

ТЕМА 2: КИНЕМАТИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

„Който не знае движенията, той не разбира природата”

Аристотел

1. Механика. Механично движение. Отправна система

Под *механично движение* на едно тяло се разбира изменението на положението му спрямо други тела или изменението на взаимното положение на частите му с течение на времето. Когато две тела са неподвижни едно спрямо друго, казваме, че те са в *покой* едно спрямо друго.

Разделът от физиката, който изучава механичните движения, се нарича *механика*.

Движения, които се извършват със скорости, много по-малки от скоростта на светлината във вакуум, се изучават от *класическата механика*. Движения на тела, които се извършват със скорости, сравними със скоростта на светлината във вакуум, се изучават от *теорията на относителността (релативистката механика)*.

Разделът от механиката, който изучава движенията, величините, които ги характеризират, и зависимостите между тях, но без да се отчитат причините, които променят движенията, се нарича *кинематика*. *Динамиката* е разделът от механиката, който изучава движенията на телата във връзка с причините, които ги променят. Делът от механиката, който изучава условията, при които телата остават в покой, се нарича *статики*.

Голямото разнообразие на свойствата и движенията на телата налага деленето на механиката на *механика на твърдите тела*, *механика на деформируемите тела*, *механика на флуидите* и др.

Да се познава движението на дадено тяло означава да се знае какво е положението му във всеки момент от определен времеви интервал. Тогава ще знаем и как се изменя положението на тялото с течение на времето.

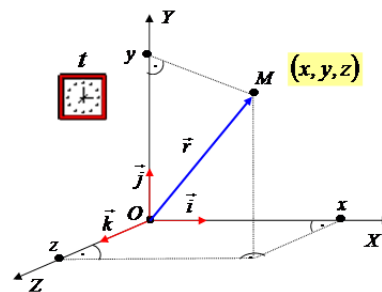
Определянето на положението на едно движещо се тяло във всеки момент от даден времеви интервал е основна задача на механиката.

Положението на дадено тяло и движението му се определят винаги спрямо друго тяло, което се нарича *отправно тяло* – фиг. 2.1. Отправното тяло се избира произволно. Обикновено се предпочита то да се избере така, че спрямо него наблюдаваното движение да изглежда колкото се може по-просто.

Отправно тяло, свързана с него координатна система и устройства за измерване на времето (часовници), които са в покой спрямо отправното тяло, образуват отправна система.

Движението на дадено тяло изглежда различно спрямо различните отправни системи. Поради това е безсмислено да се питаме движи ли се изобщо дадено тяло и как се движи, ако не е посочено отправното тяло, спрямо което се определя движението му. Това означава, че *механичното движение и покаят са относителни*.

В класическата механика се приема, че свойствата на пространството се описват от Евклидовата геометрия, а времето тече по един и същи начин във всички отправни системи.



Фиг. 2.1

2. Закон за движение на материална точка

2.1. Материална точка

В много случаи при изучаване движението на телата можем да се абстрахираме от техните размери, форма и вътрешна структура и да ги разглеждаме като точки.

Материална точка (МТ) се нарича тяло, чийто размери, форма и вътрешна структура са несъществени за дадената задача.

Ще подчертаем, че разглеждането на едно тяло като материална точка няма нищо общо с неговите действителни размери.

2.2. Закон за движение на материална точка

Ще използваме правоъгълна декартова координатна система, чийто три взаимно перпендикулярни оси x , y и z се пресичат в началото O на координатната система. На фиг. 2.1 са показани единичните вектори \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} , насочени в положителните посоки съответно на координатните оси x , y и z .

Положението на произволна точка M в пространството спрямо дадена отправна система се определя чрез нейния радиус-вектор \vec{r} . Радиус-векторът може да се представи като сума от три вектора, които са успоредни на координатните оси – фиг. 2.1.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad 2.1$$

Векторите $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ и $z\vec{k}$ се наричат *компоненти на радиус-вектора* \vec{r} .

Положението на една движеща се МТ точка M се определя чрез нейния радиус-вектор \vec{r} , който в този случай е функция на времето:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad 2.2$$

Функцията (2.2) изразява *закона за движение на МТ*. Ако е известен закона за движение на една МТ, е известно положението ѝ във всеки момент от нейното движение, т.е. решена е основната задача на механиката.

Когато е известен закона за движение (2.2) на една МТ, то са известни и зависимостите на координатите ѝ x , y и z от времето:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad 2.3$$

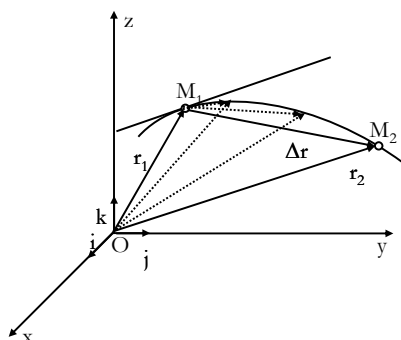
Тези три функции също изразяват закона за движение на МТ.

2.3. Траектория на МТ. Път и преместване на МТ в тримерно пространство

При движението си МТ описва крива, която се нарича *траектория на МТ*. Ако траекторията е част от права, то движението на МТ се нарича *праволинейно*. Ако траекторията не е част от права, а е дъга от друга крива, то движението на МТ се нарича *криволинейно*. Ако са известни законите за движение на МТ (формула 2.3), от тях може да се изключи времето и да се определи уравнението на траекторията.

Да разгледаме произволно движение на една МТ M – фиг. 2.2. Нека L е траекторията на точката и нека за интервал от време Δt тя описва дъгата M_1M_2 . Ще предполагаме, че в интервала Δt тя се намира във всяка точка от дъгата M_1M_2 само веднъж. Тогава дължината

на тази дъга се нарича *изминат път* от материалната точка за интервала време Δt . Ще го означаваме с Δs . *Пътят е скалярна величина, която се измерва в метри (m) и може да има само положителни стойности.*



Фиг.2.2

Нека $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ са радиус-векторите на МТ в моментите t_1 и t_2 (фиг. 2.2). Векторът $\overrightarrow{M_1M_2}$ се нарича *преместване* на МТ за интервала време $\Delta t = t_2 - t_1$. Означава се с $\Delta \vec{r}$:

$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.4)$$

Преместването $\Delta \vec{r}$ е векторна величина. Ясно е, че то изобщо не лежи на траекторията L и че големината му не е равна на изминатия път Δs (дължината на дъгата M_1M_2 от L).

Ако постепенно намаляваме интервала от време Δt , точка M_2 се доближава до точка M_1 и разликата между големината на преместването Δr и изминатия път Δs намалява. В граничния случай, когато точките M_1 и M_2 са безкрайно близо една до друга, дължините на хордата M_1M_2 и на дъгата M_1M_2 са равни. Преместването $d\vec{r}$, което МТ извършва за безкрайно малък интервал от време dt , се нарича *елементарно преместване*. Големината на елементарното преместване dr е равна на изминатия за същото време път ds

$$dr = ds \quad (2.5)$$

Векторът на елементарното преместване $d\vec{r}$ е насочен по допирателната към траекторията по посока на движението.

3. Скорост и ускорение на МТ

3.1. Средна скорост

По определение средната скорост е

$$\vec{v}_{\text{average}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Средната скорост е векторна величина и има същата посока както преместването. Така въведената средна скорост не зависи от изминатия път, тъй като е пропорционална на преместването и се определя само от началната и крайна точка на движението.

В редица случаи от всекидневието се използва понятието средна скорост. При това трябва да се има предвид, че става въпрос за скалярна величина, равна на пътя Δs , разделен на интервала от време Δt , за което той е изминат:

$$v_{\text{average}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.7)$$

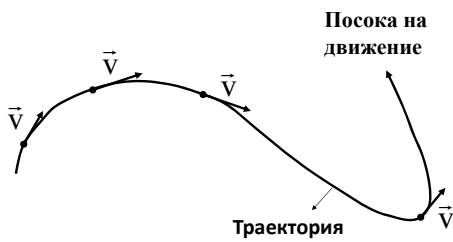
3.2. Моментна скорост

Ясно е, че средната скорост зависи от избора на интервала от време, за който се пресмята, поради което дава малко информация за характера на движение. Ето защо се въвежда величината *моментна скорост*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.8)$$

Както е известно от математиката, границата на отношението $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, когато Δt клони към нула, е производната на функцията $\vec{r}(t)$. И така, *моментната скорост е равна на първата производна на преместването по времето t* . Тя характеризира колко бързо тялото променя положението си в пространството.

Моментната скорост е векторна величина, която има същата посока както елементарното преместване $d\vec{r}$ – насочена е по допирателната към траекторията по посока на движението – фиг. 2.3.



Фиг. 2.3

Големината на скоростта е

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (2.9)$$

Заместваме радиус-вектора \vec{r} от уравнение (2.1) в уравнение (2.8) и получаваме

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (2.10)$$

където $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ и $v_z = \frac{dz}{dt}$ са съответно x-, y- и z-проекции на вектора на скоростта. Големината на скоростта се изразява с формулата

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (2.11)$$

Използвайки формула (2.8), изменението на радиус-вектора може да се представи като:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \quad (2.12)$$

Следователно

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) представлява *закона за движение на материална точка*.

Аналогично изминатият от МТ път може да се представи като

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (2.14)$$

3.3. Ускорение

Скоростта на една материална точка може да се изменя с течение на времето както по големина, така и по посока. Ако $\Delta \vec{v}$ е изменението на скоростта за интервал от време Δt , то векторът

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (2.15)$$

се нарича *средно ускорение* на МТ. Ясно е, че *ускорението е физична величина, която характеризира изменението на скоростта с течение на времето.*

В граничния случай, когато изучаваме изменението на скоростта в безкрайно малък интервал от време

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.16)$$

т. е. *ускорението е първата производна на скоростта по времето.*

Тъй като от друга страна скоростта е първа производна на радиус-вектора \vec{r} по времето t , ускорението може да се представи като втора производна на \vec{r} по времето:

$$\bar{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \quad (2.17)$$

$$\bar{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.18)$$

където $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}$ и $a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}$ са съответно x -, y - и z -проекциите на вектора на ускорението.

Съгласно формула (2.15) изменението на скоростта на МТ може да се представи като

$$d\bar{v} = \bar{a} dt \Rightarrow \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d\bar{v} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{a} dt \quad (2.19)$$

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \Delta \bar{v} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{a} dt \quad (2.20)$$

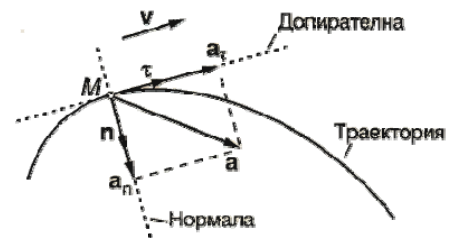
3.4. Тангенциално и нормално ускорение

По-нататък ще се ограничим с разглеждането само на такива движения, които се извършват в една равнина. На фиг. 2.4. е показана част от траекторията на МТ, която се движи само в равнината на чертежа.

В момент от време t МТ се намира в точка M от траекторията. Нека $\vec{\tau}$ и \vec{n} са два взаимно перпендикулярни единични вектора, успоредни съответно на допирателната и на нормалата към траекторията в точка M . Векторът $\vec{\tau}$ е насочен по посока на движението, т.е. по посока на скоростта \vec{v} , а векторът \vec{n} е насочен към вдлъбнатата страна на траекторията. Векторът на ускорението \bar{a} също лежи в равнината, в която се извършва движението и може да се разложи на две компоненти, насочени съответно в направление на допирателната (тангентата) и на нормалата към траекторията:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \quad (2.21)$$

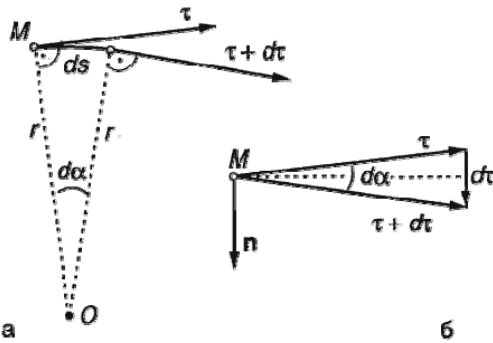
Компонентата $\bar{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}$, която е успоредна на допирателната към траекторията, се нарича *тангенциално ускорение* на материалната точка. Другата компонента $\bar{a}_n = a_n \vec{n}$, която е насочена по нормалата към траекторията, се нарича *нормално ускорение* на материалната точка.



Фиг. 2.4

За да определим компонентите a_τ и a_n на ускорението, ще отчетем, че скоростта \vec{v} е насочена по посока на единичния вектор $\vec{\tau}$, т.е. $\vec{v} = v\vec{\tau}$, където v е големината на скоростта. По определение

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (2.22)$$



Фиг. 2.5

По време на движението единичният вектор $\vec{\tau}$ непрекъснато променя посоката си – допирателните към различните точки от криволинейна траектория имат различни направления. Затова производната $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ е различна от нула. За да я определим, ще използваме чертежа на фиг. 2.5-а. За време dt $M\Gamma$ изминава път $ds = vdt$. Тъй като участъкът ds от траекторията има много малка дължина, той може да се разглежда като дъга

от окръжност, чийто център ще означим с O . Радиусът r на тази окръжност се нарича *радиус на кривината* на траекторията в точка M . Да означим с $d\vec{\tau}$ изменението на единичния вектор $\vec{\tau}$ за време dt . Ъгълът между векторите $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau} + d\vec{\tau}$ е равен на централния ъгъл

$d\alpha = \frac{ds}{r}$ ($d\alpha$ е в радиани), съответстващ на дъгата ds . От векторния триъгълник на фиг. 2.5-б

определяме модула на вектора $d\vec{\tau}$

$$d\tau = 2|\vec{\tau}|\sin\frac{d\alpha}{2} = d\alpha = \frac{ds}{r} \quad (2.23)$$

където е отчетено, че $|\vec{\tau}| = |\vec{\tau} + d\vec{\tau}| = 1$ и $\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ (ъгълът $d\alpha$ е много малък).

От фиг. 2.5-б се вижда, че векторът $d\vec{\tau}$ е успореден на нормалата \vec{n} към траекторията, построена през точка M : $d\vec{\tau} = dt\vec{n}$. Следователно

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\vec{n} = \frac{ds}{rdt}\vec{n} = \frac{v}{r}\vec{n} \quad (2.24)$$

Заместваме $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ от уравнение (2.24) в уравнение (2.22) и получаваме:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n} \quad (2.25)$$

Тангенциалното ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \quad (2.26)$$

се определя от първата производна $\frac{dv}{dt}$ на големината на скоростта v по времето t , т.е. *то* характеризира *бързината*, с която се изменя големината на скоростта. Когато скоростта нараства, тангенциалното ускорение е насочено по посока на единичния вектор $\vec{\tau}$, т.е. по посока на скоростта. Ако скоростта намалява, векторите \vec{a}_τ и $\vec{\tau}$ имат противоположни посоки – тангенциалното ускорение е насочено обратно на вектора на скоростта.

Нормалното ускорение

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad (2.27)$$

винаги е насочено по посока на единичния вектор \vec{n} , т.е. по нормалата към вдлъбнатата страна на траекторията. Нормалното ускорение не променя големината, а само посоката на скоростта – показва големината, с която се променя посоката на скоростта.

4. Някои частни случаи на движение на МТ

4.1. Праволинейно равнопроменливо движение на МТ

Движения, при които нормалното ускорение е равно на нула, се наричат праволинейни – $\vec{a}_n = \vec{0}$. При тях скоростта се променя по големина, но не и по посока. Големината на преместването е равна на изминатия от материалната точка път.

Ще разгледаме два частни случая на праволинейно движение:

4.1.1. $\vec{a}_\tau = \vec{0}$. Движения, при които тангенциалното ускорение е нула, се наричат равномерни движения. При равномерните движения не се променя големината на скоростта – $v = \text{const}$. При праволинейното равномерно движение скоростта не се променя нито по големина, нито по посока. Като използваме уравнение (2.14), за големината на изминатия път можем да запишем:

$$s = \Delta r = \int_{t_1}^{t_2} v dt = v(t_2 - t_1) = v\Delta t \quad (2.28)$$

4.1.2. $\vec{a}_\tau = \text{const}$. Праволинейно движение на едно тяло, чието ускорение е постоянно, се нарича праволинейно равнопроменливо движение. Да разгледаме тяло M , което извършва праволинейно равнопроменливо движение с ускорение \vec{a} . Нека \vec{r}_0 и \vec{v}_0 са съответно радиус-вектора и скоростта на тялото в началния момент $t = 0$. Съгласно закона за скоростта (2.20)

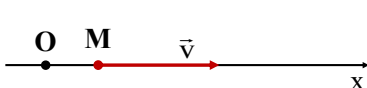
$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a}(t) dt = \vec{a}t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (2.29)$$

Равенството изразява закона за скоростта при праволинейно равнопроменливо движение.

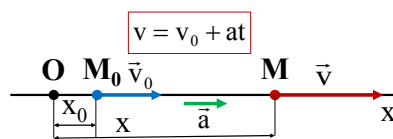
От закона (2.13) радиус-векторът \vec{r} на тялото в произволен момент от време t е:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2 \quad (2.30)$$

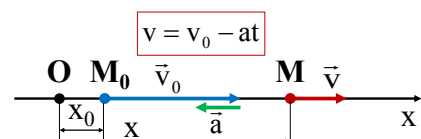
Често пъти при приложенията на законите (2.29) и (2.30) се избира координатна ос Ox така, че траекторията на тялото M да лежи на нея, а посоката на оста Ox да съвпада с посоката на скоростта му – фиг 2.6-а.



Фиг. 2.6 - а



Фиг. 2.6 - б



Фиг. 2.6 - в

Тогава равенствата (2.29) и (2.30) се записват във вида:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ x = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases} \quad (2.31)$$

където v_x , v_{0x} и a_x са проекциите върху оста Ox съответно на векторите \vec{v} , \vec{v}_0 и \vec{a} .

Праволинейно равнопроменливо движение на тяло, при което скоростта и ускорението му имат постоянно една и съща посока, се нарича равноускорително движение – фиг. 2.6-б.

При него законът за скоростта и законът на движение имат съответно вида:

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Праволинейно равнопроменливо движение на тяло, при което скоростта и ускорението му имат постоянно противоположни посоки, се нарича равнозакъснително движение – фиг. 2.6-в. За него

$$\begin{cases} v = v_0 - at \\ x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \quad (2.33)$$

4.2. Движение по окръжност

4.2.1. Ускорение. Както за всяко криволинейно движение, при движение по окръжност ускорението на МТ може да се представи като сума от тангенциално и нормално ускорение. *Нормалното ускорение е насочено към центъра на окръжността и се нарича центростремително ускорение. При равномерно движение по окръжността $a_\tau = 0$,*

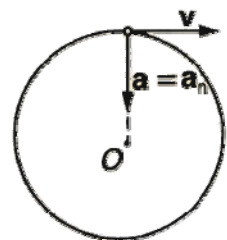
$v = \text{const}$ и центростремителното ускорение също е константа – $a_n = \frac{v^2}{r}$. Следователно равномерното движение по окръжност се извършва с постоянно по големина ускорение, което е насочено към центъра на окръжността – фиг. 2.7.

4.2.2. Периодично движение. *Движения, които се извършват по един и същ начин, повтаряйки се през равни интервали от време, се наричат периодични движения. Най-малкият интервал от време, след който се повтарят стойностите на всички величини, характеризиращи движението, се нарича период T . Честотата ν показва колко пъти за единица време се повтаря едно периодично движение. По определение двете величини са свързани със съотношението:*

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (2.34)$$

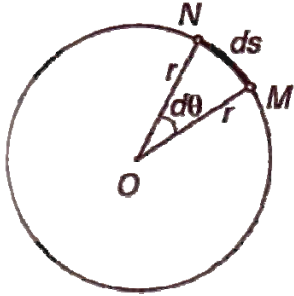
Равномерното движение по окръжност е пример за периодично движение. Лесно се установява връзката между скоростта v , периода T и честотата ν . За време $t = T$ МТ извършва едно пълно завъртане и изминава път, равен на дължината $2\pi r$ на окръжността. Тогава

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu \quad (2.35)$$



Фиг. 2.7

4.2.3. Ъглова скорост и ъглово ускорение. На фиг. 2.8 е показана материална точка, която се движи по окръжност с радиус r . За малък интервал от време dt тя се премества от точка M до точка N и описва дъга с дължина ds . Ъгълът $d\theta$, на който се завърта радиуса r , свързващ MT с центъра на окръжността, се нарича ъгъл на завъртане (измерва се в радиани).



Фиг. 2.8

Големината на ъгъла на завъртане $d\theta$ и дължината на дъгата ds са свързани чрез съотношението:

$$d\theta = \frac{ds}{r} \quad (2.36)$$

Разделяме двете страни на това равенство на dt и получаваме:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{r dt} = \frac{v}{r} \quad (2.37)$$

Величината

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} \quad (2.38)$$

се нарича *ъглова скорост на материалната точка*. Ъгловата скорост е равна на ъгъла, на който се завърта MT за единица време. Измерва се в $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. При равномерно движение по окръжност ъгловата скорост може да се изрази чрез периода T или честотата ν .

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (2.39)$$

Първата производна на ъгловата скорост по времето t (или втората производна на ъгъла на завъртане θ по времето t) се нарича *ъглово ускорение* на материалната точка.

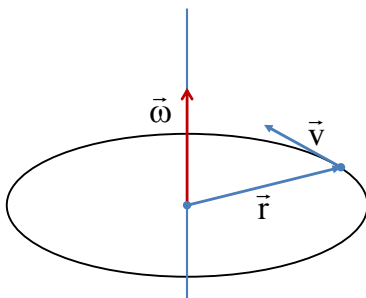
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.40)$$

Ъгловото ускорение показва бързината, с която се променя ъгловата скорост. Между ъгловото ускорение ε и тангенциалното ускорение a_τ съществува следната връзка:

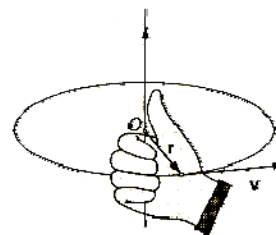
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{a_\tau}{r}, \text{ т.е. } \varepsilon = \frac{a_\tau}{r} \quad (2.41)$$

4.2.4. Ъгловата скорост като вектор. Движението на MT по окръжност може да се разглежда като въртене около ос, перпендикулярна на равнината, в която лежи окръжността, и минаваща през нейния център O – фиг. 2.9. Векторът на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е насочен в направление на оста на въртене и се дефинира чрез равенството:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.42)$$



Фиг. 2.9



Фиг. 2.10

Посоката на вектора на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ се определя по правилото на дясната ръка, което в конкретния случай е най-удобно да се прилага по следния начин: обхващаме с дланта на дясната си ръка окръжността, така че пръстите да сочат посоката на движение, тогава опънатия палец сочи посоката на ъгловата скорост – фиг. 2.10.