Тема 17.

Собствени стойности и собствени вектори на матрица и на линейно преобразуване. Диагонализиране на матрица

1. Собствени стойности и собствени вектори на матрица

- Началото на теорията на собствените стойности и собствени вектори започва от изучаването на ротацията на твърдо тяло през 18-ти век от Леонард Ойлер и по-късно от Жозеф Луи Лагранж, който доказва, че главните оси на тялото са собствените вектори на матрицата на инерцията.

- Жан Даламбер открива връзката между собствените стойности и собствените вектори и матриците, решавайки система от линейни диференциални уравнения.

- Със система линейни диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти могат да бъдат описани например взаимоотношенията между два души: модел на любовта на Ромео и Жулиета и още за Ромео, Жулиета и диференциалните уравнения.

Знаем, че когато матрица умножава вектор, го преобразува в друг вектор. Нека разгледаме следния пример с квадратната матрицата A от 2-ри ред

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

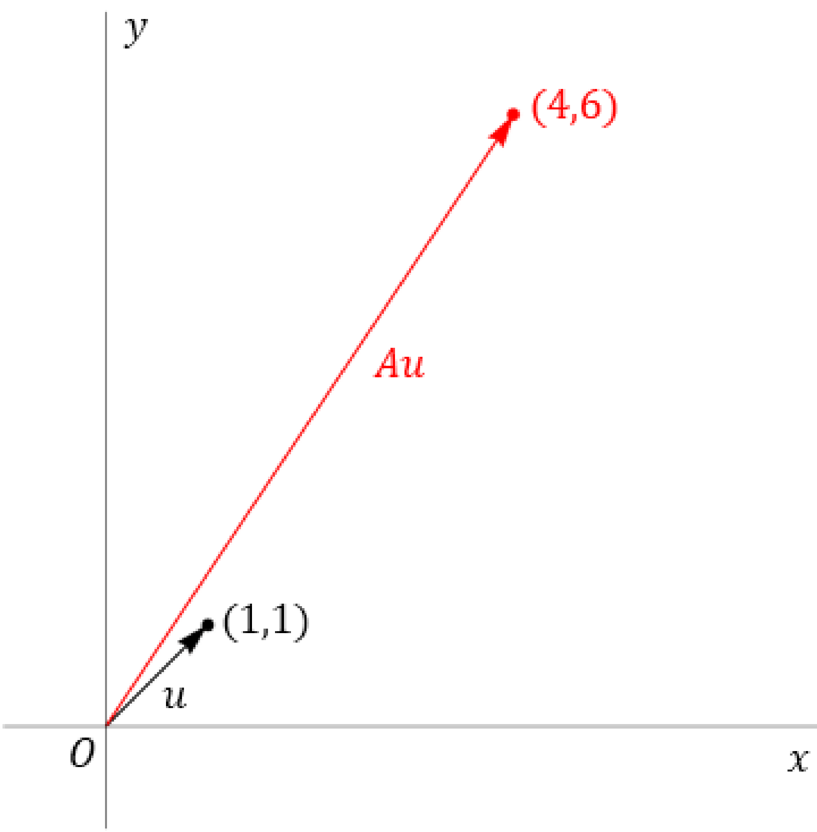
За вектора $u = (1, 1)$ имаме

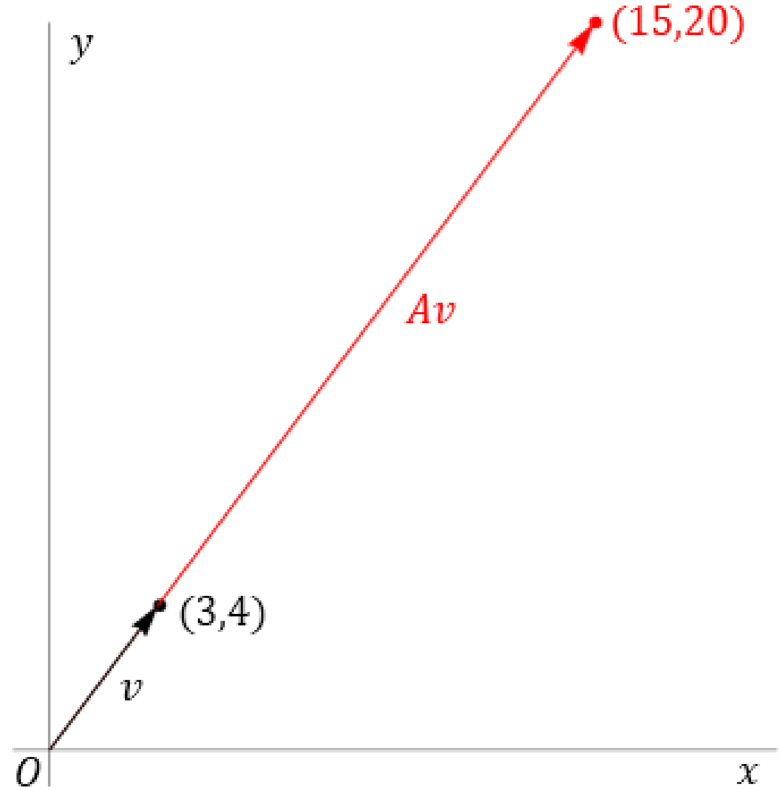
$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq cu, \quad c \in \mathbb{R}.$$

А за вектора $v = (3, 4)$ имаме

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5v.$$

Забелязваме, че образът на вектора u чрез A, т.е. векторът Au не е колинеарен на u, докато образът на вектора v чрез A, т.е. векторът Av е колинеарен на v (тъй като $Av = 5v$).





Именно на тези вектори е посветена настоящата лекция - вектори, които чрез матрица (или линейно преобразувание), се преобразуват в колинеарни вектори.

Определение 17.1. Нека A е квадратна матрица от n-ти ред с елементи от $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Комплексното (или реалното) число λ и ненулевият вектор $v \in \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$) се наричат съответно ***собствена стойност*** на A и ***собствен вектор*** на A, съответстващ на собствената стойност λ, ако е изпълнено

$$Av = \lambda v. \tag{17.1}$$

Уточнение. Векторът-стълб v се нарича *десен собствен вектор* на A. В случай, че $vA = \lambda v$, то v е вектор-ред и се нарича ляв собствен вектор на A. Тъй като матричното умножение не е комутативно, за произволна матрица левите и десните собствени вектори не са длъжни да съвпадат.

Множеството от всички собствени стойности на A се нарича *спектър на A*.

Синоними на термина *собствена стойност* са: собствено число, характеристична стойност, характеристичен корен.

Характеристично уравнение на матрица

Нека преобразуваме уравнението (17.1) по следния начин:

$$Av - \lambda v = o \quad \Leftrightarrow \quad Av - \lambda Ev = o \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)v = o,$$

където E е квадратната единична матрица от n-ти ред.

Следователно уравнението (17.1) има ненулеви решения за v, точно когато уравнението $(A - \lambda E)v = o$ има ненулеви решения. Последното матрично уравнение представлява система хомогенни линейни уравнения за координатите на v, чиято основна матрица е квадратна.

Знаем, че една система хомогенни линейни уравнения има ненулеви решения, точно когато е неопределена, т.е. в този случай точно когато детерминантата на основната матрица е нула

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{17.2}$$

Уравнението (17.2) е полиномно уравнение от n-та степен за неизвестното λ и се нарича ***характеристично уравнение*** на матрицата A, а полиномът $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ се нарича *характеристичен полином* на A.
Корените на уравнението (17.2) (реални и комплексни) са собствените стойности на матрицата A.

Пример 17.1. Намерете собствените стойности на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Съставяме характеристичното уравнение на A

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & 2 - \lambda \end{pmatrix},$$

откъдето

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda) - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0,$$

чиито корени са $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$. Тези две числа са собствените стойности на матрицата A.

В горния пример собствените стойности на реална матрица бяха собствени числа. Но биха могли да бъдат и комплексни. Нека разгледаме друг пример с матрицата

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение на B има вида

$$\det(B - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Уравнението $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ има отрицателна дискриминанта $D = -4 < 0$, следователно корените му са комплексни числа (двойка комплексно спрегнати числа), които са
$\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$, където $i = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица.

Собствени вектори на матрица

Заместваме всяка намерена собствена стойност λ на A в матричното уравнение (системата хомогенни линейни уравнения)

$$(A - \lambda E)v = o \tag{17.3}$$

и търсим ненулеви решения за v, които са собствените вектори на A, съответни на собствената стойност λ.

Тъй като $\det(A - \lambda E) = 0$, то системата (17.3) е неопределена. Множеството от нейните решения заедно с нулевия вектор образуват векторно пространство (векторно подпространство на $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$), което се означава с V_λ и се нарича ***собствено подпространство*** на A, съответстващо на собствената стойност λ.

Всяка база на V_λ, т.е. всяка фундаментална система решения на (17.3), се състои от линейно независими помежду си собствени вектори на A, съответстващи на собствената стойност λ.

Алгоритъм за намиране на собствени стойности и собствени вектори на матрица

Нека A е квадратна матрица от n-ти ред.

1) Намираме **собствените стойности** на A, като решаваме характеристичното уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.

2) Намираме **собствените вектори** на A, като за всеки корен λ на характеристичното уравнение (собствена стойност на A) решаваме съответната система хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda E)v = o$. Търсим ненулевите линейно независими решения за v, т.е. фундаментална системата решения на системата хомогенни линейни уравнения.

Пример 17.2. Установихме, че собствените стойности на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

са $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$. Нека намерим собствени вектори, съответни на тези собствени стойности.

Нека $v_1 = (x, y)$ е собствен вектор, съответстващ на $\lambda_1 = -2$. Следователно

$$(A - \lambda_1 E)v = o \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1+2 & 3 \\ 4 & 2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 3y = 0 \\ 4x + 4y = 0, \end{array} \right.$$

откъдето достигаме до уравнението $x + y = 0$. Решенията на последното уравнение са всички наредени двойки от вида $(p, -p)$.

Следователно собственото подпространство V_1 на A от собствените вектори, съответни на $\lambda_1 = -2$, се определя от

$$V_1 = \{(p, -p) \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

Един ненулев собствен вектор на A, съответстващ на $\lambda_1 = -2$, получаваме при заместването на p със стойност, различна от нула, например при $p = 1$ получаваме $v_1 = (1, -1)$. Този вектор определя една база на V_1.

Постъпваме аналогично за другата собствена стойност $\lambda_2 = 5$. Нека $v_2 = (x, y)$ е собствен вектор, отговарящ на λ_2, и решаваме

$$(A - \lambda_2 E)v = o \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-5 & 3 \\ 4 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} -4x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 0. \end{array} \right.$$

Решенията са всички вектори от вида $(3q, 4q)$. Следователно собственото подпространство V_2 на A от собствените вектори, съответни на $\lambda_2 = 5$, се определя от

$$V_2 = \{(3q, 4q) \mid q \in \mathbb{R}\}.$$

Един ненулев собствен вектор на A, съответстващ на $\lambda_2 = 5$, получаваме при заместването на q със стойност, различна от нула, например при $q = 1$ получаваме $v_2 = (3, 4)$. Този вектор определя една база на V_2.

Намерихме собствените стойности на матрицата

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$.

Нека $v_1 = (x, y)$ е собствен вектор на B, съответстващ на $\lambda_1 = 1 + i$. Тогава

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0, \end{array} \right.$$

чиито решения са наредените двойки от вида (p, ip), където $p \in \mathbb{R}$. Следователно един собствен вектор, съответстващ на собствената стойност λ_1, е $v_1 = (1, i)$.

Нека $v_2 = (x, y)$ е собствен вектор на B, съответстващ на $\lambda_2 = 1 - i$. Тогава

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0, \end{array} \right.$$

чиито решения са наредените двойки от вида $(q, -iq)$, където $q \in \mathbb{R}$. Следователно един собствен вектор, съответстващ на собствената стойност λ_2, е $v_2 = (1, -i)$.

Нека се върнем на матрицата A, за която установихме, че векторът $v_1 = (1, -1)$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$, и $v_2 = (3, 4)$ е собствен вектор, съответстващ на собствената стойност $\lambda_2 = 5$. Нека забележим, че двата вектора v_1 и v_2 са линейно независими помежду си, тъй като

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Нека отбележим, че векторите $\{v_1, v_2\}$ образуват база на $\mathbb{R}^2$.

Същото свойство е в сила и за двата намерени от нас собствени вектора на матрицата B, съответстващи на различни нейни собствени стойности - те са линейно независими и образуват база на $\mathbb{C}^2$.

Теорема 17.1. *Собствените вектори на квадратна матрица, отговарящи на различни нейни собствени стойности, са линейно независими помежду си.*

Доказателство. Нека A е квадратна матрица от n-ти ред и u и v са нейни собствени вектори $(u, v \neq o)$, съответстващи на различни собствени стойности, т.е.

$$Av = \lambda v, \qquad Au = \mu u, \qquad \lambda \neq \mu.$$

Нека допуснем, че u и v са линейно зависими, т.е. че съществува $c \neq 0$, така че $u = cv$. Тогава

$$Au = \mu u = \mu(cv), \qquad Au = A(cv) = c(Av) = c(\lambda v).$$

Като приравним последните изрази от двете равенства, достигаме до

$$c\mu v = c\lambda v \quad \Leftrightarrow \quad c(\lambda - \mu)v = o.$$

Тъй като $c \neq 0$ и $v \neq o$, то от горното равенство получаваме $\lambda = \mu$, което е противоречие с условието, че λ и μ са различни собствени стойности на A. Следователно допускането не е грешно и собствените вектори u и v са линейно независими.

Алгебрична кратност $\mathrm{alg\ mult}(\lambda)$ на собствена стойност λ на A се нарича кратността на λ като корен на характеристичното уравнение на A.

Геометрична кратност $\mathrm{geom\ mult}(\lambda)$ на λ се нарича размерността на собственото подпространство V_λ на A, съответно на λ, т.е. $\mathrm{geom\ mult}(\lambda) = \dim(V_\lambda)$.

За всяка собствена стойност λ е изпълнено

$$\mathrm{alg\ mult}(\lambda) \geq \mathrm{geom\ mult}(\lambda) \geq 1.$$

Ако λ е прост (еднократен) корен на характеристичното уравнение на A, то $\dim V_\lambda = 1$ (както видяхме в предходните два примера) - всички собствени вектори, съответстващи на λ, са колинеарни помежду си.

Множеството от всички собствени стойности на A се нарича ***спектър*** на A. Ако всички собствени стойности на A са прости, то се казва, че A има ***прост спектър***.

В този случай собствените вектори, отговарящи на различните собствени стойности на A, образуват база на $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$) (казва се, че A притежава база от собствени вектори).

Такъв е случаят с разгледаните от нас матрици A и B в Пример 17.1 и 17.2.

Корените на характеристичното уравнение могат и многократни.

Пример 17.3. Намерете собствените стойности и собствените вектори на матрицата

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение на матрицата C има вида

$$\det(C - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

чийто единствен корен е $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Характеристичното уравнение има двоен корен, т.е. $\operatorname{alg\,mult}(\lambda_1) = 2$.

Нека $v = (x, y)$ е собствен вектор, съответстващ на единствената собствена стойност на C. Следователно

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

еквивалентно на уравнението $x - y = 0$. Решенията на последното уравнение са всички наредени двойки от вида (p, p), $p \in \mathbb{R}$.

Следователно собственото подпространство V, съответстващо на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, се определя от

$$V = \{(p, p) \mid p \in \mathbb{R}.\}$$

Тъй като векторите от V могат да се представят във вида

$$(p, p) = p(1, 1),$$

то $v = (1, 1)$ е една база на V (един собствен вектор, отговарящ на единствената собствена стойност на матрицата C) и размерността на V е $\dim V = 1$. Следователно geom mult$(\lambda_1) = 1$.

В този пример, за разлика от предходните два примера, алгебричната и геометричната кратност на собствените стойности не съвпадат. На двукратна собствена стойност съответства едномерно собствено пространство. Следователно разгледаната в този пример матрица C не притежава база от собствени вектори.

2. Собствени стойности и собствени вектори на линейно преобразувание

Нека f е линейно преобразувание на n-мерното векторно пространство V. Ненулевият вектор $v \in V$ и числото λ се наричат съответно собствен вектор и собствена стойност на f, ако

$$f(v) = \lambda v.$$

Ако A е матрицата на f във фиксирана база на V, то $f(v) = Av$ за всеки $v \in V$.

Припомняме, че матриците на f в различните бази на V са подобни, т.е. ако A и B са матриците на f съответно в базите e и e' на V, то $B = T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода от e към e'.

Теорема 17.2. *Подобните матрици имат равни характеристични полиноми (следователно равни собствени стойности).*

Доказателство. Нека квадратните матрици A и B са подобни чрез неособената матрица T. Следователно $B = T^{-1}AT$ и $TT^{-1} = T^{-1}T = E$.

За характеристичния полином $p_B(\lambda)$ на B имаме

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) \\ &= \det(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T) = \det\big(T^{-1}(A - \lambda E)T\big) \\ &= \det(T^{-1})\det(A - \lambda E)\det T = \det(A - \lambda E) = p_A(\lambda). \end{aligned}$$

Така доказахме, че характеристичните полиноми на подобните матрици A и B съвпадат, т.е. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$. Тъй като характеристичните им уравнения са съответно от вида $p_A(\lambda) = 0$ и $p_B(\lambda) = 0$, то тези уравнения са еднакви и следователно корените им съвпадат.

Тогава под собствени стойности на линейно преобразуване f на V можем да разбираме собствените стойности на матрицата на f в произволна база на V.

Пример 17.4. Намерете собствените стойности и съответните им собствени подпространства на линейното преобразуване f на $\mathbb{R}^3$, определено от

$$f:\ (x, y, z) \longrightarrow (x + y - z,\ x + y + z,\ -x + y + z).$$

Първо намираме матрицата на f относно произволна база. Нека това бъде естествената база e на $\mathbb{R}^3$, съставена от векторите: $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(0, 1, 0)$ и $e_3(0, 0, 1)$. Тогава пресмятаме $f(e_1) = (1, 1, -1)$, $f(e_2) = (1, 1, 1)$ и $f(e_3) = (-1, 1, 1)$. Матрицата A на f в разглежданата база е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сега съставяме характеристичния полином на матрицата A и търсим неговите корени (собствените стойности на f):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

След развиване на детерминантата, характеристичното уравнение приема вида

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0.$$

Следователно характеристичните корени на A са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Това са и собствените стойности на f.

Ако на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ съответства собственото подпространство V_1 на f от вектори $v_1 = (x, y, z)$, то v_1 са решения на

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чрез метода на Гаус-Жордан установяваме, че горната система е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0. \end{array} \right.$$

Всяко ненулево решение на горната система е един собствен вектор на f, съответстващ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$. Векторното подпространство V_1 се състои от всички решения на горната система, т. е.

$$V_1 = \{(p, -p, p) \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

Имаме $\dim V_1 = 1$. Една база на V_1 е всяка фундаментална система решения на системата, например векторът $v_1 = (1, -1, 1)$.

Нека на собствената стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ съответства собственото подпространство V_2 на f. Векторите $v = (x, y, z)$, принадлежащи на V_2, са всички решения на системата

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Горната система е еквивалентна на уравнението

$$x - y + z = 0.$$

Следователно

$$V_2 = \{(s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Тъй като векторите от V_2 могат да се представят във вида

$$(s-t, s, t) = s(1,1,0) + t(-1,0,1),$$

то векторите от V_2 са линейни комбинации на неколинеарните вектори $v_2 = (1,1,0)$ и $v_3 = (-1,0,1)$. Следователно $\{v_2, v_3\}$ е една база на V_2 и размерността на V_2 е $\dim V_2 = 2$.

3. Диагонализиране на матрица и линейно преобразуване

Определение 17.2. Квадратната матрица $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ с елементи от числото поле $\mathbb{K}$ (където $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) се нарича ***диагонализируема*** над $\mathbb{K}$, ако е подобна на диагонална матрица $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, т.е.

$$D = T^{-1}AT \quad \Leftrightarrow \quad A = TDT^{-1} \tag{17.4}$$

където

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Намирането на неособената матрица T, чрез която съгласно (17.4) от A се получава D, се нарича ***диагонализиране*** на A чрез неособеното линейно преобразуване T.

Линейното преобразуване f на векторно пространство се нарича ***диагонализируемо,*** ако съществува база на векторното пространство, в която матрицата на f е диагонална. Тази база (при условие, че съществува) е база от собствени вектори на f.

Следователно неособената матрица T, чрез която се диагонализира f, е матрицата на прехода от базата, в която е зададено f, към база от собствени вектори на f, т.е. T съдържа в стълбовете координатите на собствените вектори на f.

Теорема 17.3. *Квадратната матрица A от n-ти ред е диагонализируема над $\mathbb{C}$, точно когато съществува база на $\mathbb{C}^n$ от собствени вектори на A.*

Забележка. Реалната квадратна матрица A от n-ти ред е диагонализируема над $\mathbb{R}$, точно когато притежава само реални собствени стойности и база от собствени вектори.

Теорема 17.4. *Квадратната матрица A от n-ти ред е диагонализируема, точно когато на всяка собствена стойност на A с кратност k съответства k-мерно собствено подпространство (т.е. k линейно независими собствени вектора).*

Теорема 17.5. *Ако квадратна матрица A от n-ти ред има n различни собствени стойности (т.е. прост спектър), то A е диагонализируема.*

Теорема 17.6. *Ако λ_1, λ_2, ..., λ_k са всички различни помежду си собствени стойности на квадратната матрица A от n-ти ред, то A е диагонализируема, точно когато сумата от размерностите на собствените подпространства V_{λ_i} $(i = 1, 2, ..., k)$ е равна на n, т.е.*

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + ... + \dim V_{\lambda_k} = n.$$

Ако A е диагонализируема, то $\mathrm{rg}(A)$ е равен на броя на ненулевите собствени стойности на A.

В общия случай (и за недиагонализируеми матрици) $\mathrm{rg}(A)$ е равен на броя на ненулевите собствени стойности на матрицата AA^T $(A^T A)$ (наричат се особени стойности на A).

Пример 17.5. Да разгледаме квадратните матрица A и B от Пример 17.1 и 17.2. За матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

намерихме, че собствените ѝ стойности са $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$ и съответни на тях собствени вектори са $v_1 = (1, -1)$ и $v_2 = (3, 4)$. Тъй като всички собствени стойности на A са прости корени на характеристичното ѝ уравнение (т.е. A има прост спектър), то A е диагонализируема (над $\mathbb{R}$, тъй като всички собствени стойности са реални). Изпълнено е $D = T^{-1}AT$, където

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

T е матрицата на прехода от стандартната база $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ на $\mathbb{R}^2$ към базата $\{v_1, v_2\}$ от собствени вектори на A. Съответните стълбове на T са формирани от елементите на v_1 и v_2.

За матрицата
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
намерихме, че собствените ѝ стойности са $\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$. Съответни на тези собствени стойности са следните собствени вектори: $v_1 = (1, i)$, $v_2 = (1, -i)$. Тази матрица също има прост спектър и затова е диагонализируема, но над $\mathbb{C}$.

Изпълнено е $D = T^{-1}AT$, където

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

За матрицата C от Пример 17.3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

установихме, че има една собствена стойност, която е двоен корен на характеристичното ѝ уравнение $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Но на тази собствена стойност съответства едномерно собствено подпространство (сумата от размерностите на всички собствени пространства на C е $1 < 2$). Следователно C не притежава база от собствени вектори и не е диагонализируема.

Специални реални квадратни матрици

- **Симетрични матрици.** Реалната квадратна матрица от n-ти ред $A = (a_{ij})$ се нарича симетрична, ако $A^T = A$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.
  Пример
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
- **Ортогонални матрици.** Реалната квадратна матрица от n-ти ред $A = (a_{ij})$ се нарича ортогонална, ако $AA^T = A^T A = E$, което е еквивалентно на $A^T = A^{-1}$. Друго еквивалентно условие - системата от редовете (стълбовете) на A е ортонормирана база на $\mathbb{R}^n$.
  Пример
  $$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Диагонализиране на симетрични матрици

Квадратната матрица A се нарича ***ортогонално диагонализируема,*** ако A е подобна на диагонална матрица D чрез ортогонална матрица Q (привежда се в диагонален вид чрез ортогонално преобразуване), т.е. $D = Q^{-1}AQ$ ($D = Q^T AQ$, т.е. $A = QDQ^T$).

Теорема 17.7. (Спектрална теорема за симетрични матрица на Аугустин Луи Коши)
Ако A е симетрична матрица от n-ти ред, то:

- *всички собствени стойности на A са реални;*
- *собствените вектори на A, които съответстват на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си;*
- *A притежава ортонормирана база от собствени вектори, т.е. A е ортогонално диагонализируема.*

Пример 17.6. Нека разгледаме пример на симетрични матрица с прост спектър. Да се диагонализира чрез ортогонално преобразуване симетричната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение е $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ с корени $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = -1$.

Корените на характеристичното уравнение можете да откриете, като използвате схемата на Хорнер или чрез разлагане, например

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - (\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 3) - (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

Нека векторът $v_1 = (x, y, z)$ е собствен вектор на A, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = 3$. Тогава

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Основната матрица на горната система хомогенни линейни уравнения е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно системата е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - z = 0. \end{array} \right.$$

Решенията на тази система са наредените тройки от вида $(0, p, p)$. Следователно един собствен вектор, отговарящ на собствената стойност λ_1, е векторът $v_1 = (0, 1, 1)$.

Аналогично намираме $v_2 = (1, 1, -1)$ и $v_3 = (2, -1, 1)$, отговарящи съответно на $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = -1$.

Намерените три собствени са линейно независими помежду си. Нещо повече - те са ортогонални помежду си. Проверете, че за скаларните произведения е изпълнено

$$v_1 v_2 = v_1 v_3 = v_2 v_3 = 0.$$

Това е така, тъй като трите вектора, отговарят на различни собствени стойности. Следователно системата $\{v_1, v_2, v_3\}$ е ортогонална база на $\mathbb{R}^3$. За да получим от нея ортонормирана база на $\mathbb{R}^3$, остава за всеки от векторите да намерим еднопосочно колинеарен на него вектор, чиято дължина е единица, т.е. да ги нормираме.

Пресмятаме дължините на трите вектора

$$|v_1| = \sqrt{2}, \quad |v_2| = \sqrt{3}, \quad |v_3| = \sqrt{6}.$$

За нормирането на векторите използваме, че ако $v \neq o$, то векторът $e = \frac{v}{|v|}$ е единичен $(|e| = 1)$. Следователно получаваме

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad e_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1),$$
$$e_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$$

е ортонормирана база $\mathbb{R}^3$.

Тогава координатите на векторите $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ формират стълбовете на ортогоналната матрица Q на прехода от стандартната база на $\mathbb{R}^3$ към ортонормираната база e от собствени вектори на A:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Чрез ортогоналната матрица Q, симетричната матрица A се привежда в диагоналния си вид

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изпълнено е $D = Q^{-1}AQ$ $(A = QDQ^{-1}, Q^{-1} = Q^T)$.

Приложение на диагонализирането на матрица – степенуване на матрица

Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, която е диагонализируема, т.е. $A = TDT^{-1}$, където D е диагонална матрица. Лесно се установява, че ако

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ то } D^k = \underbrace{DD...D}_{k \text{ пъти}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Тогава

$$A^k = \underbrace{(TDT^{-1})(TDT^{-1})...(TDT^{-1})}_{k \text{ пъти}} = TD^kT^{-1}.$$

Приложение на диагонализирането на матрица – намиране на обратна матрица

Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, която е диагонализируема, т.е. $A = TDT^{-1}$, където D е диагонална матрица. В случай, че A е обратима, т.е. 0 не е собствена стойност на A, то обратната матрица A^{-1} може лесно да бъде намерена от формулата за диагонализация на A.

Пресмятаме $A^{-1} = (TDT^{-1})^{-1} = TD^{-1}T^{-1}$. Тъй като D е диагонална матрица с ненулеви елементи по главния си диагонал, т.е.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ то } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.