \qquad \Phi = 4\pi r^2 I(r)$$

Когато вълната не се поглъща от средата, от закона за запазване на енергията следва, че двата потока са равни, откъдето

$$I(r) = \frac{r_0^2 I(r_0)}{r^2} = \frac{C}{r^2} \qquad 9.23$$

Следователно интензитетът на сферичната вълна намалява обратно пропорционално на квадрата на разстоянието r до източника. Константата $C = r_0^2 I(r_0)$ може да се определи, като се измери интензитета на вълната на някакво разстояние r_0 от източника. Тъй като $I \sim A^2$, амплитудата А на сферичната вълна намалява обратно пропорционално на разстоянието r до източника:

$$A(r) = \frac{C_1}{r} \qquad 9.24$$

където константата $C_1 = r_0 A(r_0)$ може да се определи, ако е известна амплитудата на вълната на разстояние r_0 от източника.

7. Стояща вълна

Да разгледаме вълна, разпространяваща се в ограничена среда, която пада перпендикулярно и изцяло се отразява от границата, след което се разпространява в противоположна посока. Нека вълната е плоска хармонична и се описва с уравнение:

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}) \qquad 9.25$$

Отразената вълна има същата амплитуда A_0 и кръгова честота ω и се изразява с уравнението

$$y_2 = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_{02}) \qquad 9.26$$

В общия случай началната фаза φ_{02} на отразената вълна е различна от началната фаза φ_{01} на падащата вълна.

За механичните вълни, както при трептенията, е в сила принципът на суперпозицията. Когато в една област се разпространяват едновременно две или повече вълни, всяка частица на средата извършва независими едно от друго отклонения от равновесното си положение, които съответстват на дадените вълни. Резултатното отклонение на частицата е векторна сума от тези отклонения. Принципът на суперпозицията се нарушава, когато едновременно се разпространяват вълни с голям интензитет, при което деформациите на средата престават да бъдат линейни, т.е. резултатната деформация не е сума от деформациите, предизвикани от отделните вълни.

При суперпозицията на падащата и отразената вълна общото отклонение на частиците от равновесното им положение се описва с функцията:

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) \qquad 9.27$$

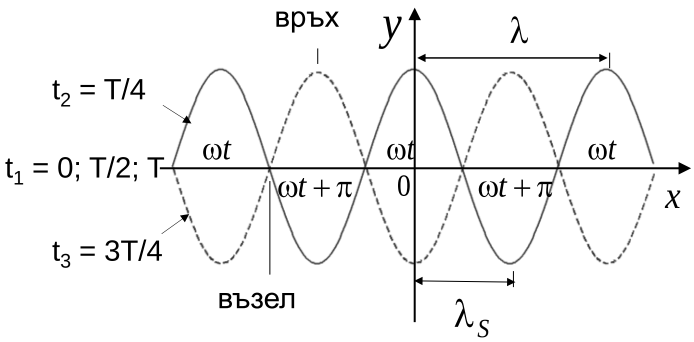
Вълните, които се описват с уравнение (9.27) се наричат *стоящи вълни*. Функцията

$$f(x) = 2A_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \qquad 9.28$$

определя формата на стоящата вълна. Нейният модул

$$|f(x)| = 2A_0 \left|\cos\left(kx - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right| \qquad 9.29$$

е равен на амплитудата, с която трептят различните точки на средата.



Фиг. 9.3

На фиг. 9.3 е показана стояща вълна в три различни момента от време. Моментът $t=t_1$ е избран така, че $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02}+\varphi_{01}}{2}\right) = 0$. Тогава отклонението за всички частици е y=0, т.е. в този момент всички частици едновременно преминават през равновесното си положение. В момента $t=t_1+T/4$ където T е периодът на трептене,

$$\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) = 1$$

В този момент всички частици едновременно са достигнали максималното си отклонение от равновесното си положение, което е равна на $y_{max}=f(x)$. В момента $t=t_1+3T/4$, когато

$$\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) = -1$$

отклонението отново е максимално, но е в противоположната посока, т.е. $y_{max}=-f(x)$.

Съгласно с уравнение (9.29) амплитудата на трептене на частиците зависи от тяхната координата x. Точките, за които

$$\left|\cos\left(kx - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right| = 1$$

трептят с максимална амплитуда, равна на $2A_0$.

Точките, за които амплитудата на трептене е максимална, се наричат върхове на стоящата вълна.

Точките, за които амплитудата на трептене е нула, се наричат възли на стоящата вълна.

За тези точки

$$\left|\cos\left(kx - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right| = 0$$

Разстоянието между два съседни възела (или върха) на стоящата вълна е равно на половин дължина на вълната. Положението на върховете и на възлите не се изменя с течение на времето, поради което вълната се нарича стояща. Всички частици, разположени между два съседни възела, трептят с еднаква фаза. Частиците, разположени от двете страни на даден възел, трептят в противофаза.

Стоящите вълни не пренасят енергия. Те могат да се разглеждат като суперпозиция от две бягащи вълни с еднакви кръгови честоти и амплитуди, които се разпространяват в противоположни посоки. Енергията, която се пренася от едната вълна, се връща обратно от другата вълна. Затова общият поток на енергията е равен на нула.

Характерни особености на стоящата вълна в сравнение с бягащата вълна са следните:

1) В стоящата вълна *амплитудите на трептене са различни* в различните точки. В нея има възли и върхове на трептенето. В бягащата вълна всички амплитуди са еднакви.

2) В стоящата вълна между два съседни възела *всички точки трептят с еднаква фаза*. В бягащата вълна фазите на трептене зависят от координатата на точката.

3) При стоящата вълна *не се пренася енергия*, тъй като двете наслагващи се вълни пренасят енергия в противоположни посоки. При бягащата вълна се пренася енергия в посоката на разпространение на вълната.