Тема 11.

Системи линейни уравнения. Теореми за съвместимост и определеност. Формули на Крамер. Системи хомогенни линейни уравнения

1. Системи линейни уравнения

Системи линейни уравнения (СЛУ) са били използвани за решаване на практически проблеми в Китай около 200г. пр. н. е., а дори и още по-рано – около 2000-1600г. пр.н.е. в Древен Вавилон. По-нататък техниките за решаване на СЛУ достигнали Япония и след това и Европа, където те били развити от видния немски математик ***Карл Гаус***.

Определение 11.1. ***Система линейни уравнения*** с неизвестни $x_1, x_2, ..., x_n$ се нарича съвкупността от уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{11.1}$$

където числата a_{ij} се наричат *коефициенти на системата*, а b_i - *свободни членове на системата*.

Всяка наредена n-торка $(c_1, c_2, ..., c_n)$, която удовлетворява всяко от уравненията (11.1), се нарича *решение на системата.*

Определение 11.2. Ако системата (11.1) има точно едно решение, тя се нарича *определена*, ако има повече от едно решение (безброй много решения) - *неопределена*, а ако няма нито едно решение - *несъвместима.* Да се реши една една система означава да се определи дали тя е съвместима или не и в случай на съвместимост да се намери множеството от нейните решения.

На всяка система линейни уравнения от вида (11.1) се съпоставят две матрици:

матрицата $A = (a_{ij})$ от коефициентите на системата, която се нарича *основна матрица* и матрицата $\bar{A}$, състояща от основната матрица и стълба със свободните членове, която се нарича *разширена матрица* на системата:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

За ранговете на основната и разширената матрица е изпълнено $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(\bar{A})$.

Ако означим $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$, то системата (11.1) може да се запише по следния начин

$$Ax = b.$$

Основни твърдения в теорията на СЛУ са следните:

Теорема 11.1. (Теорема за съвместимост, Руше-Капели-Кронекер) *Една система линейни уравнения е съвместима, точно когато ранговете на основната и разширената матрица са равни, т. е.*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A}).$$

Доказателство. Нека означим стълбовете на основната матрица на системата A съответно с

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогава системата от уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{11.1}$$

може да бъде записана в следната векторна форма

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

или накратко

$$b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n.$$

Нека системата (11.1) е съвместима (има поне едно решение), т.е. съществува поне една наредена n-торка $(c_1, c_2, ..., c_n)$, за която са изпълнени едновременно всички равенства от (11.1), т.е. е изпълнено и

$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n.$$

Следователно векторът b, който е допълнителният стълб в разширената матрица $\bar{A}$, се изразява като линейна комбинация на стълбовете $v_1, v_2, ..., v_n$ на основната матрица.
Следователно $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A})$.

Да докажем и обратната посока. Нека е изпълнено $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A}) = r$. Тогава r е максималният брой линейно независими стълбове (редове) в матриците A (и $\bar{A}$). Следователно всички останали стълбове на A се изразяват като линейни комбинации на тези r на брой линейно независими стълба. Същото важи и за стълба от свободните членове b в разширената матрица $\bar{A}$.

Следователно съществуват числа $c_1, c_2, ..., c_n$, за които

$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n,$$

откъдето следва, че системата (11.1) има поне едно решение $(c_1, c_2, ..., c_n)$, т.е. е съвместима.

Ранг на съвместима система линейни уравнения се нарича рангът на основната ѝ матрица, т. е. броят на линейно независимите уравнения в системата.

Нека означим този ранг с $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A}) = r$

Теорема 11.2. (Теорема за определеност) *Една система линейни уравнения е определена (съотв. неопределена), точно когато рангът ѝ е равен (съотв. по-малък) от броя на неизвестните* n.

В случай, че системата е неопределена, т.е. $\mathrm{rg}(A) = r < n$, то системата има безброй много решения и общото решение зависи от $n - r$ на брой свободни неизвестни (параметри, степени на свобода).

Пример 11.1. На системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{array} \right.$$

съответстват матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \quad \cdot(-3) \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow\!\!\longleftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \ \Big| \cdot \frac{1}{2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \longleftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

За ранговете им е в сила $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\bar{A}) = 3$, следователно системата е съвместима. Тъй като и броят на неизвестните също е три, то системата е определена, т. е. има единствено решение. Системи като тази могат да бъдат решени чрез формулите на Крамер, както ще видим по-нататък.

Пример 11.2. Нека разгледаме системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6. \end{array}\right.$$

Двете уравнения са линейно зависими, тъй като второто е получено от първото чрез умножаване с 2. Следователно броят на линейно независимите уравнения е едно, т. е. рангът на системата е едно. Следователно системата е съвместима (система от едно уравнение винаги е съвместима) и неопределена (броят на неизвестните е 3, т. е. по-голям от броя на уравненията).

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Пример 11.3. Системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{array} \right.$$

е несъвместима, тъй като рангът на основната матрица е две, а на разширената - три:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

В тази система броят на линейно независимите уравнения е по-голям от броя на неизвестните. Такива системи се наричат преопределени.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-1) \\ + \\ \qquad\quad + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \ \Big| \cdot (-1/5) \ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Крамерови системи. Формули на Крамер

Методът за решаване на крамерови системи носи името на немския математик ***Габриел Крамер*** и е публикуван от него през 1750 г. Методът е разработен във връзка с намирането на уравнението на равнинна алгебрична крива, минаваща през зададени точки. За повече информация посетете
`http://hom.wikidot.com/cramer-s-method-and-cramer-s-paradox`

Габриел Крамер (1704-1752)

Нека разгледаме система от n линейни уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \right. \tag{11.2}$$

От Теорема 11.2 следва

Следствие 11.1. *Системата (11.2) има единствено решение, точно когато детерминантата на основната матрица на системата е различна от нула, т. е.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{11.3}$$

С други думи, броят на линейно независимите уравнения в системата (рангът на системата) трябва да е равен на броя на неизвестните.

Ако за системата (11.2) е изпълнено условието (11.3), тази система се нарича *система на Крамер* (*крамерова система*).

Нека Δ_j е детерминантата, която се получава от детерминантата Δ, определена от (11.3), като j-тият стълб е заместен със стълба от свободните членове на (11.2), т. е.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема 11.3. *Единственото решение на крамеровата система (11.2) се получава по формулите*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots., \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

които се наричат формули на Крамер.

Системата от Пример 11.1 е крамерова, тъй като е система от три уравнения с три неизвестни и детерминантата на основната матрица е равна на $\Delta = \det A = -12 \neq 0$. Изчисляваме Δ_1, Δ_2 и Δ_3, както следва:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогава единственото решение на системата е

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{12}{12} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}.$$

Окончателно записваме $(x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2})$.

3. Системи хомогенни линейни уравнения

Ако всички свободни членове в (11.1) са нули, т. е.

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{array}\right. \qquad (11.4)$$

получаваме ***система хомогенни линейни уравнения.*** Очевидно такава система е винаги съвместима, тъй като има поне едно решение - наредената n-торка $(x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0)$. Това решение се нарича *нулево* (*тривиално*).

Теорема 11.4. *Една система хомогенни линейни уравнения има ненулево решение, точно когато рангът ѝ е по-малък от броя на неизвестните, т. е. е неопределена система.*

За системата (11.4) имаме следното матрично представяне

$$Ax = o,$$

където $o = (0, 0, ..., 0)^T$.

Теорема 11.5. *Множеството от решенията на система хомогенни линейни уравнения с n неизвестни и ранг r е $(n-r)$-мерно векторно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*

Ако намерим база на векторното пространство на решенията на (11.2), то произволно решение на тази система ще се представя като линейна комбинация на базисните вектори (решения).

Нека рангът на системата (11.4) е r. Можем да предполагаме, че коефициентите пред първите r неизвестни в първите r уравнения образуват базисен минор Δ_r. Тогава системата (11.4) е равносилна на системата от първите r уравнения, която можем да запишем във вида

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ \dotfill \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{array}\right. \tag{11.5}$$

Тъй като $\Delta_r \neq 0$, то (11.5) може да се реши относно неизвестните $x_1, x_2, ..., x_r$ чрез формулите на Крамер. Полученото решение зависи от неизвестните $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, които се наричат *свободни неизвестни* (*параметри*, *степени на свобода*). При всеки конкретен избор на стойностите на параметрите получаваме едно конкретно решение на системата (11.4).

Даваме на параметрите последователно следните стойности

x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
1	0	...	0
0	1	...	0
...	...	...	...
0	0	...	1

По този начин получаваме $n-r$ на брой решения $w_1, w_2, ..., w_{n-r}$ на (11.4), които имат вида

$$w_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad w_{n-r} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решенията $w_1, w_2, ..., w_{n-r}$ са линейно независими и следователно образуват база на векторното пространство от решенията на системата (11.4). Поради това системата $(w_1, w_2, ..., w_{n-r})$ се нарича *базисна* (*фундаментална*) *система решения на системата* (11.4).

Следствие 11.2. *Общото решение* x' *на система хомогенни линейни уравнения с ранг* r *и* n *неизвестни зависи от* $n - r$ *параметри* $p_1, p_2, ..., p_{n-r}$ *и се получава по формулата*

$$x' = p_1 w_1 + p_2 w_2 + ... + p_{n-r} w_{n-r},$$

където $(w_1, w_2, ..., w_{n-r})$ *е фундаментална система решения.*

Пример 11.4. Намерете всички решения и една фундаментална система решения на системата хомогенни линейни уравнения

$$\left|\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Рангът на основната матрица A, а следователно и на системата е $\operatorname{rg}(A) = 2$, броят на неизвестните е $n = 4$. Следователно решението на системата се определя от $n - \operatorname{rg}(A) = 2$ на брой параметъра. Нека за параметри изберем неизвестните $x_3 = p$ и $x_4 = q$. Изразяваме останалите неизвестни чрез тях:

$$\left|\begin{aligned} & x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 \\ & 2x_1 + x_2 = -3x_3 - x_4. \end{aligned}\right.$$

Тогава получаваме $x_1 = -4x_3 + x_4 = -4p + q$,
$x_2 = 5x_3 - 3x_4 = 5p - 3q$.

Следователно решенията на системата са $(-4p + q, 5p - 3q, p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Една фундаментална система решения на дадената система получаваме като даваме линейно независими стойности на параметрите

$x_3 = p$	$x_4 = q$	(x_1, x_2, x_3, x_4)
1	0	(-4, 5, 1, 0)
0	1	(1, -3, 0, 1)

Следователно векторите $v = (-4, 5, 1, 0)$ и $w = (1, -3, 0, 1)$ образуват фундаментална система решения и всички решения на системата са техни линейни комбинации

$$(-4p + q, 5p - 3q, p, q) = pv + qw = p(-4, 5, 1, 0) + q(1, -3, 0, 1).$$

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.