Упражнение 10

Линейни преобразувания и техните матрици

Задача 1. Нека f е изображение на $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$, при което векторът (x, y, z) се изобразява във вектора

а) $(x - y, x + y)$;

б) $(x, y + z)$;

в) $(x + y + z, 0)$;

г) $(y + 1, z)$;

д) (x^2, y).

Установете дали f е линейно преобразувание и в такъв случай определете матрицата му относно каноничните бази на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Нека V е реално векторно пространство с база $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, а f е линейно преобразувание на V, определено от

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 - e_4 \\ f(e_3) &= e_2 + 2e_3 - e_4 \\ f(e_4) &= e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Намерете:

а) матрицата $M_e(f)$ на f относно базата e;

б) аналитичното представяне на f;

в) образа на вектора $a(1, -1, 2, 1)$ чрез f.

Задача 3. Намерете ранга и дефекта на линейното преобразувание f като посочите по една база на $\mathrm{im} f$ и $\ker f$, ако:

а) $f : (x, y) \to (x + 3y, x - y)$;

б) $f : (x, y, z) \to (x - y + z, x + y - z, 2x)$;

в) $f : (x, y, z) \to (x - y, y + z)$;

г) $f : (x, y, z) \to (x + y - z, 2x - y + z, x + 2z)$.

Задача 4. Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y) \to (3x - 2y, x + y)$. Намерете матриците A и B на f, съответно в стандартната база $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ и базата $\{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)\}$ на $\mathbb{R}^2$.