Тема 7.

Произведение на матрици

Определение 7.1. ***Произведение на матриците*** $A = (a_{is}) \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ ***и*** $B = (b_{sj}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, взети в този ред, се нарича матрицата $AB = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kn} \end{pmatrix}$$

с елементи c_{ij}, получени по правилото

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}.$$

Действието, при което от матриците A и B се получава произведението AB, се нарича ***умножение на матрици***.

Правилото за умножение на матрици е известно като правило ***"ред по стълб"***, т. е. всеки ред на първата матрица A се умножава последователно с всички стълбове на втората матрица B, за да се получат всички елементи на произведението AB.

За да получим елементите от даден ред на AB, трябва да умножим реда със същия пореден номер на A последователно със всички стълбове на B съгласно обичайното правило за скаларно умножение на вектори (скаларно умножение относно ортонормирана координатна система).

Елементът c_{ij} в i-тия ред и j-тия стълб на матрицата $C = AB$ се получава като скаларно произведение на i-тия ред на A и j-тия стълб на B. Затова броят на координатите (елементите) в i-тия ред на A и j-тия стълб на B трябва да бъде равен.

Забележка. Отбелязваме, че две матрици могат да бъдат умножени, само ако броят на стълбовете на първата матрица е равен на броя на редовете на втората, т.е. ако редовете на първата матрица и стълбовете на втората, разгледани като вектори, имат равен брой координати. Произведението им е матрица, на която броят на редовете е равен на броя на редовете на първия множител, а броят на стълбовете е равен на броя на стълбовете на втория множител.

Пример 7.1. Да се намери произведението на матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриците A и B могат да бъдат умножени, тъй като първата от тях е от тип (4×3), а втората е от тип (3×2). Следователно произведението им $C = AB$ е (4×2)-матрица.

За намирането на елементите от първия ред на $C = (c_{ij})$ умножаваме последователно първия ред на A с всички стълбове на B. Аналогично постъпваме и за получаването на останалите три реда на C.

$$c_{11} = 1.2 + (-1)(-1) + 0.3 = 3, \qquad c_{12} = 1.1 + (-1).0 + 0.1 = 1,$$
$$c_{21} = 0.2 + 2.(-1) + 3.3 = 7, \qquad c_{22} = 0.1 + 2.0 + 3.1 = 3,$$
$$c_{31} = 1.2 + (-3)(-1) + 1.3 = 8, \qquad c_{32} = 1.1 + (-3).0 + 1.1 = 2,$$
$$c_{41} = 4.2 + 0.(-1) + 2.3 = 14, \qquad c_{42} = 4.1 + 0.0 + 2.1 = 6.$$

Така получихме

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нека отбележим, че същите матрици не могат да бъдат умножени, ако разменим реда им, т.е. **не съществува** матричното произведение BA

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ?,$$

тъй като редовете на B са наредени 2-ки, а стълбовете на A са наредени 4-ки и нямаме правило за скаларно умножение, с което да умножаваме вектори с различен брой координати.

От този пример е ясно, че за произволни матрици A и B:

$$AB \neq BA.$$

Пример 7.2.

Нека $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} -1.1 + 1.3 & -1(-1) + 1.2 \\ 2.1 + 0.3 & 2(-1) + 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.3. *Повдигане на квадратна матрица на степен.*

k-та степен на квадратна матрица A от n-ти ред се дефинира по следния начин

$$A^k = \underbrace{A.A...A}_{k},$$

където k е естествено число. Имаме $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$ и т.н. Ето един пример с квадратна матрица от 2-ри ред

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Умножението на матрици притежава следните свойства:

1) $AB \neq BA$ – умножението на матрици **не е** комутативно. В общия случай, ако AB съществува, BA може изобщо да не дефинирано (виж Пример 7.1).

2) $(AB)C = A(BC)$ (*асоциативен закон*).

3) Съществува квадратна матрица E от n-ти ред, наречена *единична матрица*, такава че за всяка квадратна матрица A от n-ти ред е изпълнено $AE = EA = A$. Матрицата E има вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичната матрица е диагонална матрица с единици по главния диагонал и нули под и над него. Единичната квадратна матрица от втори ред има вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За всяка квадратна матрица от втори ред A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

е изпълнено

$$AE = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A, \quad EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ (*ляв и десен дистрибутивен закон*).

6) $\det(AB) = \det A \det B$ (A, B са квадратни матрици от един и същи ред).

7) $(AB)^T = B^T A^T$.

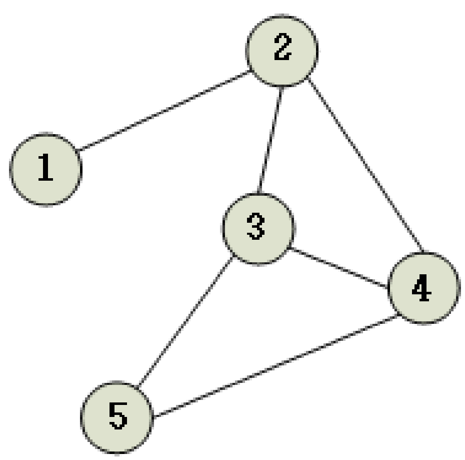
Граф

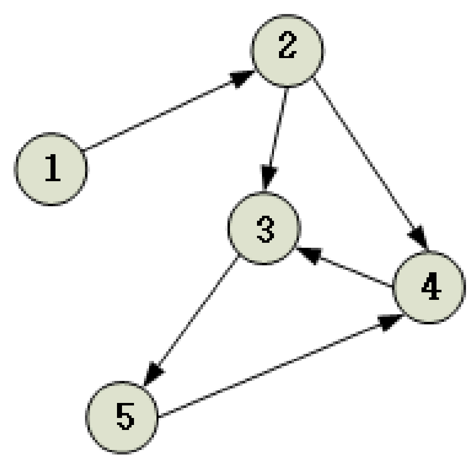
Графът е математическа структура, чрез която се описват взаимоотношения между обекти. Всеки граф G се състои от две множества - множество на върховете V (обектите) и множество на ребрата E (връзките между обектите).

Неориентиран граф - ребрата нямат посока, изобразяват се като отсечки.

Ориентиран граф - ребрата имат посока, изобразяват се като стрелки (насочени отсечки).

Неориентиран граф (отляво) и ориентиран граф (отдясно)

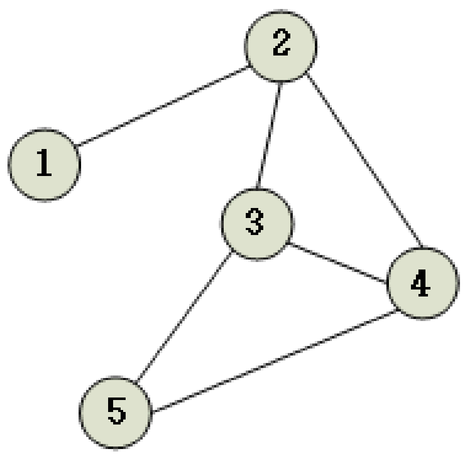




Матрица на съседствата в граф

Матрицата на съседствата на граф е бинарна матрица (елементите ѝ са нули и единици), която съдържа информация за ребрата на графа (свързаността на графа).

За неориентиран граф матрицата на съседствата $A = (a_{ij})$ се дефинира по следния начин: $a_{ij} = 1$, ако върховете с поредни номера i и j са свързани с ребро и $a_{ij} = 0$, ако върховете i и j не са свързани с ребро.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

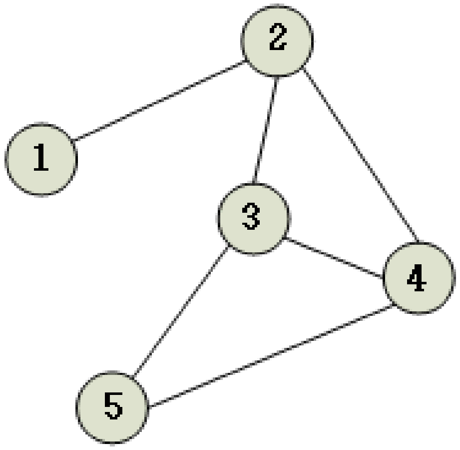
Матрицата на съседствата на неориентиран граф е симетрична, т.е. $A = A^T$, понеже $a_{ij} = a_{ji}$.

Ако съберем стойностите на елементите във всеки ред на A, ще получим броя на ребрата, с които е свързан (инцидентен) всеки връх. Това число се нарича *степен на върха* и се означава с d.

Степените на върховете на неориентирания граф от примера са: $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 3$, $d_5 = 2$.

Път в граф се нарича всяка последователност от ребра. *Дължина на път* се нарича броят на ребрата, участващи в този път (всяко ребро е път с дължина единица).

От матрицата на свързаността A получаваме информация за директните връзки между върховете в графа (пътищата с дължина 1). От степените на A получаваме информация за индиректните връзки между върховете (пътищата с дължина ≥ 2). Например, в матрицата $A^2 = AA$ се съдържа информация за броя на пътищата с дължина 2 между всички върхове на графа. Елементът в i-тия ред и j-тия стълб на A^2 е равен на броя на различните пътища с дължина 2 между върховете с поредни номера i и j.

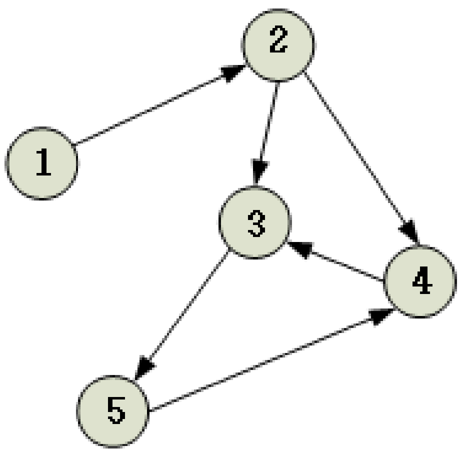


$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Нека разгледаме този граф в контекста на социална мрежа, като върховете са потребители в мрежата, а реброто между два върха е равносилно на приятелство (взаимно следене) между тези потребители. Тъй като графът е неориентиран, то приятелството в тази мрежа е симетрична връзка между потребителите (като във Facebook или LinkedIn напр.).

В този контекст стойностите на елементите на A^2 ни дават информация за броя на пътищата между два върха, които минават през трети връх, т.е. за броя на общите приятели между два потребители на социалната мрежа.

За ориентиран граф матрицата на съседствата $A = (a_{ij})$ се дефинира по следния начин: $a_{ij} = 1$, ако съществува ориентирано ребро с начало върха i и край върха j (ориентирано ребро $i \to j$) и $a_{ij} = 0$ в противен случай.



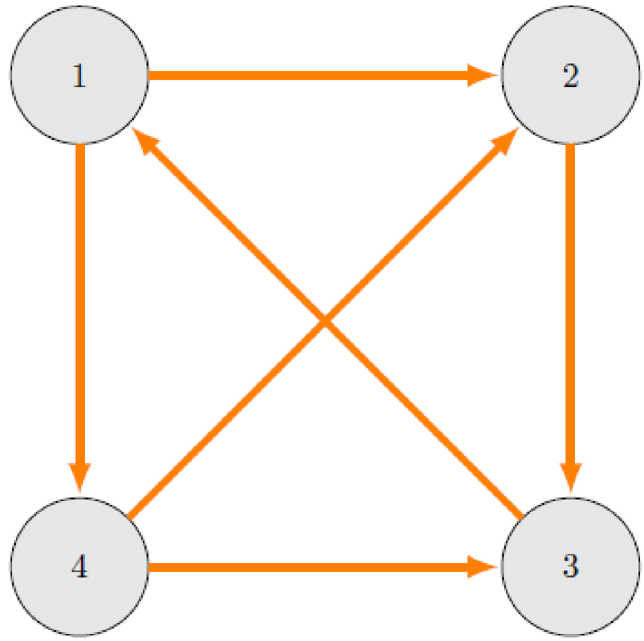
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В ориентиран граф всеки връх има две степени - входна степен (броят на входящите ребра) и изходна степен (броят на изходящите ребра). Сумата на стойностите на елементите в i-тия ред на A дава информация за изходната степен на върха i, а сумата на стойностите на елементите в j-тия стълб на A (т.е. j-тия ред в A^T) дава информация за входната степен на върха j.

Нека разгледаме ориентираните графи и техните матрици на съседството в контекста на термина доминация. Ако съществува ориентирано ребро с начало върха i и край върха j ($i \longrightarrow j$), то се казва, че върхът i доминира (има влияние над) върха j.

Примерът, който ще разгледаме, е на турнир с четирима играчи, които играят един срещу друг до победа. Нека при тези срещи са регистрирани следните резултати:

- играч 1 е победил играч 2 и 4
- играч 2 е победил играч 3
- играч 3 е победил играч 1
- играч 4 е победил играч 2 и 3



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задачата ни е да определим най-силния играч.

Сумата на елементите на всеки ред на A ни дава изходната степен на всеки връх, т.е. броя на победите на всеки играч: $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$.

От елементите на A^2 получаваме информация за броя на различните ориентирани пътища с дължина 2 ребра между върховете на графа, т.е. за броя на играчите, които са победени от играчите, над които доминира всеки връх.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава, ако съберем матриците A и A^2, към директните победи на всеки играч ще добавим влиянието, което той има над останалите играчи чрез онези от тях, които той е победил.

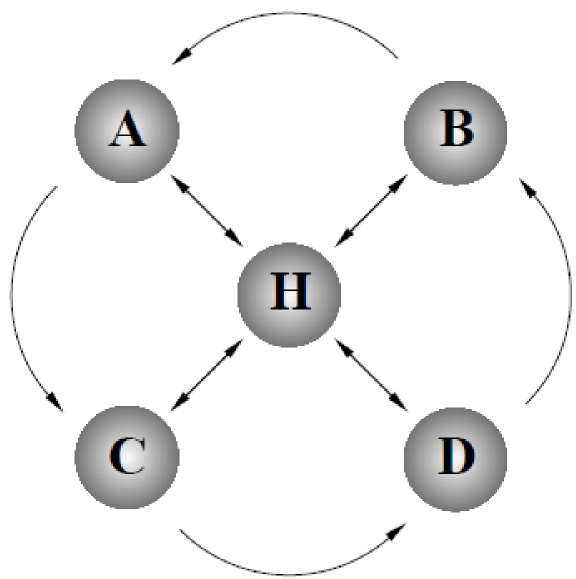
$$M = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумата на елементите от i-тия ред на M ни дава информация за директните победи на играч i и за броя на победите на победените от i играчи. По-силен е онзи играч, който е победил повече по-силни играчи. Силата на играчите е: $s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $s_4 = 4$. Най-силен е играч 1.

Приложение на графи - Анализ на транспортни мрежи

Нека A, B, C, D, H са пет града. На схемата по-долу със стрелки са посочени съществуващите директни полети между тези градове



Фиг. 7.1

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

За да анализираме системата на въздушния трафик между тези градове, съставяме квадратната матрица на свързаността
$T = (t_{ij})$, като

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако съществува директен полет между градовете } i \text{ и } j \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Степените на T: T^2, T^3 и т. н. ни дават възможност да определим с колко последователни полета (с други думи, с колко прекачвания) можем да стигнем от един град до друг. Матрицата T^2 съдържа в себе си информация за броя на полетите с едно прекачване, T^3 - с две прекачвания и т. н. Пресмятаме

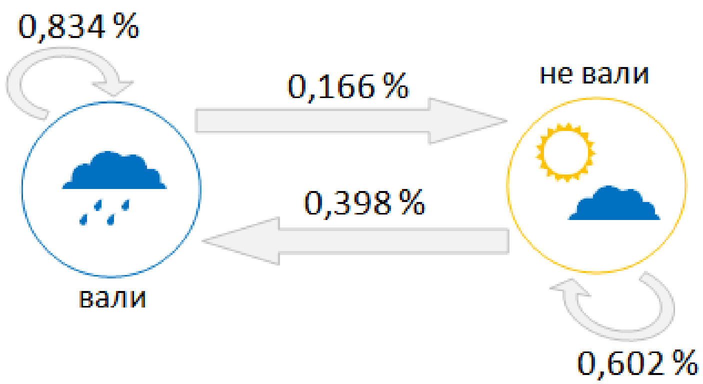
$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Така например от вида на T^2 се вижда, че от град A може да се стигне до град D с два полета, т. е. с едно прекачване. Тъй като матрицата T^2 няма нулеви елементи, два полета са достатъчни за достигане на всеки град от произволен друг.

Крайни дискретни вериги на Марков

Веригите на Марков описват описват процеси, в които дадена система може да се намира в краен брой състояния. Вероятността за преминаване на системата от едно състояние в друго зависи от предишното състояние на системата. Зададено е началното състояние на системата, а преминаването във всяко следващо състояние се извършва чрез умножаване с *матрицата на прехода*.

От метеорологична станция в Западен Вашингтон за известни следните данни за времето: ако един ден вали, то за следващия ден съществува вероятност от 0.834% отново да вали и 0.166% да не вали. Обратно, ако в даден ден не вали, то за следващия ден вероятността отново да не вали е 0.602%, а да завали - 0.398%. Ако в понеделник не вали, определете какво ще е времето в петък (Фиг. 7.1).



Фиг. 7.2

Съставяме матрицата на прехода T между двете състояния "вали" (В) и "не вали" (НВ):

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{В} & \text{НВ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{В} \\ \text{НВ} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.834 & 0.398 \\ 0.166 & 0.602 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Времето в понеделник е сухо, т. е. се описва от вектора

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вероятността какво ще бъде времето във всеки следващ ден получаваме като умножаваме матрицата на прехода T с вектора, описващ предходното състояние на системата (времето през предишния ден).

Например, времето във **вторник** x_1 ще получим като $x_1 = Tx_0$, в **сряда** x_2 ще бъде $x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0$. На лице е зависимостта

$$x_k = T^k x_0.$$

При тези означения векторът, описващ времето в петък е x_4 и се получава като

$$x_4 = T^4 x_0 = \begin{pmatrix} 0.834 & 0.398 \\ 0.166 & 0.602 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.71631 & 0.680173 \\ 0.28369 & 0.319827 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,680173 \\ 0,319827 \end{pmatrix}.$$

Следователно вероятността в петък да вали, ако в понеделник времето е било сухо, е приблизително 0.62%, а да бъде отново сухо - приблизително 0.32%.

Приложение в генетиката. Нека разгледаме пример, при който унаследяването на даден фенотипен белег се контролира от единствен ген, за който съществуват две форми (алели) - *доминантна* A и *рецесивна* a (монохибридно кръстосване). Всеки индивид може да има *генотип*: AA, Aa или aa. Индивидите с генотип AA и aa се наричат *хомозиготни*, а с Aa - *хетерозиготни*. На външен вид AA и Aa не се различават, тъй като A подтиска проявяването на външните характеристики на a. Пример за такова унаследяване е цветът на очите при някои животни. Нека A отговаря за кафявия цвят на очите, а a - за синия. Тогава индивидите с генотип AA и Aa имат кафяви очи, а с aa - сини. Нека започнем с начално състояние на популацията, в което броят на индивидите от трите генотипа е равен, т. е.

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

а) Нека кръстосваме всички индивиди от разглежданата популация само с хомозиготни индивиди с генотип AA.

При кръстосването $AA \times AA$ всички получени индивиди ще са с генотип AA. При кръстосването на $Aa \times AA$ половината от индивидите ща са с генотип AA, а другата половина - Aa. При кръстосването на индивидите $aa \times AA$ ще получим само хетерозигонтни индивиди Aa.

Тогава матрицата на прехода T има вида

$$T = \begin{array}{c} \\ AA \\ Aa \\ aa \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тогава за индивидите в първо поколение получаваме

$$x_1 = Tx_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За индивидите от второ поколение x_2 имаме

$$x_2 = Tx_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По този начин, умножавайки вектора на началното състояние със степен на матрицата на прехода, можем да получим вектора, даващ информация за индивидите във всяко поколение

$$x_n = T^n x_0.$$

б) Нека кръстосваме всеки индивид от популацията само с индивид от същия генотип като неговия. Тогава матрицата на прехода T има вида

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{array}{c} AA \\ Aa \\ aa \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

При същото начално състояние на популацията x_0 намерете вектора на индивидите от трето поколение.

Търсим вектора

$$x_3 = T^3 x_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{7}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{48} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{23}{48} \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.