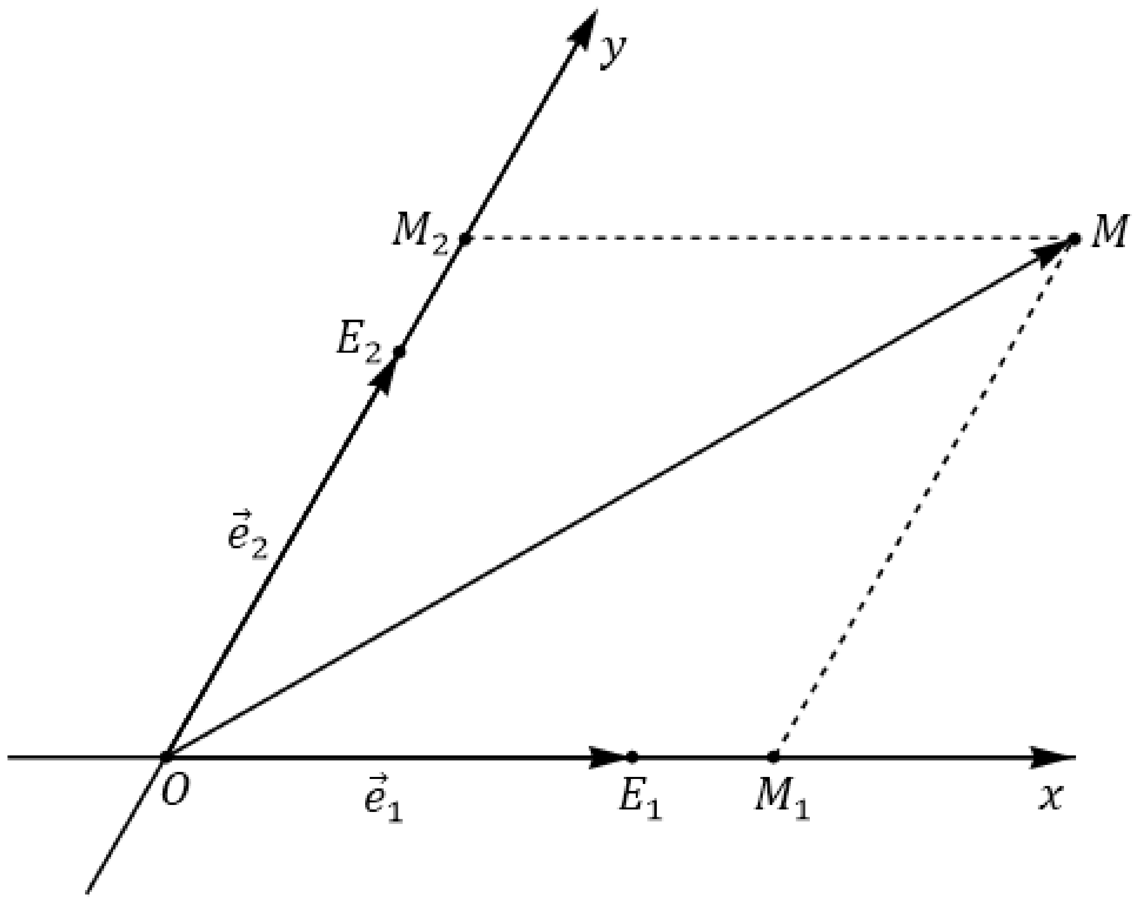
Тема 4.

Координатни системи

4.1. Координатна система в равнина

Всяка координатна система в равнината (двумерно векторно пространство) се състои от фиксирана точка O, наречена координатно начало, и база на равнината $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ от два неколинеарни вектора.



Оста, колинеарна с O и $\vec{e}_1$, се означава стандартно Ox и се нарича *абсцисна ос*, а оста, колинеарна с O и $\vec{e}_2$, се означава с Oy и се нарича *ординатна ос*. Координатната система стандартно се означава с Oxy.

Нека точка M е от същата равнина. Тогава насочената отсечка $\overrightarrow{OM}$ се нарича **радиус-вектор** на т. M. Тъй като векторът $\overrightarrow{OM}$ е от векторното пространство (равнината) с база $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, то този вектор еднозначно се разлага по тази база, т.е. съществуват еднозначно определение числа (x, y), за които

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Наредената двойка (x, y) са координатите на $\overrightarrow{OM}$ в базата $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, т.е. $\overrightarrow{OM}(x, y)$.

Координатите на радиус-вектора $\overrightarrow{OM}(x, y)$ на точка M относно базата от координатни вектори $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ се наричат **координати на точката** M относно координатната система, генерирана от тези вектори и точка O и записваме $M(x, y)$.

Нека $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Тъй като $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е база, то

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1 = 1.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2, \qquad \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2 = 0.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2.$$

Следователно $\overrightarrow{OE_1}(1,0)$ и $\overrightarrow{OE_2}(0,1)$, т.е. $E_1(1,0)$ и $E_2(0,1)$ в разглежданата координатна система.

Тъй като $\overrightarrow{OO} = \vec{o} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, то $O(0,0)$.

Теорема 4.1. *Нека $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в координатната система Oxy. Тогава $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.*

Доказателство. Тъй като $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то съответно $\overrightarrow{OA}(x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2)$.
От тъждеството на Шал имаме

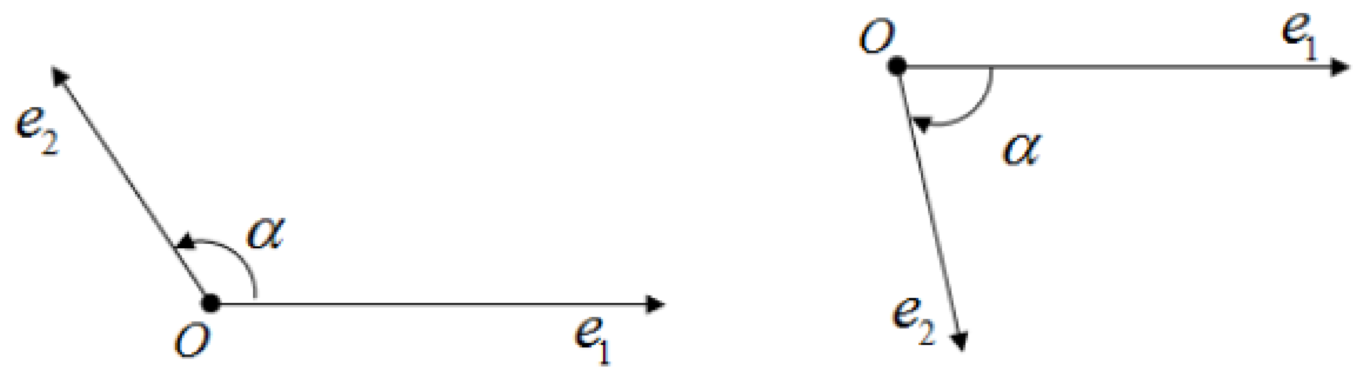
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Видове координатни системи:

- Ако координатните вектори са взаимно перпендикулярни, то координатната система се нарича *ортогонална*.
- Ако координатните вектори са единични, т.е. $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, то координатната система се нарича *нормирана*.
- Ако координатните вектори са взаимно перпендикулярни и единични, то координатната система се нарича *ортонормирана*.

Ориентация на координатна система в равнината.

Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е координатна система в равнината и $\alpha \in (0, \pi)$ е ъгълът, на който трябва да се завърти векторът $\vec{e}_1$ около точката O, за да стане еднопосочно колинеарен с вектора $\vec{e}_2$. Когато това завъртане е въртене обратно на часовниковата стрелка, координатната система се счита за **дясна** (положително ориентирана), а в противен случай се нарича за **лява** (отрицателно ориентирана).



Дясна и лява координатна система в равнината

Декартовата координатна система Oxy, с която стандартно работим в равнината, е дясна ортонормирана.

Пример 4.1. В равнината са дадени точките $A(2,-3)$, $B(4,5)$, $C(0,7)$. Докажете, че A, B и C са върхове на триъгълник и намерете координатите на средата M на отсечката AB и на медицентъра G на $\Delta\ ABC$.

Намираме координатите на две насочени отсечки от трите точки, например
$\overrightarrow{AB} = (4,5) - (2,-3) = (2,8)$, $\qquad \overrightarrow{AC} = (0,7) - (2,-3) = (-2,10)$.
Тъй като $(2,8)$ и $(-2,10)$ не са пропорционални, $\frac{2}{-2} \neq \frac{8}{10}$, то векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не са колинеарни. Следователно и точките A, B и C не са колинеарни (не лежат върху една права) и затова са върхове на триъгълник.

Точката M е средата на отсечката AB, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

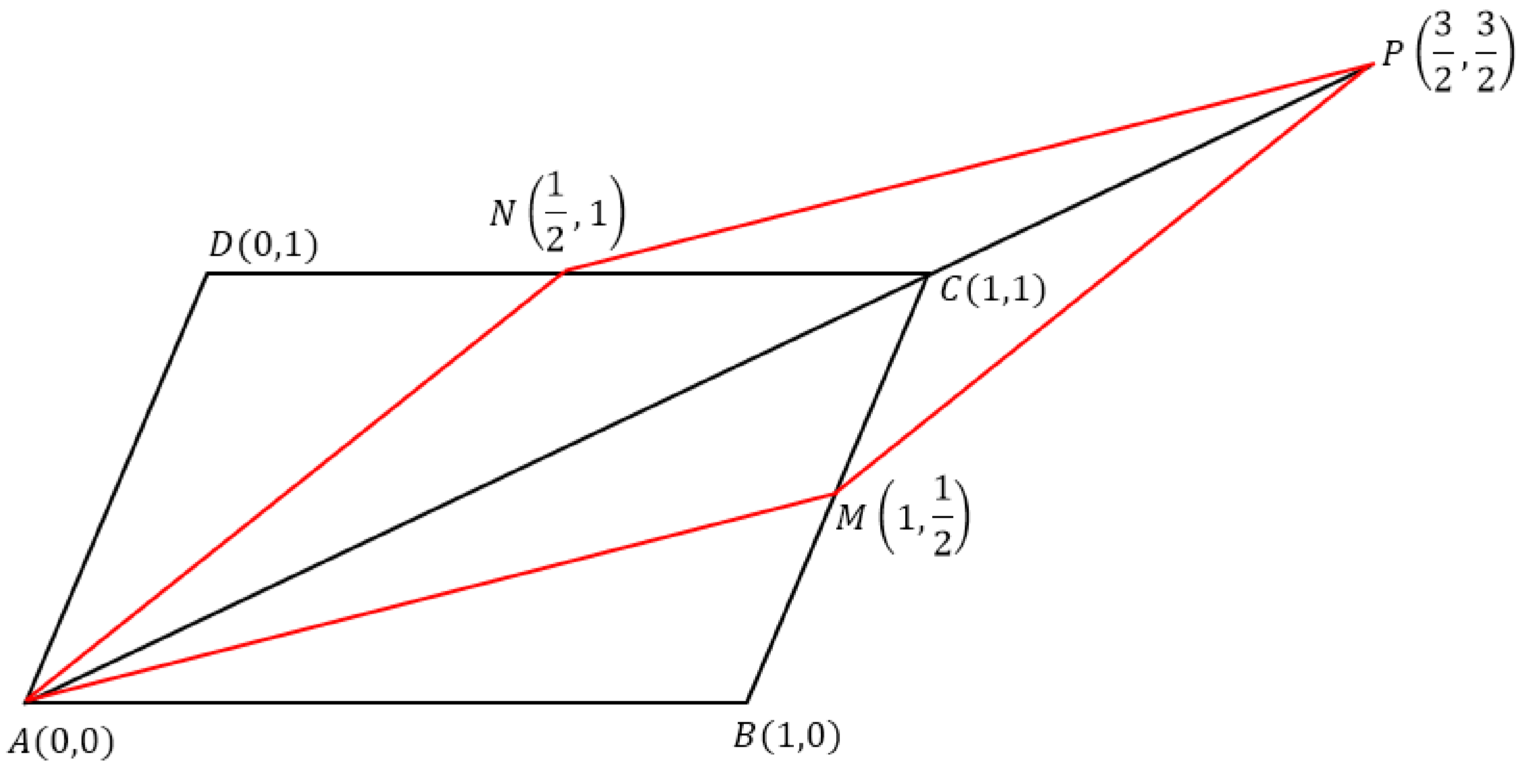
където O е произволна точка. Ако O е центърът на координатната система, то горното равенство е в сила за координатите на

трите точки. Следователно
$$M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\left[(2,-3)+(4,5)\right] = (3,1).$$
Точката G е медицентър на $\triangle\ ABC$, точно когато
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$
където O е произволна точка. Ако O е центърът на координатната система, то горното равенство е в сила за координатите на четирите точки. Следователно
$$M = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}\left[(2,-3)+(4,5)+(0,7)\right] = (2,3).$$

Пример 4.2. В равнината са дадени точките $A(2,-3)$, $B(4,5)$, $C(0,7)$. Намерете точка D от равнината, такава че фигурата $ABCD$ да бъде успоредник и намерете координатите на пресечната точка на диагоналите му.

Нека неизвестната точка $D(x,y)$. Едно необходимо и достатъчно условие за $ABCD$ да бъде успоредник е $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Пресмятаме
$$\overrightarrow{AB} = (2,8), \qquad \overrightarrow{DC} = (0,7) - (x,y) = (-x, 7-y).$$
Тогава $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, точно когато
$$\left| \begin{array}{l} -x = 2 \\ 7 - y = 8, \end{array} \right.$$
откъдето намираме $x = -2$, $y = -1$. Следователно $D(-2,-1)$. Тъй като установихме, че точките A, B и C са неколинеарни, то четирите точки не лежат върху една права и фигурата е успоредник. Пресечната точка на диагоналите AC и BD на успоредника $ABCD$ е средата на AC и BD. Използвайки формулата за среда на отсечка, намираме $E(1,2)$.

Пример 4.3. Нека $ABCD$ е успоредник. Точките M и N са средите съответно на BC и CD, а т. P е такава, че фигурата $AMPN$ също е успоредник. Докажете, че т. A, C и P са колинеарни.



Нека въведем координатна система в равнината на успоредника с начало т. A и координатни вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Следователно $A(0,0)$, $B(1,0)$, $D(0,1)$. Тъй като $ABCD$ е успоредник, то

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (1,0) + (0,1) = (1,1).$$

Тъй като M е среда на BC, то

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right] = \frac{1}{2}\left[(1,0) + (1,1)\right] = \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Аналогично, от това че N е средата на CD имаме

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right] = \frac{1}{2}\left[(0,1) + (1,1)\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

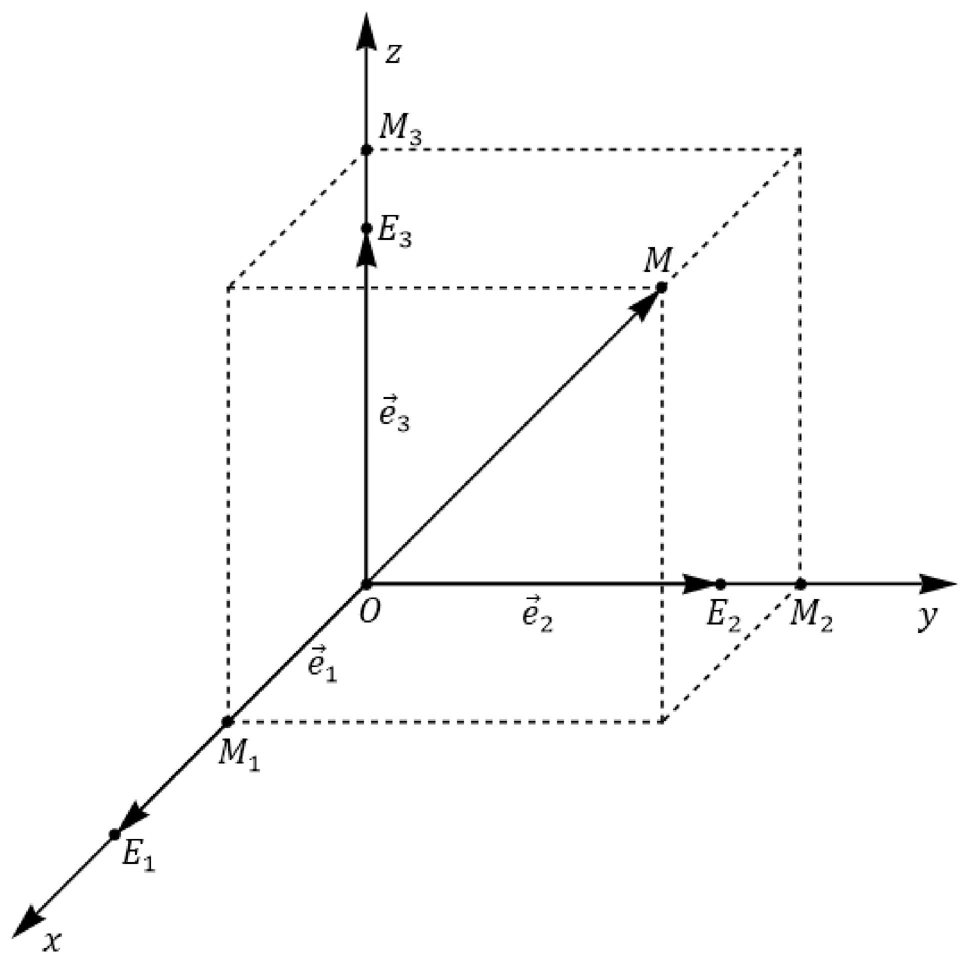
Отчитайки, че $AMPN$ е успоредник, имаме

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Следователно $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(1,1) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, което означава, че точките A, C и P са колинеарни.

4.2. Координатна система в тримерното пространство

Всяка координатна система в тримерното пространство се състои от фиксирана точка O, наречена координатно начало, и база на пространството $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ от три некомпланарни вектора.



Оста, колинеарна с O и $\vec{e}_1$, се означава стандартно Ox и се нарича *абсцисна ос*, оста, колинеарна с O и $\vec{e}_2$, се означава с Oy и се нарича *ординатна ос*, а остта колинеарна с O и $\vec{e}_3$, се означава стандартно O и се нарича *апликатна ос*. Координатната система стандартно се означава с $Oxyz$.

Координатите на произволна точка M от пространството се дефинират по аналогичен начин. Точката M има координати (x, y, z), т.е. $M(x, y, z)$, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Нека $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$. Тъй като $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е база, то

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OE_1} &= \vec{e}_1 = 1.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2 + 0.\vec{e}_3, \\
\overrightarrow{OE_2} &= \vec{e}_2 = 0.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2 + 0.\vec{e}_3, \\
\overrightarrow{OE_3} &= \vec{e}_1 = 0.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2 + 1.\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

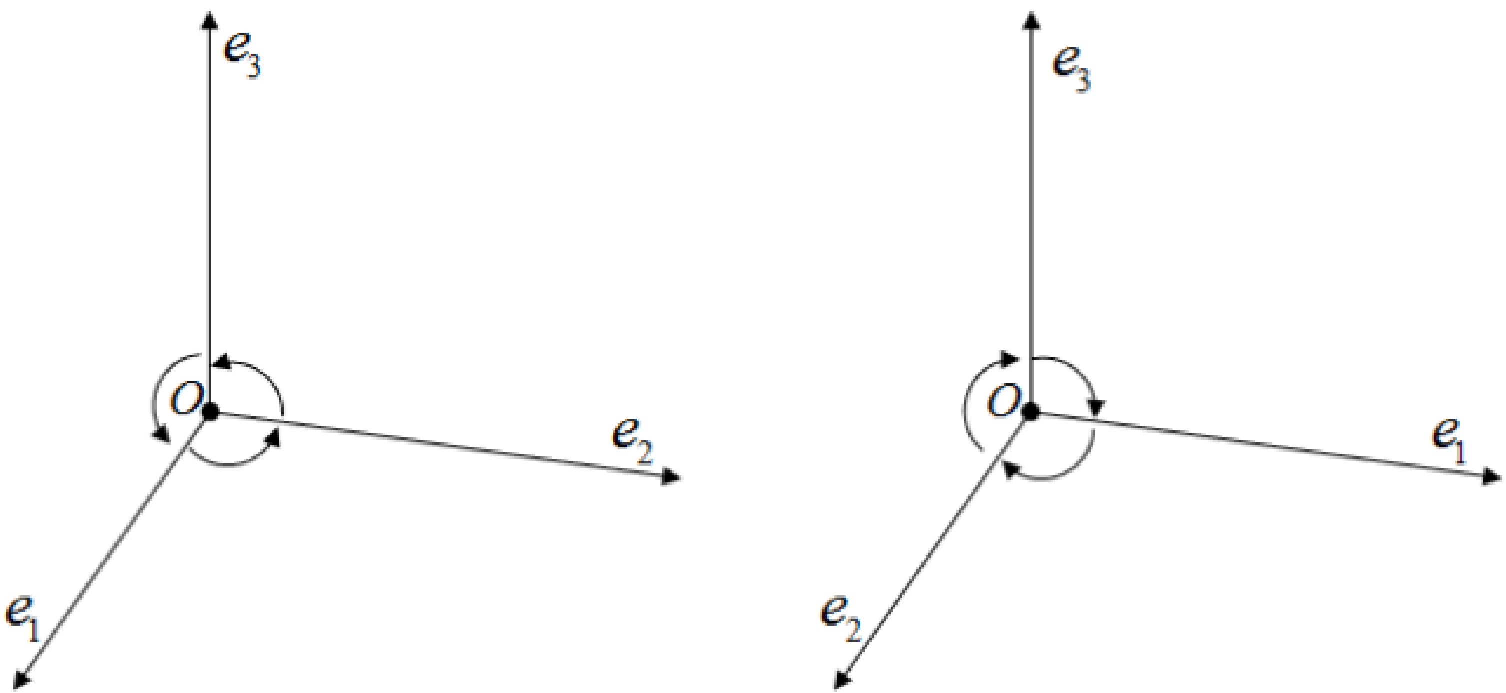
Следователно $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ и $E_3(0, 0, 1)$ в разглежданата координатна система.

Тъй като $\overrightarrow{OO} = \vec{o} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$, то $O(0,0,0)$.

Аналогично се доказва, че ако $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Ориентация на координатна система в тримерното пространство. Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е координатна система в пространството и наблюдателят е изправен по посока на $\vec{e}_3$. Тогава, ако от гледна точка на този наблюдател векторът $\vec{e}_1$ трябва да се завърти на ъгъл $\alpha \in (0, \pi)$ в посока, обратна на часовниковата стрелка, за да стане еднопосочно колинеарен на $\vec{e}_2$, то координатната система се нарича **дясна** (положително ориентирана). В противен случай, т.е. ако $\vec{e}_1$ се завърта по часовниковата стрелка, за да стане еднопосочно колинеарен на $\vec{e}_2$, координатната система се нарича **лява** (отрицателно ориентирана).

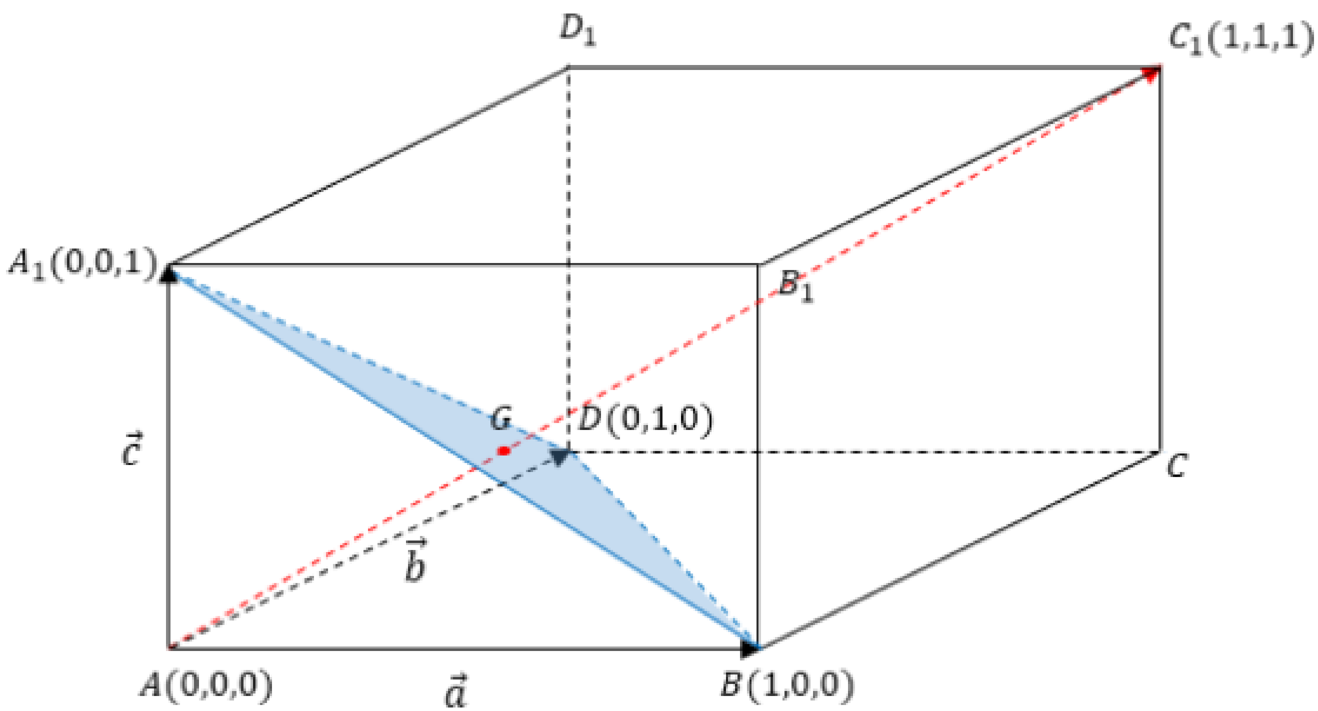


Дясна и лява координатна система в равнината

Стандартната координатна система, с която ще работим в тримерното пространство, ще бъде дясна ортонормирана (декартова).

Пример 4.4. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелепипед и G е медицентърът на $\triangle\ A_1BD$. Докажете, че точките A, G и C_1 са колинеарни.

Нека решим задачата, като въведем координатна система, за която A е координатното начало, а $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$. Тогава $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $A_1(0,0,1)$.



Тогава, тъй като G е медицентърът на $\triangle\ A_1BD$, то

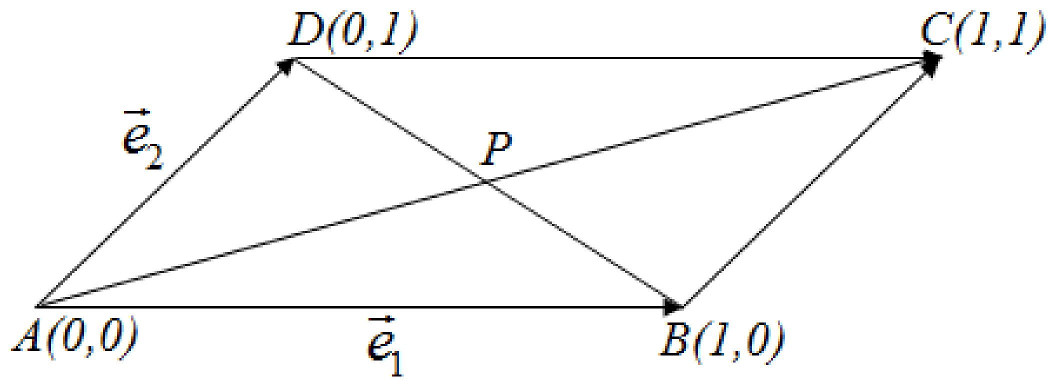
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{3}(1, 1, 1).$$

За $\overrightarrow{AC_1}$ имаме

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = (1, 1, 1).$$

Следователно $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$, което доказва, че двете насочени отсечки и следователно трите точки са колинеарни.

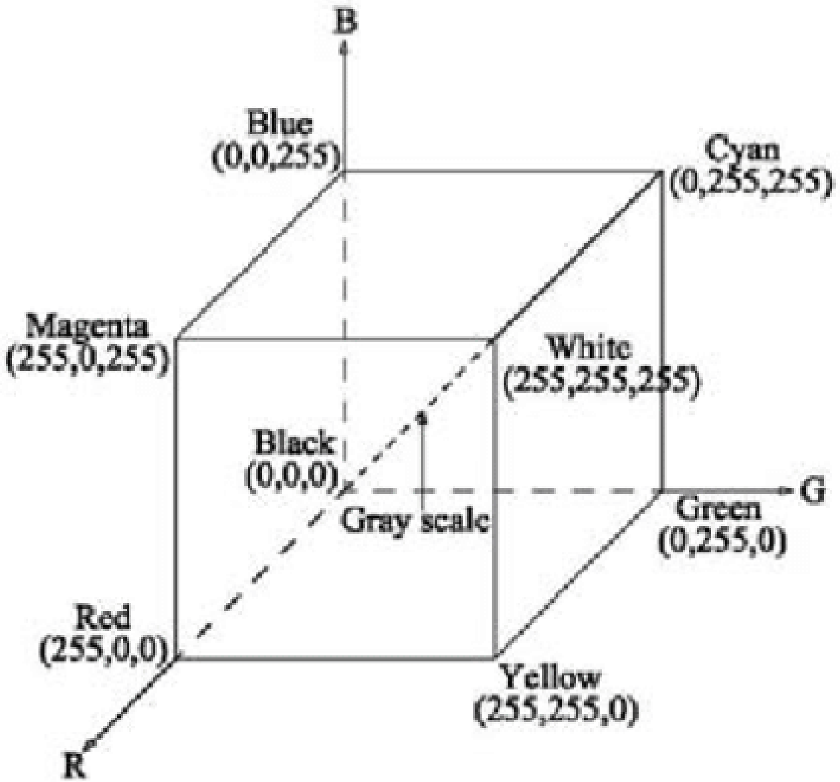
Пример 4.5. Даден е успоредник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите $AC \cap BD = P$. Въведете координатна система с център точката A и намерете координатите на P относно тази система.

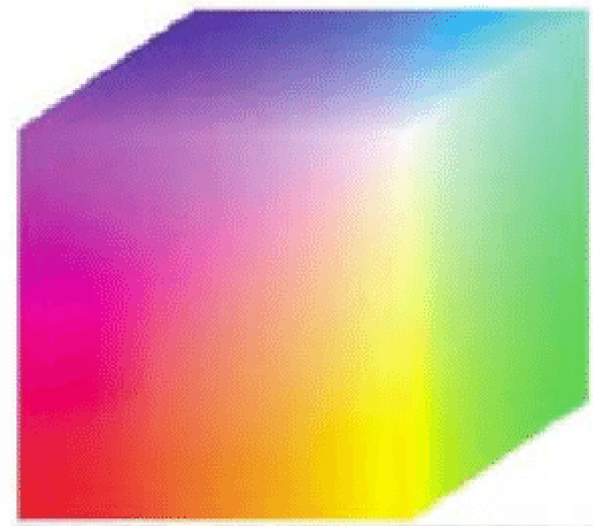


Координатната система ще се състои от т. $A(0,0)$ и два линейно независими вектора с начало т. A. Такива са например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Затова можем да положим $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Координатите на точките B и D съвпадат с тези на съответните им радиус-вектори. Следователно, $B(1,0)$, $D(0,1)$. Известно е, че диагоналът $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1,0) + (0,1) = (1,1)$, т. е. $C(1,1)$. Знаем още, че P е среда на AC, откъдето получаваме $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Същата зависимост е изпълнена и за съответните координати на двете точки. Така получаваме $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Друг избор на координатна система с начало т. A може да бъде, например, с координатни вектори $\vec{e}_1' = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{AC}$. Относно тази система $B(1,0)$, а $C(0,1)$. Тогава от $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ следва $P(0, \frac{1}{2})$.

Пример 4.6. Адитивната цветова система RGB (кубчето на цветовете).





Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.