Тема 9.

Смяна на бази и координатни системи

1. Смяна на база. Изменение на координатите на вектор при смяна на базата

Нека V е n-мерно векторно пространство над $\mathbb{R}$ с база $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и нека $e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ е една система от вектори на V. Следователно векторите от e' се изразяват като линейни комбинации на базисните вектори от e, т.е. съществуват числата t_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ такива, че са в сила равенствата:

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n, \\
e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n.
\end{aligned} \tag{9.1}
$$

Числата t_{ij} са координатите на векторите $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ спрямо базата $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Нека въведем следните матрични означения. Координатите на векторите $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ спрямо базата $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ да запишем по съответните стълбове на една матрица. Така формираме квадратната матрица T от n-ти ред, която има вида

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Първият стълб на T съдържа координатите на e'_1, вторият - на e'_2 и т.н.

Освен това нека означим

$$e = (e_1 \quad e_2 \quad ... \quad e_n), \qquad e' = (e'_1 \quad e'_2 \quad ... \quad e'_n).$$

Тогава равенствата (9.1), чрез които векторите e' се изразяват като линейни комбинации на базисните вектори от e, могат да се представят със следния матричен запис:

$$(e_1 \quad e_2 \quad ... \quad e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} = (e'_1 \quad e'_2 \quad ... \quad e'_n),$$

т.е.

$$e' = eT.$$

Определение 9.1. ***Матрица на прехода от базата*** e ***към системата от вектори*** e' се нарича матрицата T, определена от

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Стълбовете на T са координатите на вектори от e' относно базата e.

Равенствата (9.1) в матричен вид се записват като

$$e' = eT, \tag{9.2}$$

а схематично означаваме

$$e \xrightarrow{T} e'.$$

Тогава системата от вектори e' е също база на V, точно когато векторите от e' са линейно независими, т.е. точно когато наредените n-торки от координатите им в базата e (стълбовете на матрицата T) са линейно независими. Последното условие е еквивалентно на всяко от следите три условия:

- $\det(T) \neq 0$;

- $\operatorname{rank}(T) = n$;

- матрицата T е обратима (т.е. съществува T^{-1} такава, че $TT^{-1} = T^{-1}T = E$).

Тогава, ако e и e' са бази на V и

$$e' = eT \quad |.T^{-1} \text{ (отдясно)} \quad \Leftrightarrow \quad e = e'T^{-1}.$$

Матрицата T^{-1} е матрицата на обратния преход - от e' към e, т.е. стълбовете на T^{-1} са формирани от координатите на векторите от базата e в базата e'.

Теорема 9.1. *Всяка матрица на прехода между две бази е неособена. Ако* T *е матрицата на прехода от база* $\mathbf{e}$ *към база* $\mathbf{e}'$*, то* T^{-1} *е матрицата на прехода от* $\mathbf{e}'$ *към* $\mathbf{e}$*.*

Теорема 9.2. *Всяка неособена матрица е матрица на прехода от дадена база на крайномерно векторно пространство към друга негова база.*

Следователно съществуват безброй много бази в крайномерно векторно пространсто.

Ако $\det T > 0$, базите e и e' се наричат *еднакво ориентирани*, а ако $\det T < 0$ - *противоположно ориентирани.*

Нека T е матрицата на прехода от базата e към базата e' на произволно n-мерно реално векторно пространство, а $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ са координатите на произволен вектор v относно тези бази, т. е.

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n, \\ v &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + ... + x'_n e'_n. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Нека означим

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогава равенствата (9.3) имат съответно следния матричен запис:

$$v = ex = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$$v = e'x' = (e'_1 \quad e'_2 \quad \ldots \quad e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n.$$

Като вземем предвид равенствата (9.2) и (9.3), пресмятаме последователно

$$ex = v = e'x' = (eT)x' = e(Tx') \quad \Longrightarrow \quad x = Tx'.$$

Следователно, от последното равенство, чрез умножение на двете му страни с обратната матрица T^{-1} (отляво), получаваме

$$x' = T^{-1}x. \tag{9.4}$$

С формулата (9.4) се дава *връзката между координатите на произволен вектор относно две различни бази.*

Пример 9.1. Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е база на тримерно векторно пространство V. Дадени са векторите

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

а) Намерете матрицата на прехода от e към e'.

б) Докажете, че векторите $e' = (e_1', e_2', e_3')$ образуват база на V.

в) Ако векторът $u \in V$ има координати $(1, 2, -3)$ относно базата e, намерете координатите му относно e'.

а) Първо намираме матрицата T на прехода от e към e', като записваме координатите на векторите e'_i, $i = 1, 2, 3$, като съответни стълбове на T. Координатите на трите вектора са следните $e'_1(1, 0, 0)$, $e'_2(1, 1, 0)$, $e'_3(1, 1, 1)$. Следователно

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Тогава, съгласно Теорема 9.1, системата от вектори e' е база на V, точно когато $\det T \neq 0$. Пресмятаме $\det T = 1 > 0$, следователно e' също е база на V и е еднакво ориентирана с базата e.

в) Щом T е матрицата на прехода от e към e', то T^{-1} е матрицата на прехода от e' към e. Пресмятаме

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

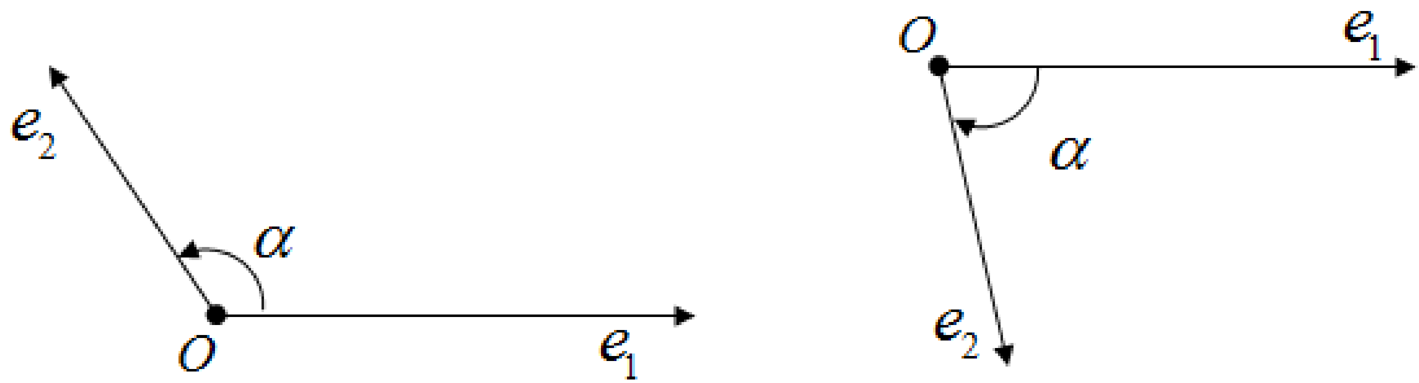
Нека означим стълба с координатите на вектора u относно базата e' с x'. За получаване на x' използваме формула (9.4), както следва

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Смяна на координатна система

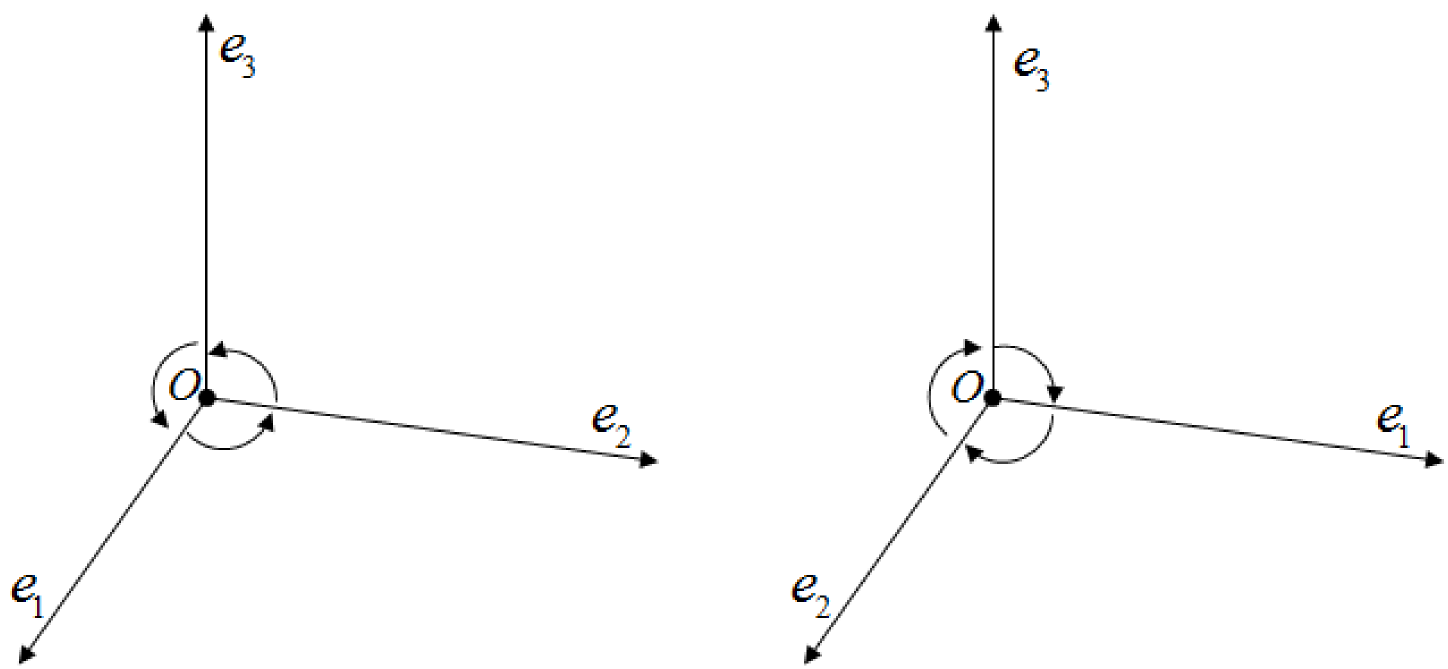
Нека $K = Oe_1e_2e_3$ и $K' = O'e_1'e_2'e_3'$ са координатни системи на тримерното пространство. K' еднозначно се определя от K при условие, че са известни координатите на векторите e' относно базата e (т. е. матрицата T на прехода от e към e') и координатите на точка O' относно K. Координатните системи K и K' са еднакво или противоположно ориентирани в зависимост от това дали базите e и e' са еднакво или противоположно ориентирани ($\det T > 0$ или $\det T < 0$).

Нека $K = Oe_1e_2$ е координатна система в равнината и $\alpha \in (0, \pi)$ ъгълът, на който трябва да се завърти векторът e_1 около точката O, за да стане еднопосочно колинеарен с вектора e_2. Когато това завъртане е *въртене обратно на часовниковата стрелка, системата се счита за дясна, а в противен случай - за лява.*



Фиг. 9.1 - дясна и лява координатна система в равнината

В тримерното пространство една координатна система е дясна, ако координатните вектори се завъртат по посока, обратна на часовниковата стрелка, за да станат еднопосочно колинеарни един на друг. В случай, че въртенето е по посока на часовниковата стрелка, координатната система е лява. Това е показано на фиг. 9.2.



Фиг. 9.2 - дясна и лява координатна система в пространството

Нека $K = Oe_1e_2e_3$ и $K' = O'e'_1e'_2e'_3$ са координатни системи в тримерното пространство, $T = (t_{ij})$ е матрицата на прехода от базата e към базата e' ($e' = eT$) и координатите на O' относно K са (a, b, c), т. е. $\overrightarrow{OO'} = ae_1 + be_2 + ce_3$.

Нека още M е произволна точка с координати (x, y, z) относно K и (x', y', z') относно K':

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3, \qquad \overrightarrow{O'M} = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3.$$

Означаваме

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (e_1 \quad e_2 \quad e_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = eX.$$

Аналогично, $\overrightarrow{O'M} = e'X'$ и $\overrightarrow{OO'} = eA$ в матричен запис. В сила е зависимостта (правило на триъгълника)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad \Longrightarrow \qquad eX = e'X' + eA = e(TX' + A).$$

Следователно получаваме матричното равенство

$$X = TX' + A,$$

с което се дава *връзката между координатите на произволна точка относно две различни координатни системи*, нарича се още формула за обща смяна на координатната система.

Подробният матричен запис на равенството $X = TX' + A$ е следният

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Последното равенство има следния координатен запис

$$x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z' + a,$$

$$y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z' + b,$$

$$z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z' + c.$$

В равнината обща смяна на координатната система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ с координатната система $K' = O'\vec{e_1}'\vec{e}_2'$ се задава чрез

$$\left| \begin{array}{l} x = t_{11}x' + t_{12}y' + a, \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' + b, \end{array} \right.$$

където

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

е матрицата на прехода от базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ към базата $\{\vec{e_1}', \vec{e}_2'\}$, а $O'(a, b)$ относно координатната система K.

Транслация на координатна система. При транслация на координатна система координатното начало O се премества в ново положение O', а координатните вектори се пренасят успоредно в него (без да се променят дължините им и ъгъла между тях), т. е. $\vec{e_1}' = \vec{e}_1$ и $\vec{e_2}' = \vec{e}_2$.

Векторът на транслация се определя от $\vec{v} = \overrightarrow{OO'}(a, b)$.

Следователно матрицата на прехода между двете бази T съвпада с единичната матрица E, т. е.

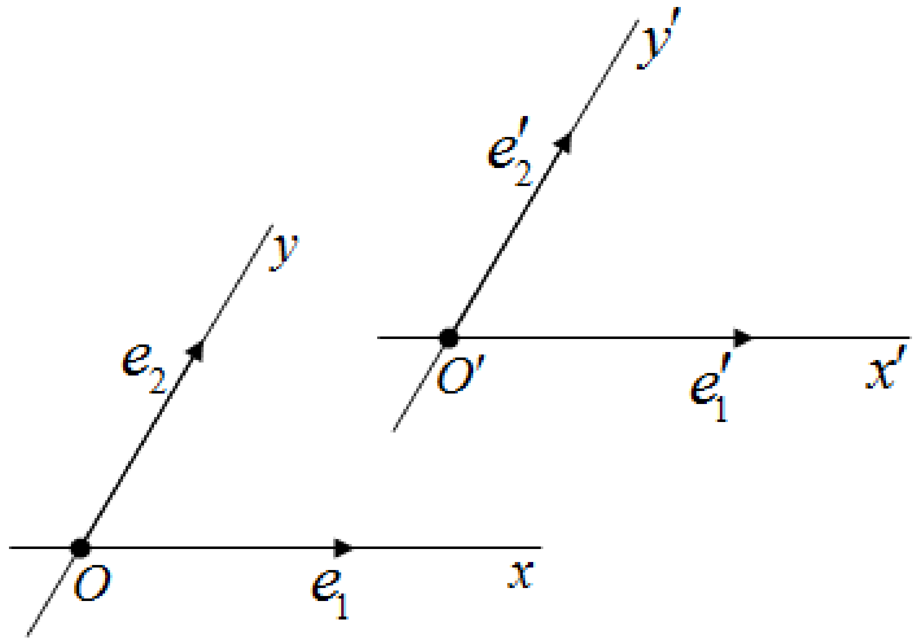
$$T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поради това формулите за транслация на координатна система в равнината имат матричния запис

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Координатният вид на формулите за транслация в равнината е

$$\left| \begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{array} \right.$$



Фиг. 9.3 - транслация на Oxy

Ортогонална трансформация на координатна система имаме, когато ортонормирана координатна система заменяме с ортонормирана координатна система и двете системи имат общо координатно начало. В този случай A е нулев стълб и трансформацията има вида

$$X = TX'.$$

Тъй като базите e и e' са ортонормирани за елементите на матрицата T е изпълнено

$$t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2} + t_{i3}t_{j3} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

където δ_{ij} е *символът на Кронекер*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Квадратна матрица с последното свойство се нарича *ортогонална*, т. е. редовете ѝ (а следователно и стълбовете ѝ) образуват ортонормирана база.

Една реална квадратна матрица B се нарича *ортогонална*, точно когато

$$BB^T = B^T B = E,$$

което е еквивалентно на $B^{-1} = B^T$.

В равнината ортогоналната трансформация $K = Oe_1e_2 = Oxy \to K' = O'e_1'e_2' = O'x'y'$ се задава чрез формулите

$$x = t_{11}x' + t_{12}y',$$
$$y = t_{21}x' + t_{22}y',$$

където $T = (t_{ij})$ е ортогонална матрица.

Ако $e_1'(t_{11}, t_{21})$ сключва с e_1 ъгъл α, то $t_{11} = \cos\alpha$, $t_{21} = \sin\alpha$. В случай, че K е дясна система, получаваме $e_2'(t_{12}, t_{22})$, $t_{12} = -\sin\alpha$, $t_{22} = \cos\alpha$, т.е.

$$\vec{e}_1' = (\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \vec{e}_2' = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

В този случай ортогоналната трансформация е ***ротация*** на координатната система около точката O на ъгъл α (Фиг. 9.4) и се задава с формулите

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

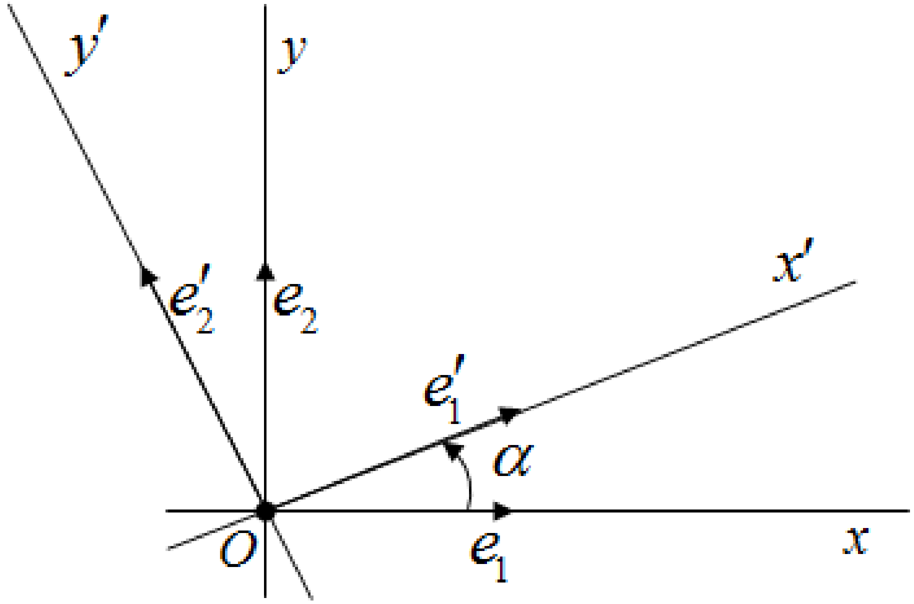
където

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

е матрицата на прехода между двете ортогонални бази $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e_1}', \vec{e}_2'\}$, а $O' \equiv O(0,0)$.

Координатният запис на формулите за ротация на ортонормирана координатна система в равнината със запазване на ориентацията имат вида

$$\left| \begin{array}{l} x = \cos\alpha . x' - \sin\alpha . y', \\ y = \sin\alpha . x' + \cos\alpha . y'. \end{array} \right.$$



Фиг. 9.4 - ротация на Oxy

Примери за ротация на ортонормирана координатна система в равнината:

1. Ротация на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ по посока на часовниковата стрелка се определя от матрицата

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

2. Ротация на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ по посока, обратна на часовниковата стрелка се определя от матрицата

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.