

Тема 3.

Линейна зависимост и линейна независимост на система от вектори. Пораждащи системи от вектори. Базис и размерност на векторно пространство

1. Линейна зависимост и независимост на система от вектори

Нека V е векторно пространство, $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ е произволна система от вектори на V , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Вектор u от вида

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите v_1, v_2, \dots, v_k .

Линейна комбинация се нарича *тривиална*, ако всички коефициенти в тази комбинация са равни на нула. В такъв случай комбинацията е равна на нулевия вектор на пространството

$$u = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k = o.$$

Множеството от всички линейни комбинации на $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, т.е.

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

е векторно пространство и още по-точно, векторно подпространство на V , което се означава със $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и се нарича *линейна обвивка* на $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Определение 3.1. Система от вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ се нарича *линейно зависима*, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, така че да е в сила равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0.$$

С други думи, една система от вектори на дадено векторно пространство е линейно зависима, ако нулевият вектор на това пространство може да се представи като тяхна нетривиална линейна комбинация.

Векторите на линейно зависима система се наричат *линейно зависими вектори*.

Пример 3.1. Нека разгледаме векторното пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Системата от вектори $a_1(1, 1, -1)$, $a_2(0, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 0)$ е линейно зависима, тъй като

$$a_1 + a_2 - a_3 = o = (0, 0, 0).$$

Забелязваме, че поне един от векторите a_1 , a_2 и a_3 (в този случай и трите вектора) може да се представи като линейна комбинация на останалите два:

$$a_1 = a_3 - a_2, \quad a_2 = a_3 - a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2.$$

Както ще видим по-нататък, това е една важна характеристика на векторите, принадлежащи на линейно зависима система.

Пример 3.2. Още един пример за линейно зависима система от вектори на \mathbb{R}^3 е следната: $u = (1, -1, 2)$, $v = (3, 0, -1)$, $w = (9, -3, 4)$, за които е в сила

$$3u + 2v - w = 0,$$

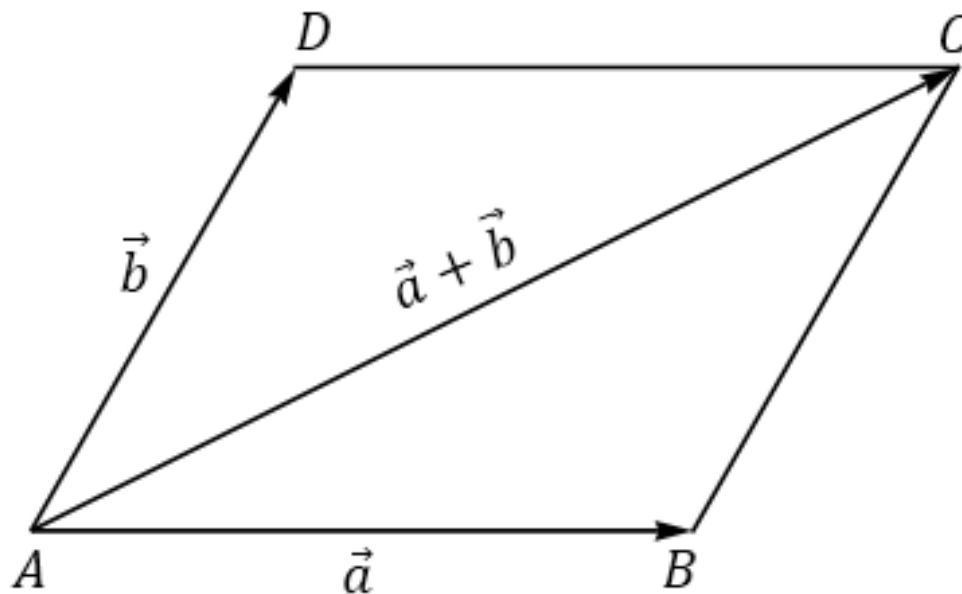
а също и равенствата

$$w = 3u + 2v, \quad v = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}u, \quad u = \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}v.$$

Пример 3.3. Векторите $a = (1, 2, -3)$ и $b = (-2, -4, 6)$ също са линейно зависими, тъй като $b = -2a$.

Пример 3.4. Линейно зависими са и векторите (насочените отсечки) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{AC} в успоредника $ABCD$, защото както знаем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Също в успоредника $ABCD$ линейно зависими са \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , защото $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.



Определение 3.2. Система от вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ се нарича *линейно независима*, ако само тяхната тривиална линейна комбинация е равна на нулевия вектор, т. е. равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = o.$$

е изпълнено, точно когато $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Векторите на линейно независима система се наричат *линейно независими вектори*.

Пример 3.5. Системата от вектори $b_1(1, 0, 1)$, $b_2(2, 1, -1)$, принадлежащи на \mathbb{R}^3 , е линейно независима.

За да проверим това, съставяме произволна линейна комбинация на тези вектори

$$xb_1 + yb_2 = x(1, 0, 1) + y(2, 1, -1) = (x + 2y, y, x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

и я приравняваме на нулевия вектор на разглежданото векторно пространство:

$$(x + 2y, y, x - y) = (0, 0, 0).$$

Като сравним покомпонентно векторите от двете страни на горното равенство, установяваме, че то е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

откъдето получаваме $x = y = 0$. Следователно векторите b_1 и b_2 са линейно независими.

Пример 3.6. Нека разгледаме матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

принадлежащи на векторното пространство $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Нека x , y , z са произволни реални числа. За да установим дали системата $\{A, B, C\}$ е линейно зависима или независима, разглеждаме линейната комбинация $xA + yB + zC$ и я приравняваме на нулевия вектор на $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, т.е. нулевата квадратна матрица от втори ред. Имаме следното матрично равенство (уравнение относно коефициентите x , y и z)

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След сравняване на съответните компоненти на матриците от двете страни на последното равенство достигаме до системата

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Единственото решение на горната система е нулевото, т.е. $x = y = z = 0$. Следователно само нулевата линейна комбинация на матриците A , B и C е равна на нулевата матрица, т.е. тези матрици на линейно независими.

Никоя от матриците A , B или C не може да се представи като линейна комбинация на останалите две. Същото важи и за линейно независимите вектори от Пример 3.5.

Както ще видим по-късно, това е в сила за векторите на всяка линейно независима система.

В тази лекция проверката за линейна зависимост или независимост на вектори правим, използвайки само определенията от теорията. По-нататък тази проверка ще правим чрез понятието ранг на матрица и/или апарата на детерминантите, което значително облекчава техническата част на задачата.

Теорема 3.1. Система от един вектор е линейно зависима, точно когато този вектор е нулевият. Система от поне два вектора е линейно зависима, точно когато поне един от тези вектори е линейна комбинация на останалите.

Доказателство. Нека V е векторно пространство и $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Разглеждаме произволна линейна комбинация на a , т. е. вектора λa и я приравняваме на нулевия вектор: $\lambda a = o$. Съгласно определението за линейна зависимост векторът a е линейно зависим, точно когато $\lambda \neq 0$. От друга страна, от Следствие 1.5. знаем, че равенството $\lambda a = o$ е изпълнено, точно когато $\lambda = 0$ или $a = o$. Тъй като вече изключихме възможността $\lambda = 0$, остава само втората възможност, която е $a = o$. Така установихме и че система от един вектор е линейно независима, точно когато този вектор е различен от нулевия.

За да докажем втората част на твърдението, нека $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k > 1$, е система вектори на V и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Първо предполагаме, че тази система е линейно зависима и следователно равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_k a_k = 0,$$

е изпълнено, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека този коефициент е $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$. Тогава можем да разделим двете страни на горното равенство на λ_i и от полученото равенство можем да изразим вектора a_i по следния начин

$$a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} a_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} a_k.$$

Обратно, ако предположим, че един от векторите от разглежданата система се изразява чрез останалите, например $a_1 = \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k$, то получаваме: $(-1)a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k = 0$.

Теорема 3.2. Ако системата от вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ е линейно независима, а системата $\{u, v_1, v_2, \dots, v_k\}$ е линейно зависима, то векторът u се представя еднозначно като линейна комбинация на v_1, v_2, \dots, v_k .

Доказателство. Нека векторът u се изразява по два начина чрез линейно независимата система от вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$:

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$$

$$u = d_1v_1 + d_2v_2 + \dots + d_kv_k.$$

Чрез почленно изваждане на двете равенства получаваме

$$0 = (c_1 - d_1)v_1 + (c_2 - d_2)v_2 + \dots + (c_k - d_k)v_k.$$

Тъй като векторите $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ са линейно независими, то горното равенство може да бъде изпълнено само в случай, че всички коефициенти в него са равни на нула, т.е.

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_k - d_k = 0.$$

Следователно

$$c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2, \dots, c_k = d_k,$$

откъдето следва, че двете линейни изразявания на u чрез векторите $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ трябва да съвпадат, с което твърдението е доказано.

Теорема 3.3. *Всяка система от вектори, която съдържа линейно зависима подсистема, е линейно зависима. Всяка линейно независима система съдържа само линейно независими подсистеми.*

Следствие 3.1. *Нулевият вектор не може да участва в линейно независима система.*

Това твърдение означава, че система от вектори, която съдържа нулевия вектор, е линейно зависима.

Доказателство. Нека е дадена системата от вектори $\{v_1, v_2, \dots, v_k, o\}$. Тъй като

$$o = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k,$$

то поне един вектор от тази система се изразява като линейна комбинация на останалите. Съгласно Теорема 3.1 това гарантира, че системата от вектори е линейно зависима.

2. Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

Съгласно Теорема 3.1. един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият вектор.

Теорема 3.4. *Два свободни вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.*

Доказателство. Ако някой от векторите е нулевият, то твърдението е вярно.

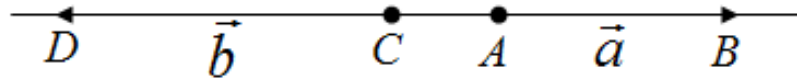
Нека \vec{a} и \vec{b} са два ненулеви свободни вектора. Ако a и b са линейно зависими, то съгласно Теорема 3.1 единият от тях се изразява линейно чрез другия, т. е. еднозначно е определено число λ така, че

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Следователно, съгласно определението за умножение на свободен вектор с число, векторите \vec{a} и \vec{b} са колинеарни.

Обратно, нека \vec{a} и \vec{b} са колинеарни. Ако \vec{a} и \vec{b} са еднопосочно колинеарни, то за $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, в сила е $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Ако \vec{a} и \vec{b} са разнопосочно колинеарни, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ е изпълнено за $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Така и в двата случая следва, че свободните вектори \vec{a} и \vec{b} са линейно зависими.

Пример 3.7. Всички вектори, които са колинеарни с дадена права, са линейно зависими помежду си.



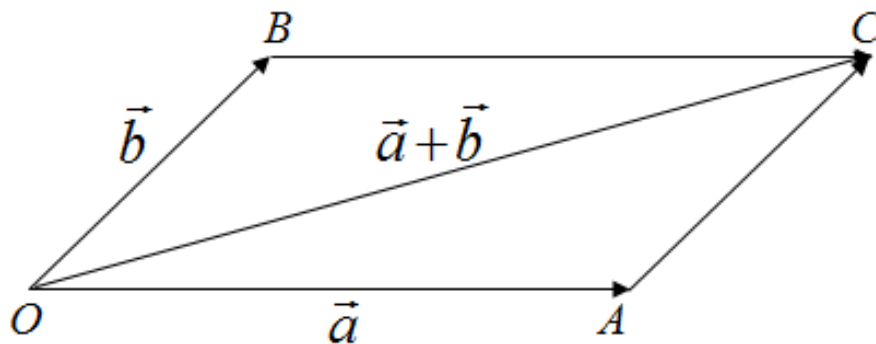
Фиг. 3.1

Пример 3.8. В успоредника $OACB$ векторите \vec{OA} и \vec{OB} са линейно независими, тъй като очевидно не са колинеарни (ъгълът между тях е винаги различен от 0° и 180°).

Докато векторите \vec{OA} и \vec{BC} , както и \vec{OB} и \vec{AC} са линейно зависими, тъй като $\vec{OA} = \vec{BC}$, $\vec{OB} = \vec{AC}$.

Системата от вектори $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ е линейно зависима, тъй като

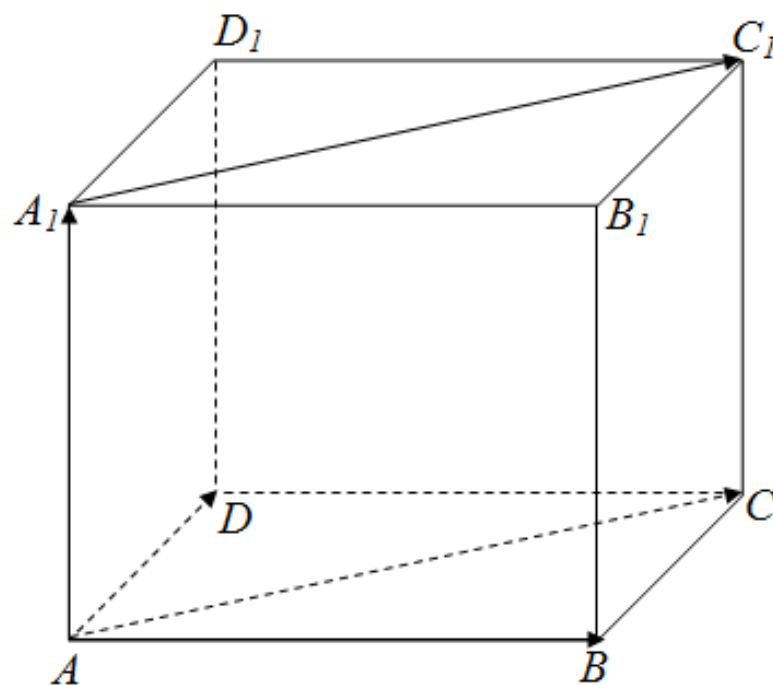
$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$



Фиг. 3.2

Теорема 3.5. Три свободни вектора са линейно зависими, точно когато са компланарни.

Пример 3.9. Нека разгледаме паралелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Векторите \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} и $\overrightarrow{AA_1}$ не лежат в една равнина (не са компланарни) и следователно са линейно независими. Векторите \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} и $\overrightarrow{A_1 C_1}$ са компланарни и следователно - линейно зависими.



Фиг. 3.3

Теорема 3.6. *Всеки четири свободни вектора са линейно зависими.*

Горното твърдение показва, че максималният брой линейно независими вектора в геометричното векторно пространство е три. Този факт е важен, тъй като по-нататък ще ни даде възможност да определим *размерността* на това пространство.

3. Пораждащи системи от вектори

Определение 3.3. Системата от вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ на V се нарича *пораждаща* за V , ако всеки вектор на V се изразява като линейна комбинация на a_1, a_2, \dots, a_k , т.е. $V = \text{span}\{a_1, \dots, a_k\}$. Казва се още, че тази система поражда V , а V е породено от нея.

Векторите на една пораждаща система могат да бъдат както линейно независими, така и линейно зависими.

Пример 3.10. Нека разгледаме векторите $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ от векторното пространство \mathbb{R}^2 . Тъй като всеки вектор $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ може да се представи във вида

$$v = xe_1 + ye_2 = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y),$$

то системата $\{e_1, e_2\}$ е пораждаща за \mathbb{R}^2 . Вижда се, че всеки вектор от \mathbb{R}^2 се представя по единствен начин като линейна комбинация на $\{e_1, e_2\}$.

Пример 3.11. Нека разгледаме друга система от вектори на \mathbb{R}^2 , състояща се от $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$, $u_3 = (2, 0)$.

Нека $v = (a, b)$ е произволен вектор на \mathbb{R}^2 . Тъсим представяне от вида

$$v = xu_1 + yu_2 + zu_3 = x(1, 1) + y(1, -1) + z(2, 0),$$

където $x, y, z \in \mathbb{R}$. Горното равенство е еквивалентно на

$$(a, b) = (x + y + 2z, x - y),$$

откъдето след приравняване на двете компоненти, достигаме до системата линейни уравнения за x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x - y = b. \end{cases}$$

Последната система има безброй много решения за x, y, z

$$x = \frac{a + b - 2z}{2}, \quad y = \frac{a - b - 2z}{2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Следователно всеки вектор $v \in \mathbb{R}^2$ може да се представи като линейна комбинация на системата от вектори $\{u_1, u_2, u_3\}$, откъ-

дето достигаме до извода, че $\{u_1, u_2, u_3\}$ е пораждаща за \mathbb{R}^2 , но представянето не е единствено (всеки вектор от \mathbb{R}^2 може да се представи по безброй много начини като линейна комбинация на $\{u_1, u_2, u_3\}$).

Съществената разлика между двете пораждащи системи на \mathbb{R}^2 , които разгледахме, е следната.

Чрез векторите $\{e_1, e_2\}$ всеки вектор се представя по единствен начин, докато чрез $\{u_1, u_2, u_3\}$ всеки вектор се представя по безброй много начини. Това се дължи на факта, че системата $\{e_1, e_2\}$ е линейно независима (e_1 и e_2 не се изразяват един чрез друг), докато системата $\{u_1, u_2, u_3\}$ е линейно зависива ($u_3 = u_1 + u_2$).

Определение 3.4. Векторно пространство V се нарича *крайно-мерно*, ако притежава пораждаща система от краен брой вектори. В противен случай си се нарича *безкрайномерно*.

За всяко подпространство на крайномерно векторно пространство може да се намери крайна пораждаща система.

4. База и размерност на векторно пространство

Определение 3.5. Всяка наредена система от вектори, която е линейно независима и пораждаща за ненулево векторно пространство, се нарича **база** (**базис**) на това пространство. Векторите, които образуват база, се наричат *базисни*.

Векторното пространство $V = \{0\}$ не притежава база, тъй като всички негови вектори, а именно векторът 0 , са линейно зависими.

Пример 3.12. Да разгледаме отново векторното пространство \mathbb{R}^2 и системата от вектори $\{e_1, e_2\}$, където $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. За тази система от вектори вече установихме, че е пораждаща за \mathbb{R}^2 и е линейно независима. Следователно $\{e_1, e_2\}$ е една база на \mathbb{R}^2 .

Всяко ненулево крайномерно векторно пространство има безброй много бази. Така например $\{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$ също е база на \mathbb{R}^2 .

Теорема 3.7. *Всяко ненулево крайномерно векторно пространство притежава база.*

Доказателство. Нека $V \neq \{o\}$ е крайномерно векторно пространство. Следователно V притежава пораждаща система, състояща се от краен брой вектори. Нека $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ е такава система. Тогава всеки вектор $x \in V$ има представяне

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k. \quad (3.1)$$

Освен това поне един от векторите на пораждащата система е ненулев. След евентуално преномериране можем да считаме, че $a_1 \neq o$. Тогава системата $L_1 = \{a_1\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, то L_1 е база на V и твърдението е доказано.

Нека L_1 не е пораждаща. Тогава съществува вектор $a \in \{a_2, a_3, \dots, a_k\}$, за който системата $L_2 = \{a_1, a\}$ е линейно независима. Това е вярно, защото в противен случай всеки вектор от $\{a_2, a_3, \dots, a_k\}$ би се изразявал линейно чрез a_1 ($a_2 = \mu_2 a_1, \dots,$

$a_k = \mu_k a_1$) и тогава за произволен $x \in V$ от (3.1) ще следва
$$x = \lambda_1 a_1 + (\lambda_2 \mu_2) a_1 + \dots + (\lambda_k \mu_k) a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_k \mu_k) a_1.$$

Тогава системата L_1 ще бъде пораждаща, което е противоречие. След евентуално преномериране в системата $\{a_2, a_3, \dots, a_k\}$ можем да считаме, че $a = a_2$. Ако линейно независимата система L_2 е и пораждаща, то твърдението е доказано.

Нека L_2 не е пораждаща. Повтаряйки горните разсъждения, установяваме съществуването на вектор $b \in \{a_3, a_4, \dots, a_k\}$, за който системата $L_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, твърдението е доказано. В противен случай горният процес продължава по същия начин до получаването на линейно независима система $L_p, 1 \leq p \leq k$, която е пораждаща. Тъй като първоначалната пораждаща система $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ е крайна, то описаният процес също е краен – евентуално може да приключи за $L_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Следователно получената система L_p е база на V .

Следствие 3.2. *От всяка пораждаща система от вектори на ненулево крайномерно векторно пространство може да се извлече база на това пространство.*

Теорема 3.8. *Всяка линейно независима система от вектори на крайномерно векторно пространство може да се допълни до база на пространството.*

Теорема 3.9. *Всички бази на крайномерно векторно пространство се състоят от равен брой вектори.*

Определение 3.6. *Размерност* на ненулево крайномерно векторно пространство се нарича броят на векторите в произволна негова база. За размерност на нулевото пространство $\{0\}$ се приема числото 0.

Ако векторното пространство V има размерност n , записваме $\dim V = n$.

Теорема 3.10. *За n -мерно векторно пространство са в сила следните твърдения:*

- 1) *всяка линейно независима система има най-много n вектора;*
- 2) *всяка пораждаща пространството система има най-малко n вектора;*
- 3) *всяка линейно независима система от n вектора е база;*
- 4) *всяка пораждаща пространството система от n вектора е база;*
- 5) *всяка система от $n + 1$ вектора е линейно зависима.*

Пример 3.12. Нека определим размерността на векторните пространства, разгледани в Тема.1, като посочим по една база на всяко от тях.

Една база на \mathbb{R}^n се състои от наредените n -торки:

$$a_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \\ a_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Следователно $\dim \mathbb{R}^n = n$. В частност, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Размерността на геометричното векторно пространство е три, тъй като това е максималният брой линейно независими вектори в това пространство.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, колинеарни с дадена права, е равна на 1.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, компланарни с дадена равнина, е равна на 2.

Една база на $\mathbb{R}_n[x]$ се състои от полиномите $1, x, x^2, \dots, x^n$.
Тогава $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Една база на $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ се състои от матриците:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \\ E_{mn} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Следователно $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Посочените в този пример бази се наричат естествени (канонични).

Нека V е n -мерно векторно пространство над \mathbb{K} с база $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Тогава, съгласно Теорема 3.2, за произволен вектор $v \in V$ системата $\{v, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е линейно зависима. Следователно представянето (разлагането) на v относно базисните вектори

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (3.3)$$

е еднозначно, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

Определение 3.7. Числата от наредената n -торка (x_1, x_2, \dots, x_n) , определена от (3.3), се наричат *координати* на вектора v относно базата $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Често вместо равенството (3.3) записваме $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Нека $w(y_1, y_2, \dots, y_n)$ относно базата e , т. е.

$$w = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_n e_n.$$

Тогава

$$v + w = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

$$\lambda v = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + \dots + (\lambda x_n)e_n,$$

което показва, че $(v + w)$ $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ и λv $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

Координатите на полинома $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ относно базата $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ на $\mathbb{R}_n[x]$ са коефициентите a_i пред съответните степени на x . Тогава можем да запишем $f(x)$ $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Координатите на всяка матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ относно каноничната база на $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, определена от (3.2), са съответните елементи a_{ij} на тази матрица.

Пример 3.12. Докажете, че първите четири от полиномите на Ермит: $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 4x^2 - 2$, $h_3(x) = 8x^3 - 12x$ образуват база на $\mathbb{R}_3[x]$ и намерете координатите на $p(x) = 12x^3 - 8x^2 - 12x - 7$ относно тази база.

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.
2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.
3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.
4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.
5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.
6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.
7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.