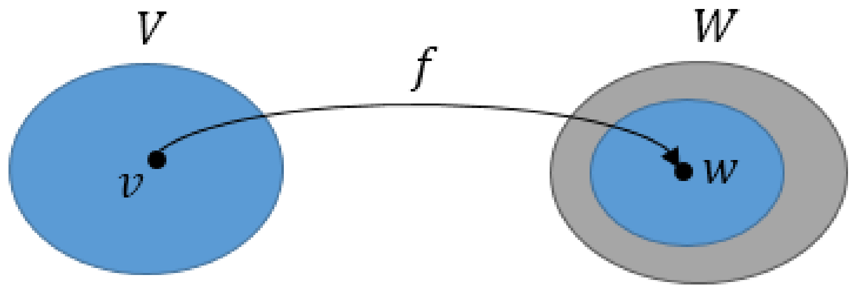
Тема 13.

Линейни преобразувания и техните матрици

Определение 13.1. Нека V и W са реални векторни пространства и нека $f : V \to W$ е изображение от V в W.



Изображението f се нарича ***линейно изображение*** (***линейно преобразуване***) *на* V *в* W, ако

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(cv) = cf(v),$$

за всеки $u, v \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

V се нарича векторно пространство на първообразите, а W - векторно пространство на образите. Ако $w \in W$ е образът на $v \in V$ чрез f, то записваме $f(v) = w$ и v се нарича първообраз (праобраз) на w.

Линейните преобразувания запазват линейните операции - събиране на вектори и умножение на вектор с число.

От първото условие в определението $f(u+v) = f(u) + f(v)$ се вижда, че линейното преобразуване f съпоставя на сумата $u + v \in V$ на два вектора $u, v \in V$ сумата $f(u) + f(v) \in W$ на образите им $f(u), f(v) \in W$.

От второто условието в определението $f(c.v) = cf(v)$ се вижда, че на произведение на число и вектор $c.v \in V$ линейното преобразуване f съпоставя произведението на същото число и образа на вектора $cf(v) \in W$.

Двете условия, за f да бъде линейно преобразуване, могат да бъдат обединени в едно - *да запазва линейните комбинации*, т. е.

$$f(cu + dv) = cf(u) + df(v), \qquad u, v \in V, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

От определението за линейно преобразувание следва, че за произволно линейно преобразувание f са в сила свойствата:

$$f(o) = o, \qquad f(-v) = -f(v) \qquad \text{за всяко } v \in V.$$

Доказателство:

1) Тъй като $0v = o$ за всяко $v \in V$, то $f(o) = f(0v)$. Тъй като f е линейно преобразувание, то $f(0v) = 0f(v) = o$. Следователно $f(o) = o$.

2) Нека използваме, че $v + (-v) = o$ за всяко $v \in V$. Тъй като f запазва събирането на вектори, то

$$f(o) = f(v + (-v)) = f(v) + f(-v).$$

Следователно $f(-v)$ е противоположният вектор на $f(v)$ във W, т.е. $f(-v) = -f(v)$.

Пример 13.1. Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е изображение, което на всеки вектор $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ съпоставя вектора $(x - y, x + 2y) \in \mathbb{R}^2$, т.е. $f : (x, y) \to (x - y, x + 2y)$.
а) Докажете, че f е линейно преобразуване.
б) Намерете образа на $v = (-2, 1)$ чрез f.
в) Намерете първообраза на $w = (-1, 8)$ чрез f.

Решение.
а) Проверяваме, че са изпълнени двете свойства от определението за линейно преобразуване (Определение 13.1).
Нека $v_1 = (x_1, y_1)$ и $v_2 = (x_2, y_2)$ са два произволни вектора от $\mathbb{R}^2$ и $c \in \mathbb{R}$. Тогава

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$cv_1 = c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1).$$

Съгласно условието на примера имаме

$$f(v_1+v_2)=((x_1+x_2)-(y_1+y_2),(x_1+x_2)+2(y_1+y_2))$$

$$=(x_1-y_1,x_1+2y_1)+(x_2-y_2,x_2+2y_2)=f(v_1)+f(v_2),$$

$$f(cv_1)=(cx_1-cy_1,cx_1+2cy_1)=c(x_1-y_1,x_1+2y_1)=cf(v_1).$$

От горните две равенства следва, че f е линейно преобразувание.

б) $f(v)=(-2-1,-2+2.1)=(-3,0)$;

в) Търсим вектор $u=(x,y)$ такъв, че $f(u)=(-1,8)$. Знаем, че $f(u)=(x-y,x+2y)$. Следователно $(x-y,x+2y)=(-1,8)$, откъдето достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x+2y=8 \end{array}\right.$$

Единственото решение на горната система е $x=2$, $y=3$. Следователно векторът $u=(2,3)$ е първообраз на вектора $w=(-1,8)$ чрез линейното преобразувание f.

Пример 13.2. Два примера на изображения, които не са линейни.

Изображението

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{определено чрез } f : (x, y) \to (x^2, y)$$

не е линейно, тъй като $f(cv) \neq cf(v)$, където $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $c \in \mathbb{R}$ - произволно реално число. Да проверим. Имаме

$$f(cv) = (c^2x^2, cy) = c(cx^2, y), \qquad cf(v) = c(x^2, y).$$

Проверете, че $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$.

Изображението

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{определено чрез } f : (x, y) \to (x + 1, y)$$

също не е линейно, тъй като отново не са изпълнени двете условия за линейност на изображението.

$$f(cv) = (cx + 1, cy), \qquad cf(v) = c(x + 1, y) = (cx + c, cy).$$

Изводът, до който можем да достигнем от определението за линейно преобразуване и от примерите, които разгледахме, е че едно изображение е линейно, ако координатите на образа на произволен вектор са линейни комбинации от координатите на първообраза на вектора.

В най-общия случай линейно преобразуване на $\mathbb{R}^2$ се задава по следния начин

$$f : (x, y) \longrightarrow (ax + by, cx + dy), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Нека разгледаме матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогава, ако означим $v = (x, y)^T$ (вектор-стълб), то

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = f(v).$$

Последното равенство показва, че съществува връзка между линейните преобразувания и матриците (умножението на матрици). Ще изясним тази зависимост в следващите слайдове. Преди това нека разгледаме още един пример.

Пример 13.3. Нека $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е линейно преобразуване и $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база на $\mathbb{R}^3$. Нека е известно, че

$$f(e_1) = (2, -1, 4), \quad f(e_2) = (1, 2, -2), \quad f(e_3) = (0, 1, 1).$$

Ако $v(1, 2, 3)$ в базата $\{e_1, e_2, e_3\}$, то намерете $f(v) =?$

Решение.

Тъй като по условие са известни координатите на вектора v в базата $\{e_1, e_2, e_3\}$, то

$$v = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

Тогава, тъй като f запазва линейните комбинации, имаме

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) \\
&= (2, -1, 4) + 2(1, 2, -2) + 3(0, 1, 1) = (4, 6, 3).
\end{aligned}
$$

Последният пример ни показва следното - за да намерим образа на произволен вектор чрез линейно преобразуване на дадено векторно пространство е достатъчно да са известни образите на векторите от произволна база на векторното пространство и координатите на вектора в тази база. Ще установим това и ще покажем връзката между линейните преобразувания и матриците.

Нека $f : V \to W$ е линейно преобразувание, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ е база на V, $w = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ е база на W.

Тогава $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$ са вектори от W и следователно се изразяват линейно чрез базата $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ на W, т. е. са определени числата a_{ij} така че

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m, \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Определение 13.2. Матрицата $A = (a_{ij})$ от тип $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

с елементи, определени от (13.1), се нарича матрица на линейното преобразуване $f : V \to W$ в базите $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

Стълбовете на A са координатите на образите чрез f на векторите $v_1, v_2, \dots, v_n$ от V в базата $w_1, w_2, \dots, w_m$ на W.

Равенството (13.1) се записва по следния начин в матричен вид

$$f(v) = wA,$$

$$(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)) = (w_1, w_2, ..., w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

При фиксирани бази v и w на всяко линейно преобразувание $f : V \to W$ съответства еднозначно определена матрица на f. Обратното също е вярно, всяка матрица е матрица на някое линейно преобразувание относно някакви бази. Следователно можем да отъждествяваме всяко линейно преобразувание с матрицата му в дадени бази.

Ако $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ е произволен вектор от V относно базата v, т. е.
$u = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$, то за образа му чрез линейното преобразувание $f : V \to W$ имаме

$$f(u) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + ... + x_nf(v_n),$$

т. е. за намирането на образа на произволен вектор от V е достатъчно да са известни образите на базисните вектори на V.

След заместване на $f(v_1), ..., f(v_n)$ от (13.1) в горното равенство, установяваме, че

$$\begin{aligned} f(u) = {} & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)w_1 + \\ & + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)w_2 + ... + \\ & + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)w_m. \end{aligned}$$

Следователно

$$f(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 13.4. Примери за матрици на линейни преобразувания:

Нулевото линейно преобразувание $\boldsymbol{o} : V \to W$, $\boldsymbol{o}(x) = \boldsymbol{o}$ за всяко $x \in V$. Относно произволни бази на V и W съответната му матрица е нулевата матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тъждественото преобразувание (*идентитетът*) id на векторното пространство V е изображение, при което $\mathrm{id}(x) = x$ за всяко $x \in V$. Тогава за базисните вектори $\{v_1, ..., v_n\}$ на V е изпълнено $f(v_1) = v_1, ..., f(v_n) = v_n$. Следователно матрицата на f в произволна база на V е единичната матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 13.5. Нека f е линейно преобразувание на $\mathbb{R}^3$, определено от

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= e_1 + e_2 - e_3, \\
f(e_2) &= -e_1 - e_2 + 2e_3, \\
f(e_3) &= 3e_3,
\end{aligned}
$$

където $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ е база на $\mathbb{R}^3$. Да се намери матрицата на f в базата e, както и $f(v)$, ако $v(1, 2, -1)$ относно базата e.

Решение.

Матрицата A на f в базата e се определя от

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Образа $f(v)$ на вектора v намираме по следния начин

$$f(v) = Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 13.6. Намерете матрицата на линейното преобразуване $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y) \to (x - y, x + 2y)$, в стандартната (каноничната) база на $\mathbb{R}^2$.

Решение.

Стандартната база на $\mathbb{R}^2$ се състои от векторите $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Първо намираме образите на e_1 и e_2 чрез f

$$f(e_1) = (1, 1), \quad f(e_2) = (-1, 2).$$

Сега трябва да намерим координатите на $f(e_1)$ и $f(e_2)$ спрямо стандартната база на $\mathbb{R}^2$. Именно тези числа ще формират стълбовете на търсената матрица.

Тъй като координатите на произволен вектор относно стандартна база съвпадат с неговите елементи, то елементите на $f(e_1)$ и $f(e_2)$ са координатите на тези вектори относно стандартната база на $\mathbb{R}^2$. Тогава матрицата на f в тази база е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Забележка. Това удобно за работа свойство на стандартните бази не се притежава от други бази, т.е. не можем по същия начин да запишем елементите на образите на вектори от друга база като елементи на матрицата на линейно преобразувание в тази база.

2. Изменение на матрицата на линейно преобразуване на векторно пространство при смяна на базата

Нека $f : V \longrightarrow V$ е линейно преобразуване на n-мерно векторно пространство V, а $A = (a_{ij})$ е матрицата му в дадена база e. В матричен вид това се записва по следния начин

$$f(e) = eA.$$

Нека e' е друга база на V, като означаваме с B матрицата на f в e', т. е.

$$f(e') = e'B,$$

а T е матрицата на прехода от e към e': $e' = eT$. Ще намерим връзката между матриците A и B. От последните три равенства и тъй като f е линейно преобразуване имаме

$$
\begin{aligned}
&f(e') = e'B = e(TB) \\
&f(e') = f(eT) = f(e)T = (eA)T = e(AT) \\
&\Longrightarrow \quad e(TB) = e(AT) \quad \Leftrightarrow \quad TB = AT.
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
B = T^{-1}AT. \tag{13.2}
$$

Теорема 13.1. *За всяко линейно преобразувание на векторно пространство матриците му A и B относно базите e и e' са свързани с равенството (13.2), където T е матрицата на прехода от e към e'.*

Определение 13.3. Матрица B се нарича *подобна на матрицата A чрез неособената матрица* T, ако $B = T^{-1}AT$.

От определението следва, че A, B и T са квадратни матрици от еднакъв ред.

Освен това ако B е подобна на A чрез T, то A е подобна на B чрез T^{-1}, тъй като

$$B = T^{-1}AT \quad \Longleftrightarrow \quad A = TBT^{-1} = (T^{-1})^{-1}BT^{-1}.$$

Тук ще изясним връзката между подобните и еквивалентните матрици. Ако матриците A и B са подобни, то тъй като матрицата T е неособена $(\det T \neq 0)$ следва, че матриците A и B имат равни рангове и следователно са еквивалентни.

Обратното обаче не винаги е вярно, т. е. не всеки две еквивалентни матрици са подобни (Фиг. 11.1).

Фиг. 13.1

Теорема 13.2. *Подобните матрици имат равни детерминанти.*

Доказателство.

Нека A и B са подобни матрица, т.е. $B = T^{-1}AT$. Тогава от свойството на детерминантите и умножението на матрици следва, че

$$\det B = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T.$$

Тъй като T и T^{-1} са взаимно обратни матрици, то $TT^{-1} = E$ и оттук имаме

$$\det(TT^{-1}) = \det E \quad \Leftrightarrow \quad \det T^{-1} \det T = \det E = 1.$$

Като отразим второто равенство в първото, установяваме, че $\det B = \det A$.

Следствие 13.1. *Матриците на линейно преобразуване на произволно векторно пространство относно различни бази имат равни детерминанти.*

Пример 13.7. Дадено е линейното преобразуване f на $\mathbb{R}^2$, определено от $f : (x, y) \to (x + y, 2x - y)$. Намерете матрицата на f в базата $\{v_1 = (1, 3), v_2 = (1, 2)\}$ на $\mathbb{R}^2$.

Решение.

Нека A е матрицата на f в стандартната база на $\{e_1, e_2\}$ на $\mathbb{R}^2$ ($e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$) и B е матрицата на f в базата $\{v_1, v_2\}$. Тогава $B = T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода от стандартната база $\{e_1, e_2\}$ към базата $\{v_1, v_2\}$. Следователно стълбовете на T съдържат координатите на векторите v_1 и v_2 в стандартната база (т.е. елементите на v_1 и v_2)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицата A намираме както в Пример 13.6. Първо намираме $f(e_1) = (1, 2)$ и $f(e_2) = (1, -1)$. Тогава

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сега остава да пресметнем

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Припомняме, че смисълът на елементите на матрицата B е следният (проверете, че са изпълнени равенствата)

$$f(v_1) = -9v_1 + 13v_2, \qquad f(v_2) = -6v_1 + 9v_2.$$

Пример. Нека V е тримерно векторно пространство с база $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Нека е дадена системата от вектори $v = \{v_1, v_2, v_3\}$, където

$$v_1 = e_1$$

$$v_2 = e_1 + e_2$$

$$v_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

а) Намерете матрицата T на прехода от e към v и докажете, че v е също база на V.
б) Ако $f : V \longrightarrow V$ е линейно преобразуване на V, определено от

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

$$f(e_2) = e_1 - e_2 - e_3$$

$$f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3,$$

то намерете матриците му A и B съответно в базите e и v.

Решение.

а) Вече бяха намерени матриците T на прехода от e към v и обратната ѝ матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

и поради $\det T = 1 \neq 0$ беше установено, че v е база на V.

б) Тъй като координатите на $f(e_1)$, $f(e_2)$ и $f(e_3)$ в базата e са съответно $f(e_1)(1,2,3)$, $f(e_2)(1,-1,-1)$, $f(e_3)(2,-1,1)$, то матрицата A на f в базата e има вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава матрицата B на f в базата v се получава от $B = T^{-1}AT$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Ранг и дефект на линейно преобразувание

Определение 13.4. Множеството на векторите от W, които са образи на вектори от V чрез f, се нарича ***област на стойностите*** *на* f и се означава с $\mathrm{im} f$.

Множеството от векторите на V, които чрез f се преобразуват в нулевия вектор на W, се нарича ***ядро*** *на* f и се означава с $\ker f$, т. е.

$$\mathrm{im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V, f(v) = w\}, \quad \ker f = \{v \in V \mid f(v) = o\}.$$

Теорема 13.3. *Множествата* $\mathrm{im} f$ *и* $\ker f$ *са векторни подпространства съответно на* W *и* V.

Определение 13.5. Числата

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im} f), \qquad \mathrm{def}(f) = \dim(\ker f)$$

се наричат съответно ***ранг*** и ***дефект*** на линейното преобразувание f.

Ще видим как се намират ранга и дефекта на линейно преобразувание чрез матрицата му в произволна база.

Нека $f : V \to W$ е линейно преобразувание на n-мерното векторно пространство V в m-мерното векторно пространство W и $A = (a_{ij})$ е матрицата на f в произволни бази на V и W

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вече знаем, че ако $v = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ е произволен вектор от V, то $f(v) = Av$.

Нека $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ е произволен вектор от векторното пространство W. Тогава $b \in \mathrm{im} f$, точно когато съществува $v \in V$ такъв, че $f(v) = b$, т.е. $Av = b$.

Знаем, че матричното равенство $Av = b$ е еквивалентно на системата линейни равенства

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Следователно $b \in \operatorname{im} f$, точно когато горната система линейни уравнения с основна матрица A има решения за $x_1, ..., x_n$.
Нека означим стълбовете на матрицата A

$$w_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., \quad w_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогава последната система линейни уравнения може да се запише по следния начин във векторен вид

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_n w_n = b.$$

От последното равенство се вижда, че векторът b трябва да бъде линейна комбинация на стълбовете на матрицата A. Това означава, че векторното пространство $\mathrm{im} f$ съвпада с линейната обвивка на стълбовете на A, т.е. със $\mathrm{span}\{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Следователно

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im} f) = \dim(\mathrm{span}\{w_1, w_2, ..., w_n\}) = \mathrm{rg}(A).$$

Теорема 13.4. *Рангът на линейно преобразуване е равен на ранга на матрицата му в произволна база.*

Нека $v = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in V$. Тогава $v \in \ker f$, точно когато $f(v) = Av = o$. Следователно $(x_1, x_2, ..., x_n)$ са решенията на системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{array} \right.$$

Теорема 13.5. *Нека $f : V \to W$ е линейно преобразуване и A е матрицата на f в произволна база на V. Тогава ядрото на f съвпада с векторното пространство на решенията на системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A.*

Теорема 13.6. *Ако $f : V \to W$ е линейно преобразувание, то*

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{def}(f) = \dim V.$$

Доказателство. Нека $\dim V = n$ и $\mathrm{def}(f) = s \leq n$, като $\{e_1, e_2, ..., e_s\}$ е една база на $\ker f$. Тъй като $\ker f$ е векторно подпространство на V ($\ker f \leq V$), то тази база на $\ker f$ може да се допълни до база на V. Нека $\{e_1, ..., e_s; v_1, ..., v_{n-s}\}$ е база на V. Ще докажем, че $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$ е база на $\mathrm{im} f$.

1) Да докажем, че $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$ е пораждаща система на $\mathrm{im} f$.
Нека $w \in \mathrm{im} f$. Следователно съществува $u \in V$ такъв, че $f(u) = w$. Векторът u се разлага линейно по разглежданата база на V

$$u = a_1 e_1 + ... + a_s e_s + b_1 v_1 + ... + b_{n-s} v_{n-s}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} w = f(u) &= f(a_1e_1 + ... + a_se_s + b_1v_1 + ... + b_{n-s}v_{n-s}) \\ &= a_1f(e_1) + ... + a_sf(e_s) + b_1f(v_1) + ... + b_{n-s}f(v_{n-s}). \end{aligned}$$

Тъй като $e_1, e_2, ..., e_s \in \ker f$, то $f(e_1) = ... = f(e_s) = o$. Тогава от горното равенство получаваме, че

$$w = f(u) = b_1f(v_1) + ... + b_{n-s}f(v_{n-s}).$$

Следователно всеки вектор $w \in \mathrm{im} f$ може да се представи като линейна комбинация на векторите $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$.

2) Да докажем, че $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$ е линейно независима. Разглеждаме произволна линейна комбинация на векторите от системата $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$, която приравняваме на нулевия вектор

$$c_1f(v_1) + c_2f(v_2) + ... + c_{n-s}f(v_{n-s}) = o.$$

Искаме да докажем, че $c_1 = c_2 = ... = c_{n-s} = 0$.

Тъй като f е линейно изображение, то

$$c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + ... + c_{n-s} f(v_{n-s}) = f(c_1 v_1 + ... + c_{n-s} v_{n-s}).$$

От последните две равенства получаваме $f(c_1 v_1 + ... + c_{n-s} v_{n-s}) = o$, откъдето следва, че векторът $c_1 v_1 + ... + c_{n-s} v_{n-s} \in \ker f$. Тогава този вектор се разлага по базата $\{e_1, e_2, ..., e_s\}$ на $\ker f$, т.е. съществува представянето

$$c_1 v_1 + ... + c_{n-s} v_{n-s} = b_1 e_1 + ... + b_s e_s.$$

Последното равенство е еквивалентно на

$$b_1 e_1 + ... + b_s e_s - c_1 v_1 - ... - c_{n-s} v_{n-s} = o.$$

Но тъй като $\{e_1, ..., e_s; v_1, ..., v_{n-s}\}$ е база на V, то от последното равенство следва, че коефициентите $b_1 = ... = b_s = 0$, $c_1 = ... = c_{n-s} = 0$.
Тогава от 1) и 2) следва, че $\{f(v_1), ..., f(v_{n-s})\}$ е база на $\mathrm{im} f$, откъдето имаме $\mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{im} f) = n - s$.

Следователно

$$\operatorname{rank}(f) + \operatorname{def}(f) = n - s + s = n = \dim V.$$

Пример 13.8. Нека $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ е линейно преобразувание и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

е матрицата му в произволни бази на $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Намерете $\operatorname{rg}(f)$ и $\operatorname{def}(f)$ и посочете по една база на $\operatorname{im} f$ и $\ker f$.

Решение. Търсим ранга на матрицата A

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

От последната матрица се вижда, че $\mathrm{rg}(A) = 3$. Следователно $\mathrm{rg}(f) = 3$.

За намирането на $\mathrm{def}(f)$, нека намерим $\ker f$. Произволен вектор $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ принадлежи на $\ker f$, точно когато $f(v) = Av = o$. Следователно векторите от $\ker f$ са решенията на системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица A. Решавайки системата, извършваме елементарни преобразувания по редовете на A до получаване на трапецовидната ѝ форма, намерена по-горе (последната еквивалентна матрица на A при търсенето на $\mathrm{rg}(A)$). Тогава интересуващата ни система хомогенни линейни уравнения е еквивалентна на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Системата съдържа 3 независими уравнения за 4 неизвестни. Следователно е неопределена и общото ѝ решение се определя от 1 параметър. Ако изберем $x_4 = p \in \mathbb{R}$, то последователно намираме $x_3 = 2p$, $x_2 = -3p$, $x_1 = p$. Следователно решенията на тази система са наредените четворки от вида $(p, -3p, 2p, p)$, т.е.

$$\ker f = \{(p, -3p, 2p, p) \mid p \in \mathbb{R}\}.$$

Тъй като

$$(p, -3p, 2p, p) = p(1, -3, 2, 1),$$

то векторите от $\ker f$ са колинеарни на вектора $v = (1, -3, 2, 1)$. Следователно векторът v е база на $\ker f$, откъдето достигаме до $\operatorname{def}(f) = \dim(\ker f) = 1$.

Остава да намерим база на $\mathrm{im} f$. За тази цел трябва да намерим база на векторното пространство от линейните комбинации на стълбовете на A. Един лесен начин да направим това е да приведем в трапецовидна форма A^T. Тогава ненулевите редове в A^T ще образуват една база на $\mathrm{im} f$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ + \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \; \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно системата от векторите $w_1 = (1, -1, 2)$, $w_2 = (0, 1, 1)$, $w_3 = (0, 0, 1)$ е една база на $\mathrm{im} f$. Оттук отново се вижда, че $\dim(\mathrm{im} f) = 3$.

В сила е Теорема 13.6, тъй като

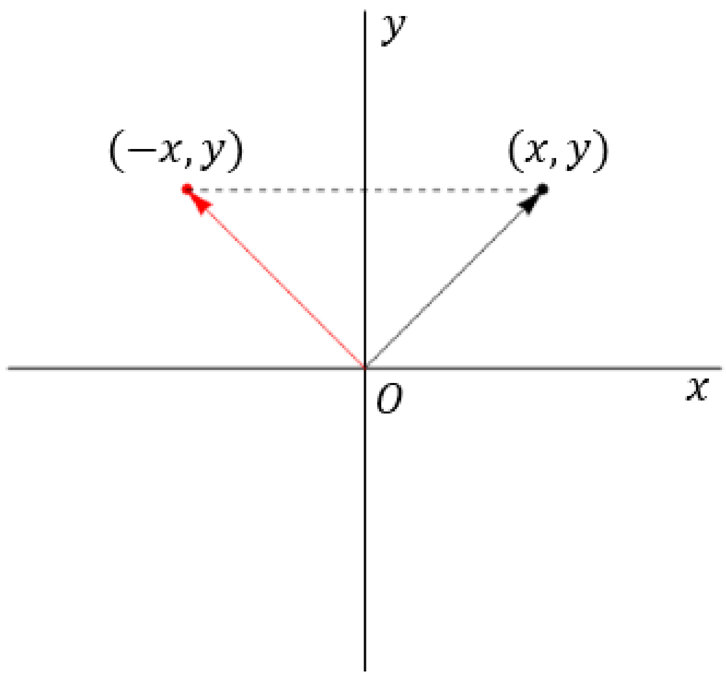
$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{def}(f) = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

4. Геометрия на линейните преобразувания

Нека разгледаме преобразувания на равнината и техните матрици в стандартната база $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

Осева симетрия относно Oy

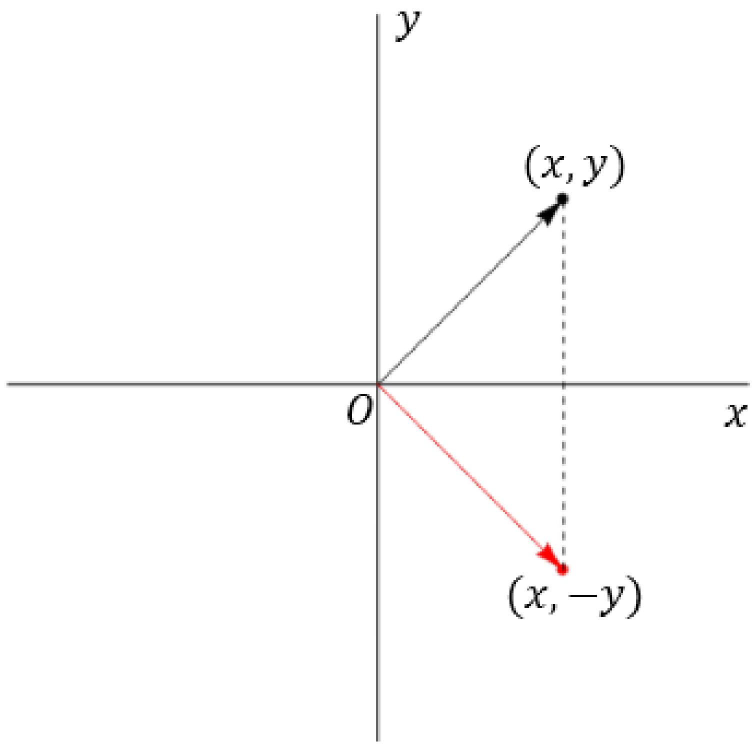
$f : (x, y) \to (-x, y)$



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Осева симетрия относно Ox

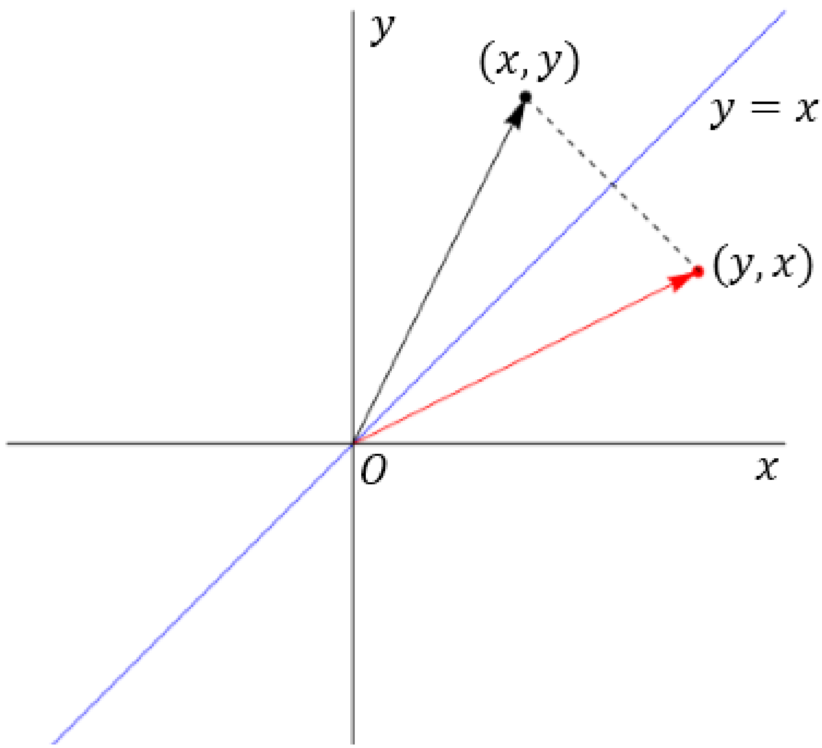
$f : (x, y) \to (x, -y)$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Осева симетрия относно правата $y = x$ (ъглополовящата на първи и трети квадрант)

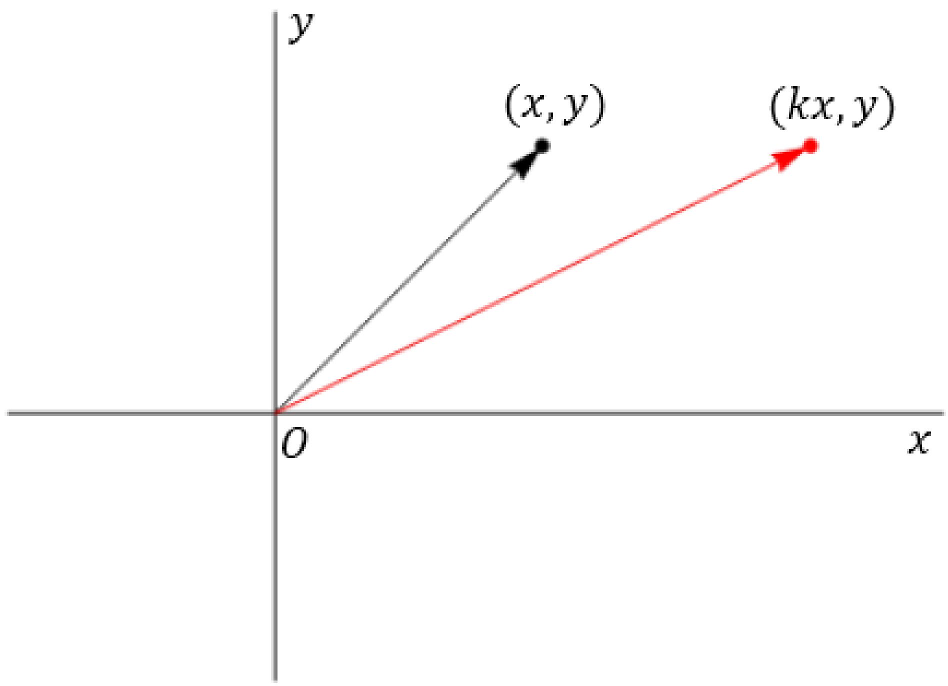
$$f : (x, y) \to (y, x)$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Мащабиране по x-координатата с мащабиращ фактор $k > 0$ (при $k > 1$ е разтягане, при $0 < k < 1$ е свиване)

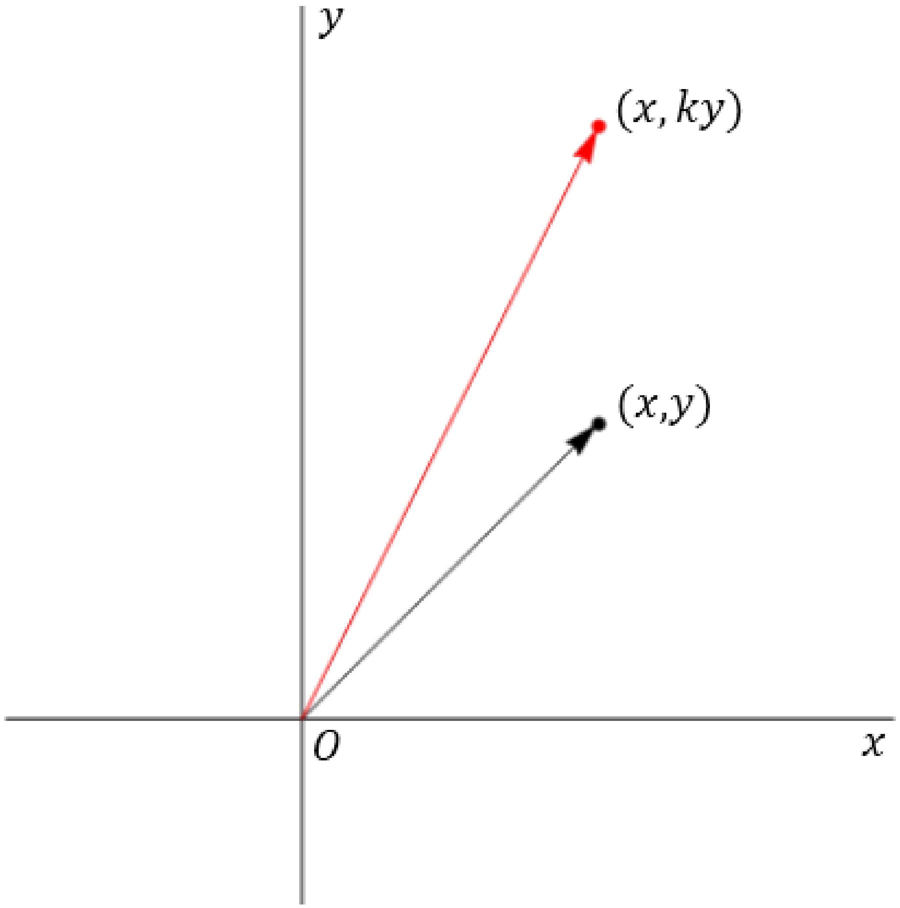
$$f : (x, y) \to (kx, y)$$



$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мащабиране по y-координатата с мащабиращ фактор $k > 0$ (при $k > 1$ е разтягане, при $0 < k < 1$ е свиване)

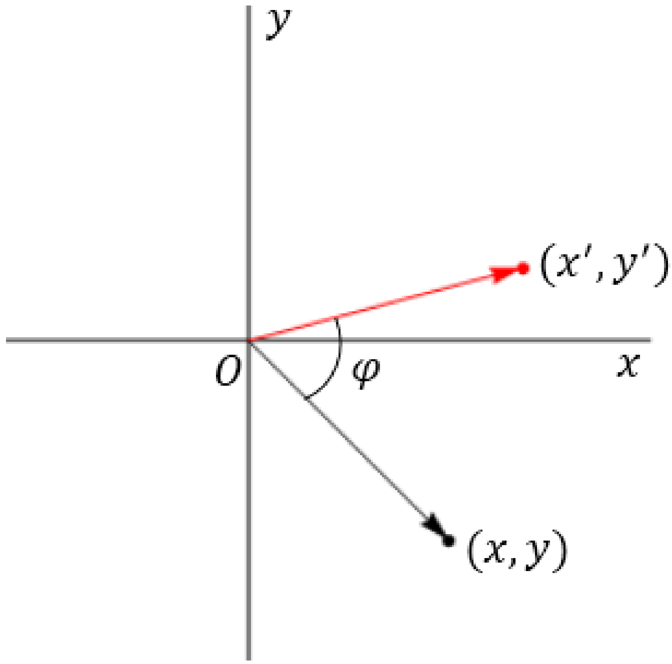
$$f : (x, y) \to (x, ky)$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Ротация около координатното начало на ъгъл φ

$f : (x, y) \to (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$



$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Отбелязваме, че транслацията $(x, y) \to (x + a, y + b)$, определена от вектора $\vec{v}(a, b)$, не е линейно преобразуване.

Накланящо изображение - хоризонтално накланяне

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0.$$

Образът на произволна точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ чрез разглежданото преобразуване се получава чрез

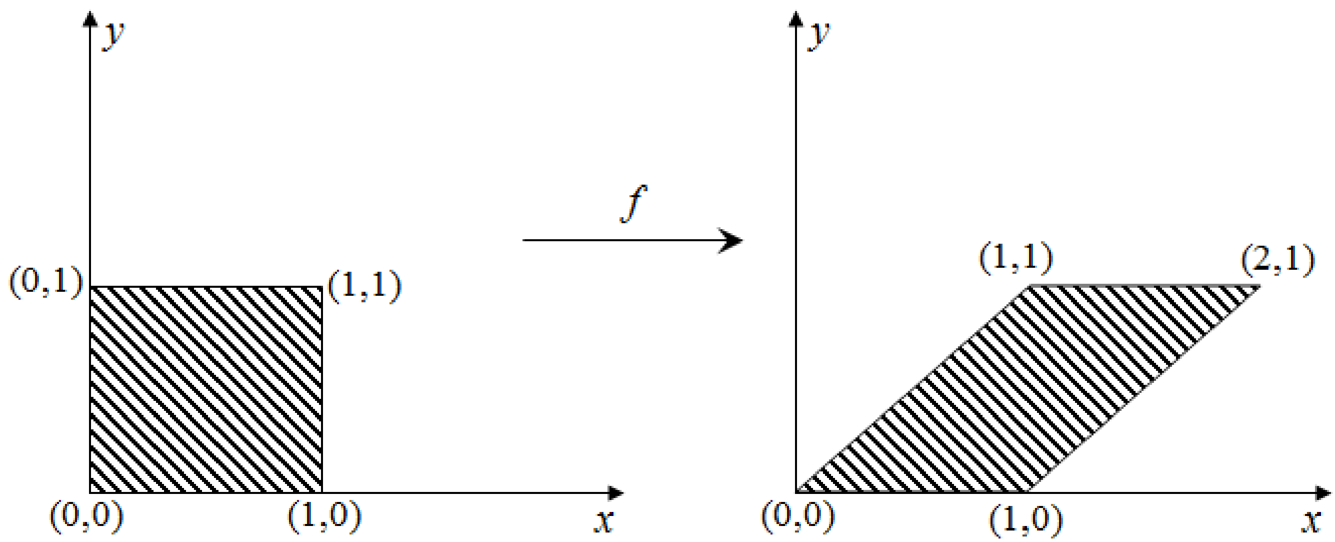
$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}.$$

Следователно $f : (x, y) \longrightarrow (x + ky, y)$

Тогава при $y = 0$ установяваме, че накланящото преобразуване запазва точките от оста Ox, тъй като $(x, 0)$ се преобразува в себе си.

Нека разгледаме накланящото преобразувание при $k = 1$. На фиг. 13.2 е показано как това преобразувание действа върху единичния квадрат с върхове $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$.

Върховете $(0, 0)$ и $(1, 0)$ се изобразяват в себе си (тъй като лежат на оста Ox).



Фиг. 13.2

При $k = 1$ за останалите два върха на единичния квадрат имаме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При произволно $k \neq 0$ ъгълът φ между Ox и образа на Oy (ъгълът на наклона) е

$$\cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Ортогонална проекция

- на точката (x, y) в равнината върху оста Ox се определя от $f : (x, y) \to (x, 0)$;
- на точката (x, y) в равнината върху оста Oy се определя от $f : (x, y) \to (0, y)$;
- на точката (x, y, z) в тримерното пространство върху координатната равнина Oxy се определя от $f : (x, y, z) \to (x, y, 0)$.

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.

9. R. Larson, D. C. Falvo, *Elementary Lienar Algebra*, 6th ed., Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.