Тема 3.

Линейна зависимост и линейна независимост на система от вектори. Пораждащи системи от вектори. Бази и размерност на векторно пространство

1. Линейна зависимост и независимост на система от вектори

Нека V е векторно пространство, $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ е произволна система от вектори на V, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Вектор u от вида

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

се нарича ***линейна комбинация*** на векторите $v_1, v_2, ..., v_k$.

Линейна комбинация се нарича *тривиална*, ако всички коефициенти в тази комбинация са равни на нула. В такъв случай комбинацията е равна на нулевия вектор на пространството

$$u = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k = o.$$

Множеството от всички линейни комбинации на $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, т.е.

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \,|\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

е векторно пространство и още по-точно, векторно подпространство на V, което се означава със $\operatorname{span}\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ и се нарича ***линейна обвивка*** на $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.

Определение 3.1. Система от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича ***линейно зависима***, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, така че да е в сила равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k = o.$$

С други думи, една система от вектори на дадено векторно пространство е линейно зависима, ако нулевият вектор на това пространство може да се представи като тяхна нетривиална линейна комбинация.
Векторите на линейно зависима система се наричат ***линейно зависими вектори***.

Пример 3.1. Нека разгледаме векторното пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Системата от вектори $a_1(1, 1, -1)$, $a_2(0, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 0)$ е линейно зависима, тъй като

$$a_1 + a_2 - a_3 = o = (0, 0, 0).$$

Забелязваме, че поне един от векторите a_1, a_2 и a_3 (в този случай и трите вектора) може да се представи като линейна комбинация на останалите два:

$$a_1 = a_3 - a_2, \qquad a_2 = a_3 - a_1, \qquad a_3 = a_1 + a_2.$$

Както ще видим по-нататък, това е една важна характеристика на векторите, принадлежащи на линейно зависима система.

Пример 3.2. Още един пример за линейно зависима система от вектори на $\mathbb{R}^3$ е следната: $u = (1, -1, 2)$, $v = (3, 0, -1)$, $w = (9, -3, 4)$, за които е в сила

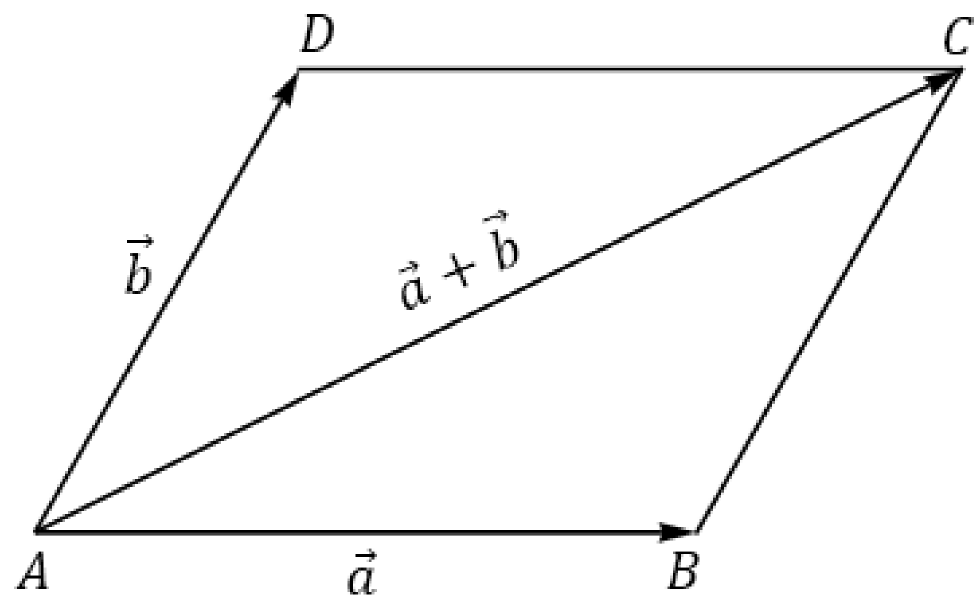
$$3u + 2v - w = o,$$

а също и равенствата

$$w = 3u + 2v, \qquad v = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}u, \qquad u = \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}v.$$

Пример 3.3. Векторите $a = (1, 2, -3)$ и $b = (-2, -4, 6)$ също са линейно зависими, тъй като $b = -2a$.

Пример 3.4. Линейно зависими са и векторите (насочените отсечки) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$ в успоредника $ABCD$, защото както знаем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Също в успоредника $ABCD$ линейно зависими са $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, защото $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.



Определение 3.2. Система от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича ***линейно независима***, ако само тяхната тривиална линейна комбинация е равна на нулевия вектор, т. е. равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k = o.$$

е изпълнено, точно когато $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Векторите на линейно независима система се наричат ***линейно независими вектори***.

Пример 3.5. Системата от вектори $b_1(1,0,1)$, $b_2(2,1,-1)$, принадлежащи на $\mathbb{R}^3$, е линейно независима.

За да проверим това, съставяме произволна линейна комбинация на тези вектори

$$xb_1+yb_2 = x(1,0,1)+y(2,1,-1) = (x+2y, y, x-y), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

и я приравняваме на нулевия вектор на разглежданото векторно пространство:

$$(x+2y, y, x-y) = (0,0,0).$$

Като сравним покомпонентно векторите от двете страни на горното равенство, установяваме, че то е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{aligned} &x+2y=0 \\ &y=0 \\ &x-y=0, \end{aligned}\right.$$

откъдето получаваме $x=y=0$. Следователно векторите b_1 и b_2 са линейно независими.

Пример 3.6. Нека разгледаме матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

принадлежащи на векторното пространство $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Нека x, y, z са произволни реални числа. За да установим дали системата $\{A, B, C\}$ е линейно зависима или независима, разглеждаме линейната комбинация $xA + yB + zC$ и я приравняваме на нулевия вектор на $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, т.е. нулевата квадратна матрица от втори ред. Имаме следнто матрично равенство (уравнение относно коефициентите x, y и z)

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След сравняване на съответните компоненти на матриците от двете страни на последното равенство достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0. \end{array}\right.$$

Единственото решение на горната система е нулевото, т.е. $x = y = z = 0$. Следователно само нулевата линейна комбинация на матриците A, B и C е равна на нулевата матрица, т.е. тези матрици на линейно независими.

Никоя от матриците A, B или C не може да се представи като линейна комбинация на останалите две. Същото важи и за линейно независимите вектори от Пример 3.5.

Както ще видим по-късно, това е в сила за векторите на всяка линейно независима система.

В тази лекция проверката за линейна зависимост или независимост на вектори правим, използвайки само определенията от теорията. По-нататък тази проверка ще правим чрез понятието ранг на матрица и/или апарата на детерминантите, което значително облекчава техническата част на задачата.

Теорема 3.1. *Система от един вектор е линейно зависима, точно когато този вектор е нулевият. Система от поне два вектора е линейно зависима, точно когато поне един от тези вектори е линейна комбинация на останалите.*

Доказателство. Нека V е векторно пространство и $\boldsymbol{a} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Разглеждаме произволна линейна комбинация на $\boldsymbol{a}$, т. е. вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ и я приравняваме на нулевия вектор: $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Съгласно определението за линейна зависимост векторът $\boldsymbol{a}$ е линейно зависим, точно когато $\lambda \neq 0$. От друга страна, от Следствие 1.5. знаем, че равенството $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ е изпълнено, точно когато $\lambda = 0$ или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Тъй като вече изключихме възможността $\lambda = 0$, остава само втората възможност, която е $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Така установихме и че система от един вектор е линейно независима, точно когато този вектор е различен от нулевия.

За да докажем втората част на твърдението, нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $k > 1$, е система вектори на V и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Първо предполагаме, че тази система и линейно зависима и следователно равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_i a_i + ... + \lambda_k a_k = o,$$

е изпълнено, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека този коефициент е $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$. Тогава можем да разделим двете страни на горното равенство на λ_i и от полученото равенство можем да изразим вектора a_i по следния начин

$$a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} a_2 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} a_k.$$

Обратно, ако предположим, че един от векторите от разглежданата система се изразява чрез останалите, например $a_1 = \mu_2 a_2 + ... + \mu_k a_k$, то получаваме: $(-1)a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_k a_k = o$.

Теорема 3.2. *Ако системата от вектори* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *е линейно независима, а системата* $\{u, v_1, v_2, ..., v_k\}$ *е линейно зависима, то векторът* u *се представя еднозначно като линейна комбинация на* $v_1, v_2, ..., v_k$.

Доказателство. Нека векторът u се изразява по два начина чрез линейно независимата система от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$:

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k$$

$$u = d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_kv_k.$$

Чрез почленно изваждане на двете равенства получаваме

$$o = (c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + ... + (c_k - d_k)v_k.$$

Тъй като векторите $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ са линейно независими, то горното равенство може да бъде изпълнено само в случай, че всички коефициенти в него са равни на нула, т.е.

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = ... = c_k - d_k = 0.$$

Следователно

$$c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2, ..., c_k = d_k,$$

откъдето следва, че двете линейни изразявания на u чрез векторите $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ трябва да съвпадат, с което твърдението е доказано.

Теорема 3.3. *Всяка система от вектори, която съдържа линейно зависима подсистема, е линейно зависима. Всяка линейно независима система съдържа само линейно независими подсистеми.*

Следствие 3.1. *Нулевият вектор не може да участва в линейно независима система.*

Това твърдение означава, че система от вектори, която съдържа нулевия вектор, е линейно зависима.
Доказателство. Нека е дадена системата от вектори $\{v_1, v_2, ..., v_k, o\}$. Тъй като

$$o = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k,$$

то поне един вектор от тази система се изразява като линейна комбинация на останалите. Съгласно Теорема 3.1 това гарантира, че системата от вектори е линейно зависима.

2. Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

Съгласно Теорема 3.1. един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият вектор.

Теорема 3.4. *Два свободни вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.*

Доказателство. Ако някой от векторите е нулевият, то твърдението е вярно.

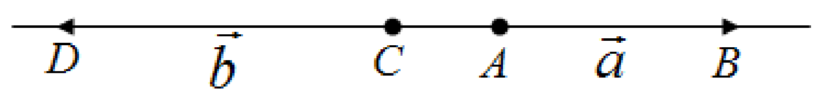
Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два ненулеви свободни вектора. Ако a и b са линейно зависими, то съгласно Теорема 3.1 единият от тях се изразява линейно чрез другия, т. е. еднозначно е определено число λ така, че

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Следователно, съгласно определението за умножение на свободен вектор с число, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Обратно, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, то за $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, в сила е $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ е изпълнено за $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Така и в двата случая следва, че свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими.

Пример 3.7. Всички вектори, които са колинеарни с дадена права, са линейно зависими помежду си.



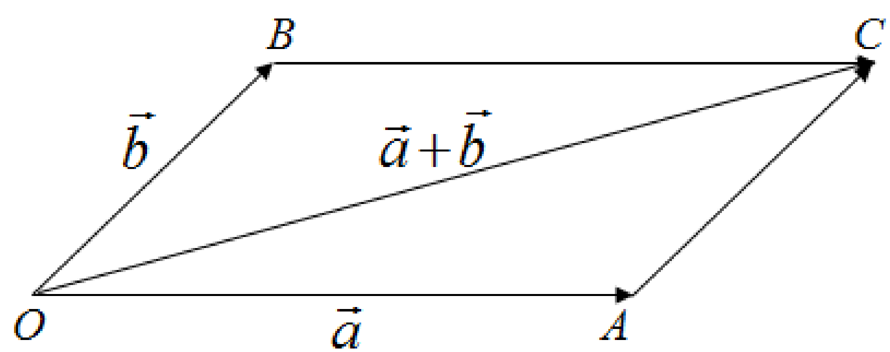
Фиг. 3.1

Пример 3.8. В успоредника $OACB$ векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са линейно независими, тъй като очевидно не са колинеарни (ъгълът между тях е винаги различен от 0° и 180°).

Докато векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, както и $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, тъй като $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.

Системата от вектори $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ е линейно зависима, тъй като

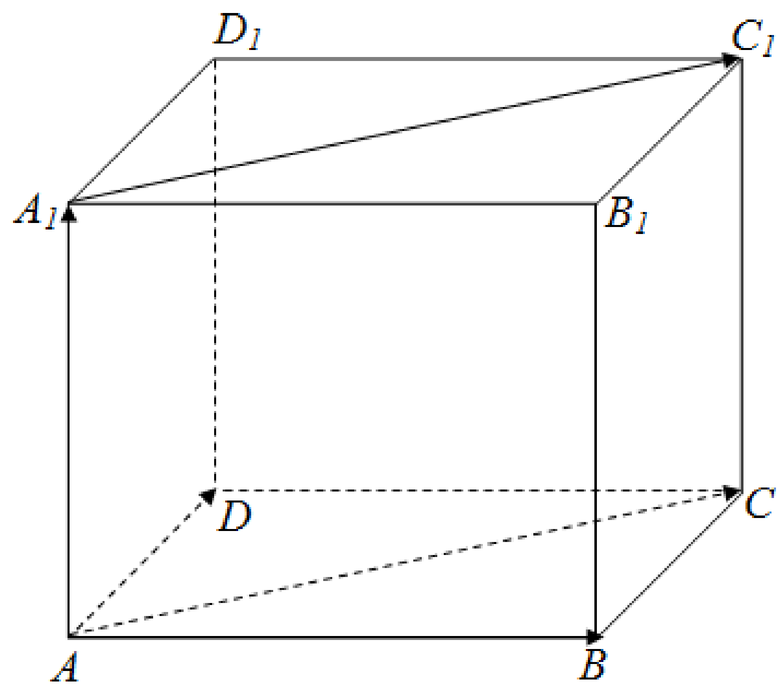
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$



Фиг. 3.2

Теорема 3.5. *Три свободни вектора са линейно зависими, точно когато са компланарни.*

Пример 3.9. Нека разгледаме паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не лежат в една равнина (не са компланарни) и следователно са линейно независими. Векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ са компланарни и следователно - линейно зависими.



Фиг. 3.3

Теорема 3.6. *Всеки четири свободни вектора са линейно зависими.*

Горното твърдение показва, че максималният брой линейно независими вектора в геометричното векторно пространство е три. Този факт а важен, тъй като по-нататък ще ни даде възможност да определим *размерността* на това пространство.

3. Пораждащи системи от вектори

Определение 3.3. Системата от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ на V се нарича ***пораждаща*** за V, ако всеки вектор на V се изразява като линейна комбинация на $a_1, a_2, ..., a_k$, т.е. $V = \text{span}\{a_1, ..., a_k\}$. Казва се още, че тази система поражда V, а V е породено от нея.

Векторите на една пораждаща система могат да бъдат както линейно независими, така и линейно зависими.

Пример 3.10. Нека разгледаме векторите
$e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ от векторното пространство $\mathbb{R}^2$. Тъй като всеки вектор $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ може да се представи във вида

$$v = xe_1 + ye_2 = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y),$$

то системата $\{e_1, e_2\}$ е пораждаща за $\mathbb{R}^2$. Вижда се, че всеки вектор от $\mathbb{R}^2$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на $\{e_1, e_2\}$.

Пример 3.11. Нека разгледаме друга система от вектори на $\mathbb{R}^2$, състояща се от $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,-1)$, $u_3 = (2,0)$.
Нека $v = (a,b)$ е произволен вектор на $\mathbb{R}^2$. Търсим представяне от вида

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 = x(1,1) + y(1,-1) + z(2,0),$$

където $x, y, z \in \mathbb{R}$. Горното равенство е еквивалентно на

$$(a,b) = (x + y + 2z, x - y),$$

откъдето след приравняване на двете компоненти, достигаме до системата линейни уравнения за x, y, z:

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ x - y = b. \end{array} \right.$$

Последната система има безброй много решения за x, y, z

$$x = \frac{a + b - 2z}{2}, \quad y = \frac{a - b - 2z}{2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Следователно всеки вектор $v \in \mathbb{R}^2$ може да се представи като линейна комбинация на системата от вектори $\{u_1, u_2, u_3\}$, откъдето достигаме до извода, че $\{u_1, u_2, u_3\}$ е пораждаща за $\mathbb{R}^2$, но представянето не е единствено (всеки вектор от $\mathbb{R}^2$ може да се представи по безброй много начини като линейна комбинация на $\{u_1, u_2, u_3\}$).

Съществената разлика между двете пораждащи системи на $\mathbb{R}^2$, които разгледахме, е следната.

Чрез векторите $\{e_1, e_2\}$ всеки вектор се представя по единствен начин, докато чрез $\{u_1, u_2, u_3\}$ всеки вектор се представя по безброй много начини. Това се дължи на факта, че системата $\{e_1, e_2\}$ е линейно независима (e_1 и e_2 не се изразяват един чрез друг), докато системата $\{u_1, u_2, u_3\}$ е линейно зависима ($u_3 = u_1 + u_2$).

Определение 3.4. Векторно пространство V се нарича *крайномерно*, ако притежава пораждаща система от краен брой вектори. В противен случай си се нарича *безкрайномерно*.

За всяко подпространство на крайномерно векторно пространство може да се намери крайна пораждаща система.

4. База и размерност на векторно пространство

Определение 3.5. Всяка наредена система от вектори, която е линейно независима и пораждаща за ненулево векторно пространство, се нарича ***база*** (***базис***) на това пространство. Векторите, които образуват база, се наричат *базисни*.

Векторното пространство $V = \{o\}$ не притежава база, тъй като всички негови вектори, а именно векторът o, са линейно зависими.

Пример 3.12. Да разгледаме отново векторното пространство $\mathbb{R}^2$ и системата от вектори $\{e_1, e_2\}$, където $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. За тази система от вектори вече установихме, че е пораждаща за $\mathbb{R}^2$ и е линейно независима. Следователно $\{e_1, e_2\}$ е една база на $\mathbb{R}^2$.

Всяка векторно пространство има безброй много бази. Така например $\{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ също е база $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.7. *Всяко ненулево крайномерно векторно пространство притежава база.*

Доказателство. Нека $V \neq \{o\}$ е крайномерно векторно пространство. Следователно V притежава пораждаща система, състояща се от краен брой вектори. Нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е такава система. Тогава всеки вектор $x \in V$ има представяне

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k. \tag{3.1}$$

Освен това поне един от векторите на пораждащата система е ненулев. След евентуално преномериране можем да считаме, че $a_1 \neq o$. Тогава системата $L_1 = \{a_1\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, то L_1 е база на V и твърдението е доказано.

Нека L_1 не е пораждаща. Тогава съществува вектор $a \in \{a_2, a_3, ..., a_k\}$, за който системата $L_2 = \{a_1, a\}$ е линейно независима. Това е вярно, защото в противен случай всеки вектор от $\{a_2, a_3, ..., a_k\}$ би се изразявал линейно чрез a_1 $(a_2 = \mu_2 a_1, ...,$

$a_k = \mu_k a_1$) и тогава за произволен $x \in V$ от (3.1) ще следва

$$x = \lambda_1 a_1 + (\lambda_2 \mu_2) a_1 + \ldots + (\lambda_k \mu_k) a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_k \mu_k) a_1.$$

Тогава системата L_1 ще бъде пораждаща, което е противоречие. След евентуално преномериране в системата $\{a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ можем да считаме, че $a = a_2$. Ако линейно независимата система L_2 е и пораждаща, то твърдението е доказано.

Нека L_2 не е пораждаща. Повтаряйки горните разсъждения, установяваме съществуването на вектор $b \in \{a_3, a_4, \ldots, a_k\}$, за който системата $L_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, твърдението е доказано. В противен случай горният процес продължава по същия начин до получаването на линейно независима система L_p, $1 \leq p \leq k$, която е пораждаща. Тъй като първоначалната пораждаща система $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ е крайна, то описаният процес също е краен – евентуално може да приключи за $L_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Следователно получената система L_k е база на V.

Следствие 3.2. *От всяка пораждаща система от вектори на ненулево крайномерно векторно пространство може да се извлече база на това пространство.*

Теорема 3.8. *Всяка линейно независима система от вектори на крайномерно векторно пространство може да се допълни до база на пространството.*

Теорема 3.9. *Всички бази на крайномерно векторно пространство се състоят от равен брой вектори.*

Определение 3.6. ***Размерност*** на ненулево крайномерно векторно пространство се нарича броят на векторите в произволна негова база. За размерност на нулевото пространство $\{o\}$ се приема числото 0.

Ако векторното пространство V има размерност n, записваме $\dim V = n$.

Теорема 3.10. *За n-мерно векторно пространство са в сила следните твърдения:*

1) *всяка линейно независима система има най-много n вектора;*

2) *всяка пораждаща пространството система има най-малко n вектора;*

3) *всяка линейно независима система от n вектора е база;*

4) *всяка пораждаща пространството система от n вектора е база;*

5) *всяка система от $n+1$ вектора е линейно зависима.*

Пример 3.12. Нека определим размерността на векторните пространства, разгледани в Тема.1, като посочим по една база на всяко от тях.

Една база на $\mathbb{R}^n$ се състои от наредените n-торки:

$$a_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \quad a_2 = (0, 1, 0..., 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, .., 0), ...,$$
$$a_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

Следователно $\dim \mathbb{R}^n = n$. В частност, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Размерността на геометричното векторно пространство е три, тъй като това е максималният брой линейно независими вектори в това пространство.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, колинеарни с дадена права, е равна на 1.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, компланарни с дадена равнина, е равна на 2.

Една база на $\mathbb{R}_n[x]$ се състои от полиномите $1, x, x^2, ..., x^n$. Тогава $\dim\mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Една база на $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ се състои от матриците:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ...,$$
$$E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Следователно $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Посочените в този пример бази се наричат естествени (канонични).

Нека V е n-мерно векторно пространство над $\mathbb{K}$ с база $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Тогава, съгласно Теорема 3.2, за произволен вектор $v \in V$ системата $\{x, e_1, e_2, ..., e_n\}$ е линейно зависима. Следователно представянето (разлагането) на v относно базисните вектори

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \tag{3.3}$$

е еднозначно, $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$.

Определение 3.7. Числата от наредената n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$, определена от (3.3), се наричат *координати* на вектора v относно базата $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Често вместо равенството (3.3) записваме $v(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Нека $w(y_1, y_2, ..., y_n)$ относно базата e, т. е.
$w = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$.
Тогава

$$v + w = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + ... + (x_n + y_n)e_n,$$
$$\lambda v = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + ... + (\lambda x_n)e_n,$$

което показва, че $(v + w)\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и $\lambda v(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Координатите на полинома $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ относно базата $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ на $\mathbb{R}_n[x]$ са коефициентите a_i пред съответните степени на x. Тогава можем да запишем $f(x)(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$.

Координатите на всяка матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ относно каноничната база на $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, определена от (3.2), са съответните елементи a_{ij} на тази матрица.

Пример 3.12. Докажете, че първите четири от полиномите на Ермит: $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 4x^2 - 2$, $h_3(x) = 8x^3 - 12x$ образуват база на $\mathbb{R}_3[x]$ и намерете координатите на $p(x) = 12x^3 - 8x^2 - 12x - 7$ относно тази база.

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.