Тема 10.

Ранг на система от вектори и матрица

1. Ранг на система от вектори

Определение 10.1. Нека V е векторно пространство и $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е система от вектори на V.
Ранг на системата $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича максималният брой линейно независими вектори от $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Означаваме $\operatorname{rg}\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ или $\operatorname{rank}\{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

С други думи рангът на система вектори е броят на векторите във всяка нейна максимално линейно независима подсистема. Това число е и минималният брой измежду векторите, които пораждат цялата система (които са необходими, за да може чрез техните линейни комбинация да се изразят всички вектори от системата).

Рангът на система от вектори е естествено число.

Рангът на система, която се състои само от нулевия вектор o, е числото нула, т.е. $\operatorname{rg}\{o\} = 0$.

Ако $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е база на V, то рангът на системата е равен на размерността на V, $\operatorname{rg}\{a_1, a_2, ..., a_k\} = \dim V$, тъй като всички вектори от базата са линейно независими помежду си.

Намирането на ранга на система от вектори се състои в отделянето на максимално линейно независима подсистема от тези вектори. След въвеждането на понятието ранг на матрица, ще се запознаем с по-удобен от практическа гледна точка метод за определяне на ранга.

Нека преди това видим няколко примера за определяне на ранга на система от вектори само чрез определението за понятието ранг.

Пример 10.1. Намерете ранга на следните системи от вектори:

$$\text{а)} \quad \vec{a}(1,2,3), \quad \vec{b}(2,4,6) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});$$

$$\text{в)} \quad \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \text{ в успоредника } ABCD.$$

а) Тъй като $\vec{b} = 2\vec{a}$, то векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни и следователно максималният брой линейно независими вектори в системата $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ е равен на един, т. е. $\operatorname{rg}\{\vec{a}, \vec{b}\} = 1$.

б) Никои два от векторите (матриците) от втората ситема не са линейно зависими (тъй като не се получават една от друга чрез умножение с число, както векторите от предния пример). Затова нека проверим дали трите матрици A, B и C заедно са линейно зависими или независими. Установяваме, че

$$xA + yB + zC = O \quad \Leftrightarrow$$

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y & 0 \\ x + y + z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.$$

Следователно трите матрици A, B, C са линейно независими и оттук $\operatorname{rg}\{A, B, C\} = 3$.

в) Тъй като за успоредника $ABCD$ е изпълнено

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

то векторът $\overrightarrow{AC}$ е линейно зависим с векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

От друга страна всеки два вектора от системата $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\}$ (т.е. двойките вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$) не са колинеарни и следователно са линейно независими помежду си.

Следователно $\operatorname{rg}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\} = 2$.

Отбелязваме, че

$$\operatorname{rg}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} = \operatorname{rg}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\} = \operatorname{rg}\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} = 2.$$

2. Ранг на матрица

Нека $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Редовете на A са наредени n-торки от числа, които означаваме с $u_i(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., m$, а стълбовете ѝ са наредени m-торки от числа $v_j(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})^T \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$. Разместването на редовете на A не променя ранга на системата от вектори $u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, както и разместването на стълбовете не променя ранга на системата $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Изпълнено е по-силното твърдение

Теорема 10.1. *Разместването на редове (съотв. стълбове) на една матрица не променя ранга на системата от стълбовете (съотв. редовете) на матрицата.*

Определение 10.2. *Елементарни преобразувания на матрица* се наричат преобразуванията:

• разменяне местата на два реда или два стълба;

• умножаване на даден ред или даден стълб с произволно число, различно от нула;

• прибавяне към един ред (съотв. стълб) на произволен друг ред (съотв. стълб), умножен с някакво число.

Елементарните преобразувания, извършени само върху редовете (съотв. стълбовете) на една матрица не променят ранга на редовете (съотв. стълбовете) на матрицата.

Определение 10.3. Всяка матрица от вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

се нарича *трапецовидна* (или с *трапецовидна форма*), ако $a_{ii} \neq 0$ за $i = 1, 2, ..., r$.

Например следните матрици са трапецовидни

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теорема 10.2. *Рангът на системата от редовете на трапецовидната матрица (10.1) е равен на r, т.е. на броя на ненулевите редове.*

Определение 10.4. *Минор от k-ти ред* на една матрица се нарича всяка детерминанта от k-ти ред с елемента, в които се пресичат произволно взети k реда и k стълба на матрицата. Ненулев минор от k-ти ред се нарича *базисен минор на матрица*, ако всеки минор от $(k+1)$-ви ред (ако съществува) е равен на нула.

Теорема 10.3. (Фробениус) *Редът на базисния минор на една матрица е равен на ранга на системата от редовете (стълбовете) ѝ.*

Без да доказваме теоремата, нека разгледаме един пример с матрицата

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нека първо определим реда на базисния минор на D.

Редът на базисния минор на D би бил равен на 0, ако всички детерминанти от 1-ви ред, които могат да се формират от елементите на D (т.е. самите елементи на D), са равни на 0. Очевидно това не е изпълнено.

Редът на базисния минор на D би бил равен на 1, ако всички детерминанти от 2-ри ред, които могат да се формират от елементите на D, са равни на 0. Да разгледаме една такава детерминанта

- например тази от първите два реда и първите два стълба на D (адюнгирания минор M_{33})

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Следователно редът на базисния минор на D не е равен на 1.

Редът на базисния минор на D би бил равен на 2, ако всички детерминанти от 3-ти ред, които могат да се формират от елементите на D, са равни на 0. Има единствена такава детерминанта и това е детерминантата на самата матрица D, за която пресмятаме

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 8 + 12 = 0.$$

Следователно редът на базисния минор на матрицата D е равен на 2.

Какво можем да кажем за ранга на системата от редовете (стълбовете) на матрицата D, т.е. $\mathrm{rg}\,(D) =?$

Нека разгледаме редовете на D, които означаваме $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (-2, 0, 4)$, $v_3 = (-1, 2, 3)$. Нека забележим, че

$$v_3 = v_1 + v_2$$

и векторите v_1 и v_2 са линейно независими. Следователно рангът на системата от редовете на D е също равен на 2.

Аналогични разсъждения могат да бъдат проведени и за стълбовете на матрицата D: $u_1 = (1, -2, -1)$, $u_2 = (2, 0, 2)$, $u_3 = (-1, 4, 3)$, за които $u_2 = 4u_1 + 2u_3$. Рангът на системата от стълбовете на D е също равен на 2.

Определение 10.5. Редът на базисните минори на една матрица A (който съвпада с ранга на системата от редовете и ранга на системата от стълбовете ѝ) се нарича ***ранг на матрицата*** и се означава с $\operatorname{rg}(A)$.

Чрез теоремата на Фробениус установяваме, че във всяка матрица има най-много толкова линейно независими реда, колкото и линейно независими стълба, но техниката за намиране на ранг на матрица чрез реда на базисния ѝ минор не е особено удобна за прилагане.

Понятието *ранг на матрица* е въведено през 1879 г. от немския математик *Фердинанд Георг Фробениус*, който го дефинирал в смисъла на Определение 10.5. Но идеята за ранг е била използвана и по-рано, още през 1851 г. от английския математик *Джеймс Силвестър*.

Нека се върнем на трапецовидните матрици от примера

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тъй като рангът на всяка матрица е равен на максималния брой линейно независими редове, а този брой в трапецовидна матрица е равен на брой на ненулевите редове, то за горните три трапецовидни матрици имаме: $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, $\mathrm{rg}\,(B) = 2$, $\mathrm{rg}\,(C) = 3$.

Нека обърнем внимание, че матрицата C е квадратна триъгълна матрица и следователно нейната детерминанта е равна на произведението на елементите от главния ѝ диагонал, т.е. $\det C = 1.4.6 = 24 \neq 0$. Следователно трите реда (стълба) на C са линейно независими.

Как намираме ранга на матрица, която не е трапецовидна? Отговор ще получим от следващото твърдение.

Теорема 10.4. *Елементарните преобразувания на матрица не изменят нейния ранг.*

Теорема 10.5. *Една детерминанта е равна на нула тогава и само тогава, когато редовете (стълбовете) ѝ са линейно зависими.*

За матрици A и B с еднакъв ранг се казва, че са *еквивалентни*. Често равенството $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ се заменя с $A \sim B$.

Ако A и B са матрици, при което A е обратима, то

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg}(B).$$

Теореми 10.2 и 10.4 ни дават удобен начин за намиране на ранга на произволна матрица. За целта преобразуваме дадената матрица в трапецовидна форма с помощта на елементарни преобразувания върху редовете и\или стълбовете на матрицата. Тогава получената и изходната матрица са еквивалентни и следователно имат равни рангове.

Намирането на ранга на система от вектори се свежда до намирането на ранга на матрицата от техните координати.

Пример 10.2. Намерете ранга на системата вектори $a_1 = (1, 1, 0, 2)$, $a_2 = (1, -1, 3, 3)$, $a_3 = (2, 0, -1, 2)$, $a_4 = (-1, 0, 3, 1)$.

Разполагаме координатите на дадените вектори по редовете или стълбовете на матрица и след това чрез елементарни преобразувания по редовете или стълбовете привеждаме тази матрица в трапецовидна (или триъгълна) форма. Това е показано по-долу:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-1)\ \ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot 2\ \ \cdot 2 \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{9}{5}\right) \\ + \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.
$$

Следователно $\operatorname{rg}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 4$. Това показва, че рангът на системата от вектори е равен на броя вектори в системата, т.е. всички вектори от системата са линейно независими. Оттук може да се направи изводът, че системата четирите наредени четворки $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ е база на векторното пространство $\mathbb{R}^4$.

Пример 10.3. Проверете дали векторите $\{u, v, w\}$ са линейно зависими или линейно независими:

а) $u = (1, 2, 0, 3)$, $v = (-1, 0, 1, 1)$, $w = (2, 1, -1, -1)$;

б) $u = (1, 2, 0, 3)$, $v = (-1, 0, 1, 1)$, $w = (-2, 4, 4, 10)$;

Търсим ранга на системата от дадените вектори.

В случай, че рангът е равен на броя на векторите, то векторите в системата са линейно независими (и никой от тях не може да се изрази като линейна комбинация на останалите). Такава е ситуацията в подточка а), тъй като получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{3}{2} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Тъй като рангът на последната матрица е равен на 3, то и $\operatorname{rg}\{u, v, w\} = 3$ и следователно трите вектора са линейно независими.

б) Тук получаваме следното:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сега рангът на последната получена матрица е 2 и следователно $\operatorname{rg}\{u, v, w\} = 2$. Тъй като рангът е по-малък от броя на векторите в системата, то системата и линейно зависима.

Литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. D. C. Lay, S. R. Lay, Judi J. McDonald, *Linear algebra and its applications*, 5th ed. Pearson, 2016.

3. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 4th ed., Nelson Engineering, 2007, ISBN-13: 978-813-150-172-6.

4. H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Angebra (applications version)*, 11th ed., Wiley, 2014, ISBN 978-1-118-43441-3.

5. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 3rd ed., Springer, 2015.

6. K. Singh, *Linear Algebra Step by Step*, Oxford University Press, 2014.

7. C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2000.

8. S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 9th ed., Pearson, 2015.