

Тема 2.

Матрици. Линейни действия с матрици

Определение 2.1. Всяка таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от mn на брой реални числа a_{ij} , разположени в m реда и n стълба, се нарича **матрица от тип $m \times n$** или $(m \times n)$ -матрица. Числата a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ се наричат *елементи на матрицата*.

Множеството от всички реални матрици от тип $m \times n$ се означава с $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Определение 2.2. Матрица, за която $m = n$, се нарича *квадратна матрица*. Множеството от елементите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ се нарича *главен диагонал* на матрицата. Множеството от елементите $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ се нарича *втори (вторичен) диагонал* на матрицата. Множеството от всички квадратни матрици от ред n се означава с $M_n(\mathbb{R})$.

Квадратните матрици от ред n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се наричат съответно *горно триъгълна* и *долно триъгълна* матрица.

Квадратна матрица от ред n , която е едновременно горно и долно триъгълна, се нарича *диагонална*. Следователно тя има вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нека $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ са матрици от тип $m \times n$, а $\lambda \in \mathbb{R}$.
Дефинираме линейните операции с матрици, както следва:

Събиране на матрици от един и същи тип

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}; \quad (2.1) \end{aligned}$$

Умножение на матрица с реално число

$$\begin{aligned}\lambda A &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Множеството $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, снабдено с действията (2.1) и (2.2) е векторно пространство над \mathbb{R} и се нарича *матрично векторно пространство*.

Нулевият елемент O на $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ е матрица от тип $m \times n$, всички елементи на която са нули, т. е.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Противоположният елемент на $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, е матрицата $(-A) = (-a_{ij})$, т. е.

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.1. Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Намерете $A + B$, $-A$, $2A + 3B$ и матрица $X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ такава, че $A + X = B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$2A + 3B = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$X = B + (-A) = B - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Докажете, че множеството на диагоналните матрици от втори ред

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

е векторно пространство.

Ще докажем, че \mathcal{M} е векторно подпространство на $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
За целта нека $A, B \in \mathcal{M}$, като

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава имаме:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

След полагане на $a_1 + a_2 = a$ и $b_1 + b_2 = b$ в последното равенство лесно се установява, че $A + B \in \mathcal{M}$, т.е. сумата на две диагонални матрици от втори ред е също диагонална матрица от втори ред. За произведението λA намираме

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda b_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

Така установихме, че $A + B, \lambda A \in \mathcal{M}$ за всеки $A, B \in M$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Следователно \mathcal{M} е векторно подпространство на $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M} \leq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$), т. е. \mathcal{M} е реално векторно пространство.

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.
2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.
3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.
4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.
5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.
6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.
7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.