Тема 6.

Детерминанти. Свойства и пресмятане

1. Детерминанти от втори и трети ред

Нека разгледаме системата линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q. \end{aligned} \right.$$

Чрез еквивалентни преобразувания от нея получаваме

$$\left| \begin{aligned} (ad - bc)x &= dp - bq \\ (ad - bc)y &= aq - cp. \end{aligned} \right.$$

От горните две уравнения се вижда, че коефициентът $\Delta = ad - bc$ има съществено значение за броя на решенията на дадената система.
Системата има единствено решение

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \qquad y = \frac{aq - cp}{ad - bc},$$

точно когато $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Ако $\Delta = 0$, то са възможни два случая:

- Ако $dp - bq = aq - cp = 0$, то системата има безброй много решения.
- Ако поне едно от двете числа $dp - bq$ или $aq - cp$ е различно от нула, то системата няма решения.

Ако формираме квадратната матрица от втори ред от коефициентите пред неизвестните в системата

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то числото $\Delta = ad - bc$ се нарича **детерминанта на матрицата** A **(детерминанта от втори ред)** и се записва

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

В класически (индексни означения) на елементите на матрицата имаме следното

Определение 6.1. Нека A е квадратна матрица от втори ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от втори ред***) и се означава с някой от символите $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 6.1. Пресметнете следните детерминанти от втори ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - 1.(-3) = 11,$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 2.3 = 0.$$

Определение 6.2. Нека A е квадратна матрица от трети ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото

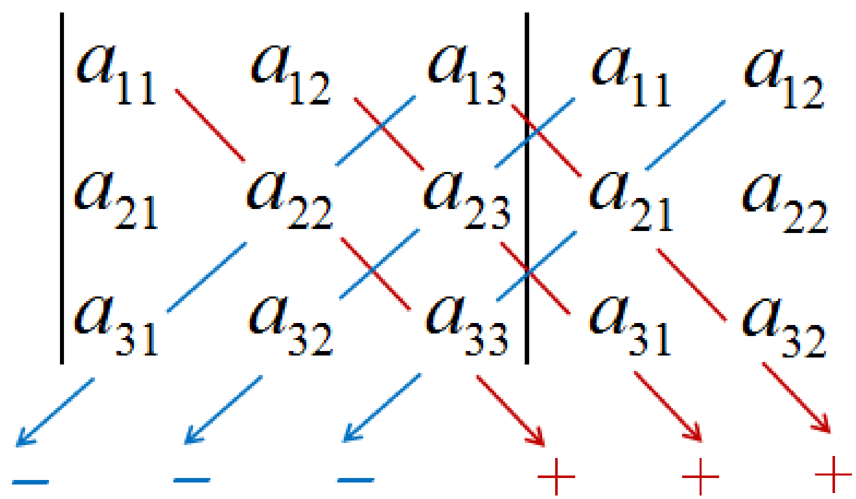
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

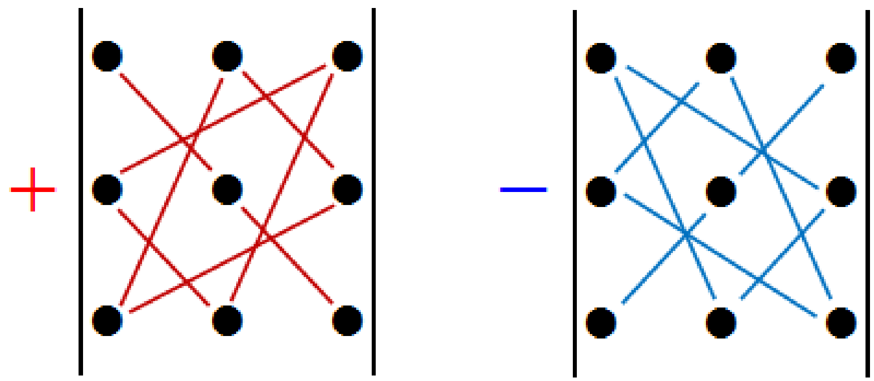
се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от трети ред***).

Пресмятане на детерминанти от трети ред (правила):

- ***Правило на Сарус***



- ***Правило на триъгълниците***



Пример 6.2. Пресметнете следните детерминанти от трети ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1.(-2)(-1) + 5.1.1 + 1.2.(-1) - 1.(-2).1 - 1.1.(-1) - 5.2.(-1)$$

$$= 18.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2.4.3 + 1.2.(-1) + 3.0.0 - 1.4.0 - 2.2.0 - 3.(-1).(-3) = 13.$$

2. Пермутации

Определение 6.3. Всяка наредба $(i_1, i_2, ..., i_n)$ на числата 1,2,...,n, сред които няма равни, се нарича *пермутация* на тези числа. Пермутацията $(1, 2, ..., n)$ се нарича *нормална*.

Броят на пермутациите на n елемента е равен на $n! = 1.2.3...n$.

Определение 6.4. Числата i и j в дадена пермутация образуват *инверсия*, ако $i > j$, но i стои в пермутацията пред j.

Пермутацията се нарича *четна*, ако елементите ѝ образуват четен брой инверсии, а *нечетна* - в противен случай.

Броят на инверсиите в пермутацията $(i_1, i_2, ..., i_n)$ означаваме с $[i_1, i_2, ..., i_n]$.

Броят на четните пермутации на дадени елементи е равен на броя на нечетните пермутации на същите елементи.

Очевидно за нормалната пермутация имаме $[1, 2, ..., n] = 0$.

Всяка размяна на местата на два елемента в една пермутация се нарича *транспозиция* на пермутацията. Всяка транспозиция променя четността на пермутацията.

Например в пермутацията $(2, 1, 3)$ има една инверсия ($[2, 1, 3] = 1$, тъй като 1 и 2 са в инверсия) и затова тя е нечетна, докато в пермутацията $(2, 3, 1)$ има две инверсии ($[2, 3, 1] = 2$, тъй като 1 и 2, както и 1 и 3 са в инверсия), затова втората пермутация е четна. Двете пермутации се получават една от друга чрез транспозиция на елементите 1 и 3. В естествената пермутация $(1, 2, 3)$ няма инверсии, $[1, 2, 3] = 0$.

$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1.2.3 = 6$, $4! = 1.2.3.4 = 24$ и т.н.

3. Детерминанти от n-ти ред

Определение 6.5. ***Детерминанта на квадратна матрица от n-ти ред***
$A = (a_{ij})$ се нарича алгебричната сума

$$\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} (-1)^{[j_1,j_2,\ldots,j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

разпростряна върху всевъзможните пермутации $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ на числата $1, 2, \ldots, n$ и означаваме

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{[j_1,j_2,\dots,j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Детерминантата от n-ти ред е алгебрична сума на от $n!$ събираеми. Тази сума се нарича *развитие на детерминантата*, а събираемите ѝ - *членове в развитието.*

От тази формула при $n = 2$ и $n = 3$ следват съответно формулите за детерминанта от 2-ри и 3-ри ред, с които се запознахме в началото.

Нека да докажем това при $n = 2$. Съществуват две пермутации на първите две естествени числа – те са $(j_1, j_2) = (1, 2)$ и $(j_2, j_1) = (2, 1)$. Първата пермутация е четна, а втората е нечетна, тъй като $[1, 2] = 0$, $[2, 1] = 1$. Тогава при $n = 2$ от общата формула за детерминанта от n-те ред имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2)} (-1)^{[j_1, j_2]} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{[1,2]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Формулата за детерминанта от n-ти ред е неудобна за пресмятане при $n \geq 4$. В развитието на детерминанта от 4-ти ред участват $4! = 24$ събираеми. Затова ще разгледаме друга, по-удобна формула (формула на Лаплас), която ще прилагаме в комбинация със свойствата на детерминантите.

4. Свойства на детерминантите

Определение 6.6. *Транспониране на матрица (детерминанта)* се нарича действие, при което редовете и стълбовете си разменят местата, запазвайки своя пореден номер. В резултат на транспонирането на матрицата A се получава нова матрица A^T, наречена *транспонирана матрица* на A.

Пример 6.3. Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Тогава

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (\det B)^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6.1. *При транспониране детерминантата не променя стойността си, т.е. ако A е квадратна матрица от n-ти ред, то е изпълнено* $\det A^T = \det A$.

Следователно редовете и стълбовете на една детерминанта са равноправни. Всяко действие, което е доказано за редовете, е в сила и за стълбовете на произволна детерминанта.

Елементарни действия (операции) с редовете на детерминанта

По редовете (стълбовете) на една детерминанта могат да бъдат извършени следните елементарни действия:

- Размяна на местата на два реда.
- Умножаване на всички елементи от даден ред с число.
- Прибавяне към елементите на даден ред съответните им елементи от друг ред, умножени с число.

На следващите няколко слайда ще видим какво се случва със стойността на детерминантата при извършването на тези действия с редовете (стълбовете) ѝ.

Размяна на местата на два реда (стълба)

Теорема 6.2. *Ако в една детерминанта се разменят местата на два реда (стълба), се получава детерминанта с противоположна стойност.*

Следствие 6.1. *Детерминанта с два равни реда (стълба) е равна на нула.*

Примери

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 = -\Delta, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Умножаване на всички елементи на ред (стълб) с число

Теорема 6.3. *Ако всички елементи от даден ред (стълб) на една детерминанта се умножат с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.*

Примери

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 = 2\Delta.$$

Пример 6.4.

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 6 & 18 & 54 \\ 7 & 28 & 112 \end{vmatrix} = 5.6.7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 210(48 + 16 + 18 - 12 - 36 - 32) = 210.2 = 420.$$

Следствие 6.2. *Детерминанта, съдържаща нулев ред или нулев стълб (ред или стълб само от нули), е равна на нула.*

Следствие 6.3. *Детерминанта с два пропорционални реда (стълба) е равна на нула.*

Примери

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 6.4. *Ако всеки елемент в i-тия ред (стълб) на една детерминанта се представя като сума $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ за всяко j, то детерминантата е равна на сумата от две детерминанти, в които всички редове (стълбове), освен i-тия, са непроменени, а в i-тия ред (стълб) на първата детерминанта са елементите a'_{ij}, а във втората – a''_{ij}.*

Пример 6.5. Например детерминантата $\det A$ може да се представи като следната сума

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавяне към елементите на даден ред съответните елементи на друг ред, умножени с число

Следствие 6.4. *Стойността на детерминантата не се променя, ако към един ред (стълб) прибавим друг, умножен с произволно число.*

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Нека разгледаме детерминанта, получена от Δ чрез умножаване на първия ред с (-3) и прибавянето му към втория ред:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rceil^{(-3)} \\ \leftarrow_{+} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следствие 6.5. *Ако редовете (стълбовете) на една детерминанта са линейно зависими, детерминантата е равна на нула.*

Обратното твърдение на Следствие 6.5 също е вярно (ще бъде разгледано по-късно), но въпреки това тук ще използваме и двете му посоки (като необходимо и достатъчно условие).

Пример 6.6. Детерминанта $\det A$ е равна на нула, тъй като вторият ѝ ред е получен от първия чрез умножаване с 3. Втората детерминанта е нула, тъй като третият ѝ стълб е сума на първия и втория.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 6.7. Съгласно Следствие 6.5 и допълнението към него можем да използваме метода на детерминантите за да проверим дали дадена система от вектори е линейно зависима или независима.

Нека разгледаме следния пример.
В $\mathbb{R}^3$ са дадени векторите $a_1(1,2,3)$, $a_2(-1,4,3)$, $a_3(2,0,1)$. За да проверим дали тези вектори са линейно независими, съставяме детерминантата от техните координати, като ги разполагаме по редове или стълбове. Ако стойността на тази детерминанта а нула, то векторите са линейно зависими, а ако е различна от нула, то векторите са линейно независими.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 - 24 + 2 = -6 \neq 0.$$

Следователно векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими. Тъй като са три линейно независими вектора в тримерно пространство, те са база на $\mathbb{R}^3$.

Друго приложение на детерминантите ще разгледаме, когато изучаваме метода на Крамер за решаване на един вид системи линейни уравнения, метода на адюнгираните количества за намиране на обратна матрица, пресмятане на лице на триъгълник в равнината Oxy.

5. Пресмятане на детерминанти

Определение 6.7. *Адюнгиран минор на елемента* a_{ij} от детерминантата от n-ти ред

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

се нарича детерминантата M_{ij} от $(n-1)$-ви ред, получена от $\det(a_{ij})$ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб.

Числото $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ се нарича *адюнгирано количество на елемента* a_{ij} в $\det(a_{ij})$.

Пример 6.8. Нека е дадена детерминантата

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тогава адюнгираните минори на елементите от дадената детерминанта са съответно:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10, M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -38, M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12, M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -48, M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5, M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13, M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Адюнгираните количества на елементите от първия ред на същата детерминанта са:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 38,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Теорема 6.5. *(Правило на Лаплас) Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от произволен ред (стълб) със съответните им адюнгирани количества.*

Пресмятането на детерминанта съгласно правилото на Лаплас се нарича *развиване на детерминанта по даден ред или стълб.*

Прилагайки правилото на Лаплас към първия ред на детерминантата имаме

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4A_{11}+(-1)A_{12}+7A_{13} = 4.10+(-1)38+7(-2) = 12.$$

Както видяхме от примера, чрез прилагане на правилото на Лаплас пресмятането на детерминанта от 3-ти ред се свежда до пресмятане на три детерминанти от 2-ри ред.

Аналогично важи и за детерминанта от n-ти ред – чрез развиване на по всеки ред (стълб) пресмятането ѝ се свежда до пресмятане на n на брой детерминанти от $(n-1)$-ви ред.

Процесът на пресмятане на детерминанта от n-ти ред може да се още, ако елементите от реда (стълба), към който прилагаме правилото на Лаплас, са нули.

Пример 6.9. Развитието на следната детерминанта по първия ѝ ред има вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-1.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 258.$$

Следствие 6.6. *Ако всички елементи в даден ред или стълб на една детерминанта са нули, с изключение евентуално на един, то детерминантата е равна на произведението на този елемент със съответното му адюнгирано количество.*

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 100 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 100.(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

И така, идеята за пресмятане на детерминанти от n-ти ред е следната. Първо с помощта на трите елементарни действия да бъдат превърнати в нули всички елементи на даден ред (стълб) с изключение на един. След това този ред (стълб) вече е удобен за развиване съгласно правилото на Лаплас — детерминантата ще бъде равна на произведението на единствения ненулев елемент в реда (стълба) и неговото адюнгирано количество. Така на всяка стъпка редът на детерминантата се понижава с единица.

$$\begin{vmatrix}4&-1&7\\ \color{red}{1}&0&5\\ 8&-2&2\end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow + \\ \cdot(-8)\quad \cdot(-4) \\ \longleftarrow + \end{array} = \begin{vmatrix}0&-1&-13\\ \color{red}{1}&0&5\\ 0&-2&-38\end{vmatrix} =$$

$$= \color{red}{1}.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&-13\\ -2&-38\end{vmatrix} = -(38-26) = -12.$$

В горната детерминанта от 3-ти ред първо извършваме следните елементарни действия: умножаваме втория ред по (-4) и така умножен го прибавяме към първия ред и отново умножаваме втория ред, този път по (-8), и го прибавяме към третия ред. След извършването на тези операции, в първия стълб остава само един елемент, различен от нула (елементът във втори ред, който е равен на 1), и можем да развием детерминантата по първия ѝ стълб, съгласно правилото на Лаплас.

Можем да пресметнем стойността на същата детерминанта и като първо умножим първия стълб по (-5) и го прибавим към третия стълб и след това развием получената детерминанта по втория ѝ ред:

$$\begin{array}{c} \cdot(-5) \qquad\qquad + \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -13 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 8 & -2 & -38 \end{vmatrix} = \mathbf{1}.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -13 \\ -2 & -38 \end{vmatrix} = -12.$$

Пример – детерминанта от 4-ти ред

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-3) \\ + \\ \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot 2\ \cdot 4 \\ + \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1).(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Пример – детерминанта от 4-ти ред

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix} = (-4)(-8)(-12) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 6.7. *Всяка триъгълна детерминанта е равна на произведението на елементите от главния ѝ диагонал.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}.$$

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.3.4.5 = 5! = 120.$$

Чрез елементарни преобразувания всяка детерминанта може да бъде приведена в триъгълен вид и тогава стойността ѝ може да бъде пресметната чрез прилагане на Следствие 6.7. Но това изисква извършване на повече елементарни действия в сравнение с развиването на детерминанта чрез правилото на Лаплас.

Теорема 6.6. *Сумата от произведенията на елементите от произволен ред (стълб) на една детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите от друг ред (стълб) на същата детерминанта е равна на нула.*

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.